LEZIONE 20-11-2026

(Prosecuzione esercizio di ieri) $f'(x) = \dfrac{-x^2-x+1}{e^x}$

Segno di f':

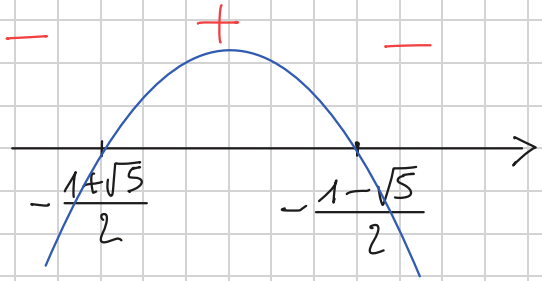
$f' \geq 0 \iff \dfrac{-x^2-x+1}{e^x} \geq 0$

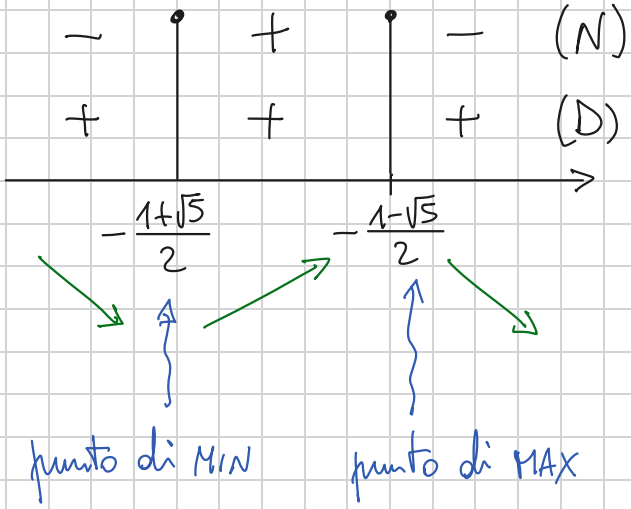
N: $-x^2-x+1 \geq 0$

D: $e^x > 0$ → SEMPRE

$x = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1+4}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$

quindi abbiamo ottenuto:





Concavità e flessi: da $f'(x) = \dfrac{-x^2-x+1}{e^x}$ calcoliamo

$$f''(x) = \frac{(-2x-1)\cdot e^x - (-x^2-x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\left[(-2x-1)-(-x^2-x+1)\right]}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{-2x-1+x^2+x-1}{e^x} = \frac{x^2-x-2}{e^x}$$

Cerchiamo i punti in cui $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \iff \frac{x^2-x-2}{e^x} = 0 \iff x^2-x-2=0 \iff$$

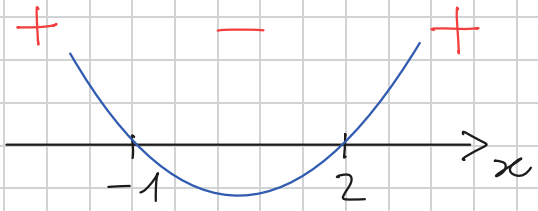
$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

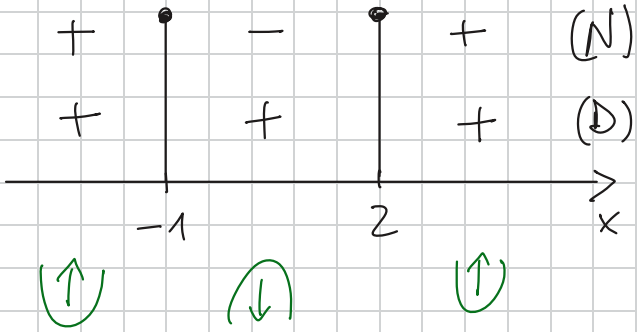
Per capire la concavità di f studiamo quando $f'' \geq 0$:

