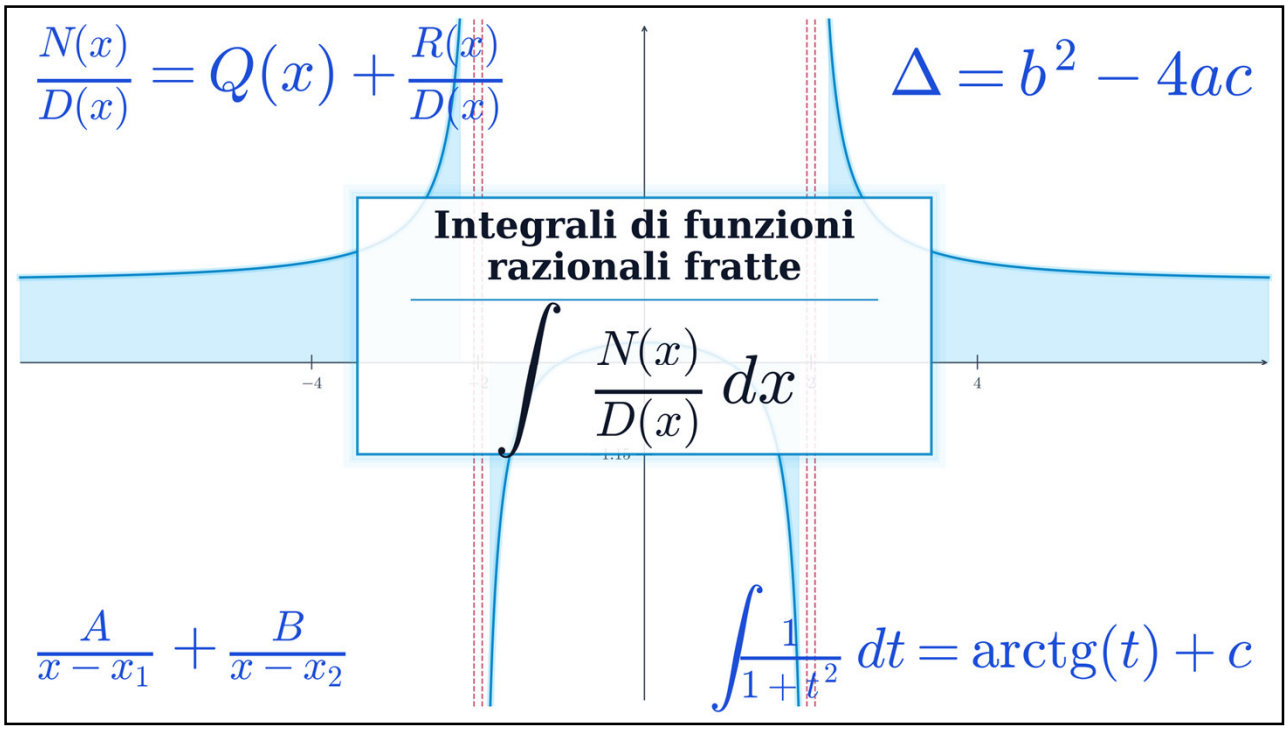


1

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Una **funzione razionale fratta** è una funzione definita come rapporto tra due polinomi:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi a coefficienti reali (con $D(x) \neq 0$)

L'obiettivo è quello di ricondurre il calcolo di $\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx$ a integrali elementari

(potenze, logaritmi e arcotangenti)

2

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Si confronta il grado del numeratore $N(x)$ con il grado del denominatore $D(x)$:

Caso A - Frazione propria, $\boldsymbol{grado(N(x)) < grado(D(x))}$:

Si passa direttamente allo studio del denominatore $D(x)$.

1. **Denominatore di primo grado: $\boldsymbol{D(x) = ax + b}$**
   Se il numeratore è una costante $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 0)$.

$$\int \frac{k}{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso A - Frazione propria, $\boldsymbol{grado(N(x)) < grado(D(x))}$:

2. **Denominatore di secondo grado $\boldsymbol{D(x) = ax^2 + bx + c}$**

Caso 2.1 - $\boldsymbol{\Delta > 0}$ (radici reali distinte $x_1 \neq x_2$)

Il denominatore si scompone in due fattori lineari distinti:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si applica il **metodo dei fratti semplici**, determinando due costanti reali $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{mx+q}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 2.1 - $\Delta > 0$ (radici reali distinte $x_1 \neq x_2$)

Eseguendo il minimo comune multiplo e applicando il principio di identità dei polinomi si ricavano A e B, ottenendo infine come primitive due logaritmi:

$$\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + c$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte - Esempio

$$\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}\,dx$$

Si scompone in fratti semplici, le radici del denominatore sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$:

$$\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Imponendo $\begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=1 \end{cases}$ si ottiene $A=-2$ e $B=5$.

$$\int \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-2}\,dx = -2\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + c$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 2.2 - $\Delta = 0$ (radice reale doppia $x_1 = x_2$)

Il denominatore è il quadrato di un binomio:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Se $\boldsymbol{m = 0}$ (numeratore costante q), si integra come potenza:

$$\frac{mx + q}{a(x - x_1)^2} = \frac{q}{a(x - x_1)^2}$$

$$\int \frac{q}{a(x - x_1)^2}\, dx = \frac{q}{a}\int (x - x_1)^{-2}\, dx = -\frac{q}{a(x - x_1)} + c$$

7

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 2.2 - $\Delta = 0$ (radice reale doppia $x_1 = x_2$)

$$\int \frac{7}{x^2 + 6x + 9}\, dx$$

Il denominatore è il quadrato di un binomio $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$$\int \frac{7}{(x + 3)^2}\, dx = 7\int (x + 3)^{-2}\, dx$$

Si tratta di un integrale immediato

$$7\int (x + 3)^{-2}\, dx\& = 7 \cdot \frac{(x + 3)^{-2+1}}{-2 + 1} + c = 7 \cdot \frac{(x + 3)^{-1}}{-1} + c = -\frac{7}{(x + 3)} + c$$

8

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 2.2 - $\Delta = 0$ (radice reale doppia $x_1 = x_2$)

Se $m \neq 0$ (numeratore di primo grado $mx + q$): si scompone nei fratti semplici:

$$\frac{mx+q}{a(x-x_1)^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$$

integrando poi rispettivamente in un logaritmo e in una potenza:

$$\int \frac{mx+q}{a(x-x_1)^2}\,dx = A\ln|x-x_1| + \frac{B}{x-x_1} + c$$

9

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 2.2 - $\Delta = 0$ (radice reale doppia $x_1 = x_2$)

$$\int \frac{3x+5}{x^2-4x+4}\,dx$$

Il denominatore è il quadrato di un binomio $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$$\frac{3x+5}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax - 2A + B}{(x-2)^2}$$

Si ricava $A = 3$ e $B = 11$

$$\int \frac{3x+5}{(x-2)^2}\,dx\& = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{11}{(x-2)^2}\right)dx = 3\ln|x-2| - \frac{11}{x-2} + c$$

10

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 3: $\Delta < 0$ (Denominatore irriducibile in $\mathbb{R}$)
Il polinomio $ax^2 + bx + c$ non ha radici reali e non è scomponibile.

Caso 3.1 — Numeratore costante ($m = 0$):
Si utilizza la tecnica del **completamento del quadrato** al denominatore per ricondursi all'integrale immediato

$$\int \frac{1}{1 + [g(x)]^2}\, g'(x)\, dx = \text{arctg}(g(x)) + c)$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 3: $\Delta < 0$ (Denominatore irriducibile in $\mathbb{R}$)

Caso 3.1 — Esercizio ($m = 0$): $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx$

Consideriamo i primi due termini $x^2 + 2x$ e confrontandoli con lo sviluppo del quadrato di binomio $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$, imponiamo $2k = 2 \Longrightarrow k = 1$.
Aggiungiamo e sottraiamo $k^2 = 1$ per completare il quadrato:

$$x^2 + 2x + 2 = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1 + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Integrando $$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\, dx = arctg(x + 1) + c$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 3: $\Delta < 0$ (Denominatore irriducibile in $\mathbb{R}$)

Caso 3.1 — Esercizio ($m = 0$): $\int \frac{5}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

Riscriviamo $x^2 + 4x + 13$ isolando il quadrato di binomio $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$:

$$x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 4x + 4) + 9 = (x+2)^2 + 9 = (x+2)^2 + 9 = 9\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1\right]$$

$$\int \frac{5}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{5}{9}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2} dx = \frac{5}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2} dx$$

$$= \frac{5}{3}\text{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 3: $\Delta < 0$ (Denominatore ha radici complesse coniugate e semplici in $\mathbb{R}$)

Caso 3.2 — Esercizio $\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$

$$D(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$$

Una radice reale semplice x = -1 reale semplice e un fattore non scomponibile di grado 2

$$\frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso 3: $\Delta < 0$ (Denominatore ha radici complesse coniugate e semplici in $\mathbb{R}$)

Caso 3.2 — Esercizio $\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx$

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}arctgx + c$$

Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso B $(\text{grado}(N(x)) \geq \text{grado}(D(x))$**:**

Si esegue la divisione tra polinomi di $N(x)$ per $D(x)$, determinando il polinomio quoziente $Q(x)$e il polinomio resto $R(x)$ con grado inferiore rispetto a $D(x)$

$$N(x) = Q(x)\,D(x) + R(x) \Longrightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

integrando $$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q\,(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

dove

$\int Q(x)\mathrm{d}x$ è l'integrale immediato di un polinomio e $\frac{R(x)}{D(x)}$ è una frazione propria.

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Esercizio $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx$

Poiché il grado del numeratore (5) è maggiore del grado del denominatore (4), eseguiamo la divisione tra $x^5 - x + 1$ e $x^4 + x^2$

La funzione integranda si riscrive quindi come:

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \int x + \frac{-x^3 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \int x dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x} - arctgx + c$$