$f'' \geq 0 \iff \frac{x^2-x-2}{e^x} \geq 0$

N: $x^2-x-2 \geq 0$

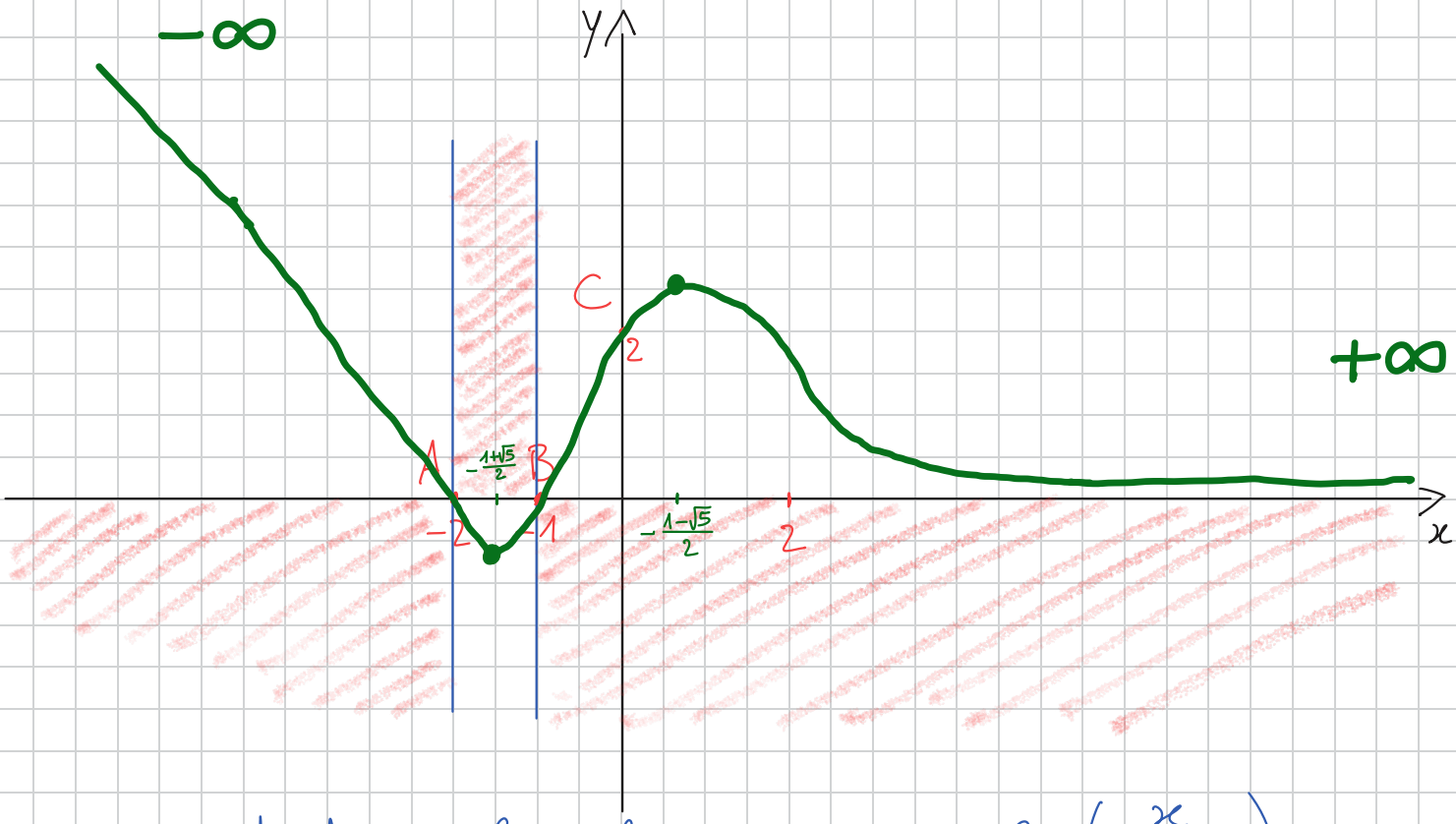
D: $e^x > 0 \rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R}$





$\Rightarrow$ $x=-1$ e $x=2$ sono punti di flesso perché lì la concavità cambia.

Rappresentazione del grafico:



Esercizio: studiare la funzione $y = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

Svolgimento. Dominio: funzione logaritmica e fratta

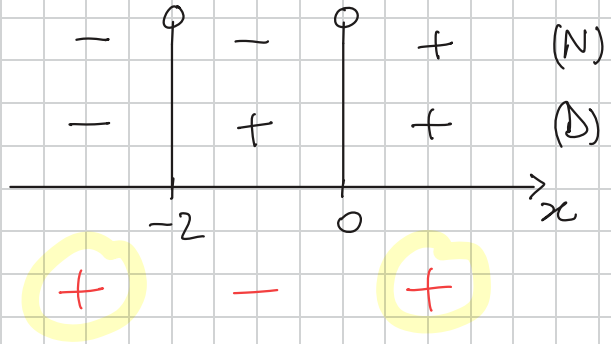
logaritmo $\rightsquigarrow \frac{x}{x+2} > 0$ $\rightsquigarrow$ Nota: la 1ª condizione implica già che il denom. sia diverso da zero!

frazione $\rightsquigarrow$ $x+2 \neq 0$

$\frac{x}{x+2} > 0$

N: $x > 0$

D: $x+2 > 0 \rightarrow x > -2$



Quindi il nostro dominio è $D = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Intersezioni:

asse x $(y=0)$: $0 = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \rightarrow e^0 = \frac{x}{x+2}$

$1 = \frac{x}{x+2}$; $1 - \frac{x}{x+2} = 0$; $\frac{x+2-x}{x+2} = 0$;

$\frac{2}{x+2} = 0$; $2 = 0$ ↯ (impossibile)

quindi NO intersezioni con asse x

$2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3$

asse y $(x=0)$: impossibile perché $x=0 \notin D$.

Studio del segno:

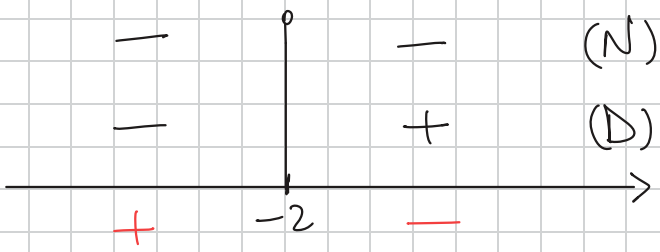
$y \geq 0 \iff \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \geq 0 \iff \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \geq \ln 1$

$\iff \frac{x}{x+2} \geq 1$; $\frac{x}{x+2} - 1 \geq 0$; $\frac{x-(x+2)}{x+2} \geq 0$;

$\frac{-2}{x+2} \geq 0$

N: $-2 > 0$ MAI

D: $x+2 > 0 \rightarrow x > -2$



$\rightarrow y \geq 0$ per $x < -2$

Limiti agli estremi del dominio $D = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right) = \ln(1) = 0 \rightsquigarrow y = 0 \quad \text{ASINTOTO OR.}$$

($\frac{2}{x} \to 0$)

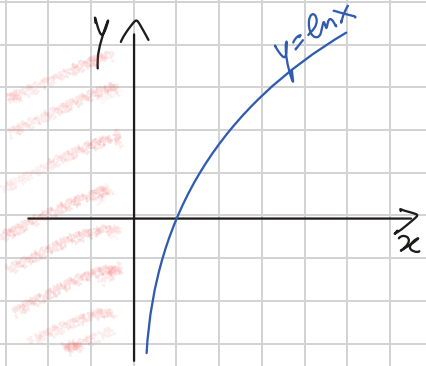
$$\lim_{x \to -2^-} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty \rightsquigarrow x = 0 \quad \text{ASINTOTO V.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right) =$$

($\frac{2}{x} \to 0$)

$$= \ln(1) = 0 \rightsquigarrow y = 0 \quad \text{ASINTOTO OR.}$$



Derivata prima.

$$y' = \frac{1}{\frac{x}{x+2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot (1)}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{x+2}}{x} \cdot \frac{\cancel{x+2-x}}{(x+2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2}{x(x+2)}$$

Osserviamo già che $\nexists$ punti stazionari, poiché $y' = 0 \iff \frac{2}{x(x+2)} = 0$ ↯

$$y' \geq 0 \iff \frac{2}{x(x+2)} \geq 0 \iff x < -2, \; x > 0, \text{ ossia}$$

y è crescente in tutto il suo dominio.

Derivata seconda:

$$y'' = \frac{0 \cdot x(x+2) - 2 \cdot (2x+2)}{x^2(x+2)^2} =$$

$= \dfrac{-4x-4}{x^2(x+2)^2}$ $\qquad y''=0 \iff \dfrac{-4x-4}{x^2(x+2)^2}=0 \iff -4x-4=0$

ossia per $x=-1$, ma poiché $x=-1 \notin D$ non verrà preso in considerazione. Studiamo il segno di y'' per la concavità:

$$y'' \geq 0 \iff \frac{-4x-4}{x^2(x+2)^2} \geq 0 \iff -4x-4 \geq 0 \; ; \; -4x \geq +4$$

$$\frac{-4x}{-4} \leq \frac{+4}{-4} \qquad \text{ossia} \qquad x \leq -1$$

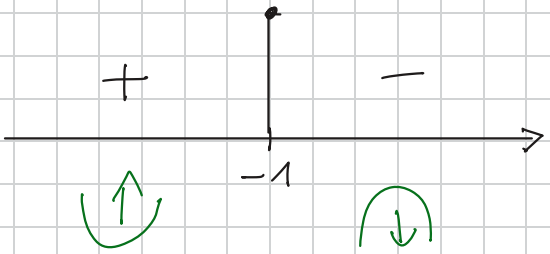
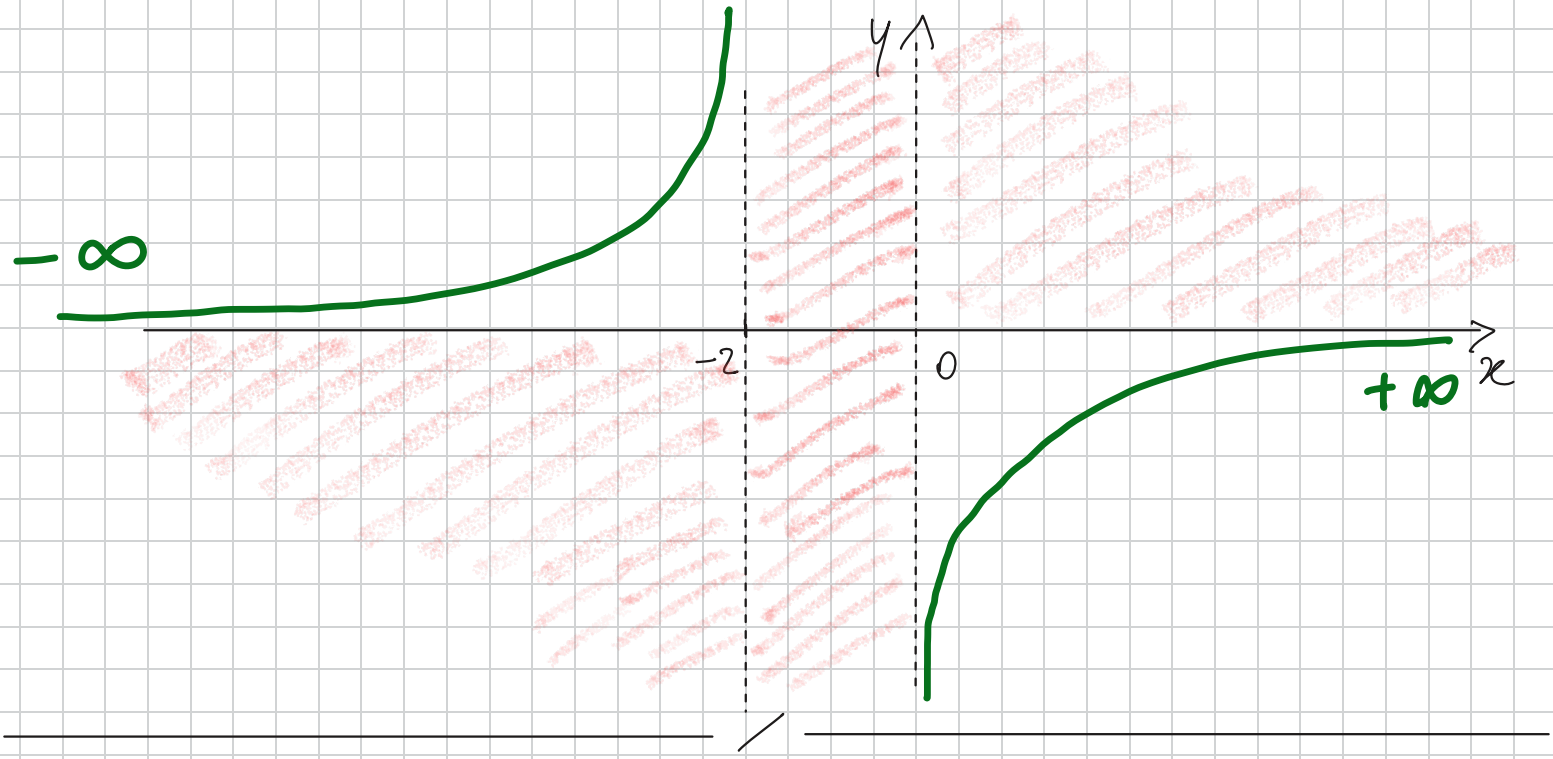


Grafico di $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$:



Integrali (indefiniti):

Per definizione l'integrazione è l'operazione inversa alla derivazione, ossia se $F(x)$ è una funzione che ha derivata $f(x)$ (quindi $F'(x)=f(x)$), diremo che l'integrale di $f(x)$ è $F(x)$ e scriveremo

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Ad esempio se $F(x) = 3x^2$ allora la sua derivata è $f(x) = 6x$, pertanto l'integrale di $6x$ è $3x^2$:

$$\int 6x\,dx = 3x^2 \qquad (\bigstar)$$

Quindi il risultato di un integrale è <u>una funzione</u>!

Nota $(\bigstar)$: ci accorgiamo che anche $G(x) = 3x^2 + 2$ ha come derivata $6x$, quindi per essere più precisi diremo che l'integrale di $6x$ è $3x^2 + c$ dove c è una costante qualsiasi, poiché le costanti spariscono con la derivazione. Scriveremo

$$\int 6x\,dx = 3x^2 + c\,.$$

Dalla tabella delle derivate elementari ricaviamo quella degli integrali elementari:

$f(x)$	$F(x)$
0	c
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

DEF: Una funzione $F(x)$ si dice PRIMITIVA di $f(x)$ definita in $D \subseteq \mathbb{R}$ se $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora le funzioni $F(x) + c$, con c numero reale qualsiasi, sono tutte le primitive di $f(x)$ e scriveremo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

chiamato INTEGRALE INDEFINITO di $f(x)$.

Proprietà degli integrali indefiniti:

1) Somma: $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int [f(x)+g(x)]\,dx$

2) Prodotto per una costante:

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int f(x)\,dx$$

Vero o falso?

Dire quali dei seguenti integrali sono corretti facendo le derivate delle primitive:

1) $\int x^2+3\,dx = \frac{x^3}{3} + 3x + c \longrightarrow \left[\frac{x^3}{3}+3x+c\right]' = \frac{3x^2}{3} + 3$ ✓

2) $\int 3x^2 dx = 6x + c \longrightarrow [6x+c]' = 6$ ✗

3) $\int \ln x\,dx = \frac{1}{x} + c \longrightarrow \left[\frac{1}{x}+c\right]' = -\frac{1}{x^2}$ ✗

4) $\int \sin(x^2)\,dx = -\cos(x^2) + c \longrightarrow \left[-\cos x^2 + c\right]' = -\left(-\operatorname{sen} x^2\right)\cdot 2x = +2x \operatorname{sen} x^2$ ✗

5) $\int x \sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$

6) $\int \ln x\,dx = x\cdot \ln x - x + c$

7) $\int x \sin x^2\,dx = \cos x^2 + c$

} (Esercizio)

Esempi: calcoliamo i seguenti integrali indefiniti

1) $\int 1-x\,dx = x - \frac{x^2}{2} + c$

2) $\int 3e^x\,dx = 3\int e^x\,dx = 3e^x + c$

3) $\int \operatorname{sen} x + 2x\,dx = -\cos x + 2\cdot\frac{x^2}{2} + c = -\cos x + x^2 + c$

4) $\int \frac{5}{x}\,dx = 5\int \frac{1}{x}\,dx = 5\ln x + c.$

5) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

6) $\int x - 2x^3 + 3x^5\,dx$

7) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

8) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx$

9) $\int \frac{3x^2+2}{3x}\,dx$

10) $\int \frac{x^4+x^3-2x-4}{x^3}\,dx$

11) $\int e^x(1-2xe^{-x})\,dx$

12) $\int \frac{1-8\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

(Esercizi)