CURVE IN FORMA PARAMETRICA

UNA CURVA REGOLARE È DATA DA UNA PARAMETRIZZAZIONE DI CLASSE C^1 AVENTE LA FORMA

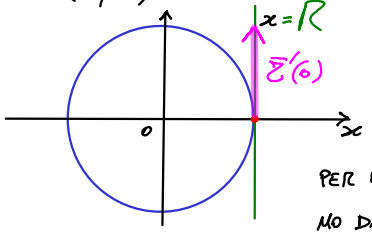
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in I \text{ intervallo in } \mathbb{R}$$

TALE CHE $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \bar{0}$ PER OGNI $t \in I$. LE CURVE REGOLARI HANNO LA RETTA TANGENTE, CHE, NEL PUNTO $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ HA EQUAZIONE $x(\lambda) = P_0 + \lambda (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

OVVERO $\begin{cases} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \\ z = z(t_0) + \lambda z'(t_0) \end{cases}$

ESEMPIO: $\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \operatorname{sen} t, \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

HA PER SUPPORTO LA CIRCONFERENZA $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. SAPPIAMO CHE LA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $(R, 0)$ È



$$\begin{cases} x = R \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

PER RISCONTRO, PARTIAMO DAL VETTORE $\bar{\varepsilon}(t) = R(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ E CALCOLIAMO IL VETTORE VELOCITÀ $\bar{\varepsilon}'(t) = R(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ E SOSTITUIAMO $t = 0$ COSICCHÉ $\bar{\varepsilon}(0) = (R, 0, 0)$ E $\bar{\varepsilon}'(0) = (0, R, 0)$ E LA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $P_0 = \bar{\varepsilon}(0)$ HA EQUAZIONE $\bar{x}(\lambda) = P_0 + \lambda \bar{\varepsilon}'(0)$ CIOÈ

$\bar{x}(\lambda) = (R, 0, 0) + \lambda (0, R, 0)$ OVVERO

$$\begin{cases} x = R \\ y = \lambda R, \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$ CHE È LA STESSA

DI $\begin{cases} x = R \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$ LO SI VEDE PONENDO $s = \lambda R$ OVVERO $\lambda = \frac{s}{R}$.

QUI SI VEDE CHE $\| \bar{\varepsilon}(s_1) - \bar{\varepsilon}(s_2) \| =$

$= \| (R, s_1, 0) - (R, s_2, 0) \| = \| (0, s_1 - s_2, 0) \|$

$= |s_1 - s_2|$ s È L'ASCISSA CURVILINEA

L'ASCISSA CURVILINEA

DATA UNA CURVA REGOLARE $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t)$, $t \in I$ E FISSATO $t_0 \in I$, RESTA DEFINITA

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \bar{\varepsilon}'(t) \| \, dt$$ ASCISSA CURVILINEA

CON LE PROPRIETÀ CHE: 0) $s(t_0) = 0$

1) PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE, ESSENDO $\| \bar{\varepsilon}'(t) \|$ FUNZIONE CONTINUA DI t SI TROVA

$$\frac{ds}{dt} = \| \bar{\varepsilon}'(t) \| > 0$$

2) PER IL TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA SI PUÒ ANCHE SCRIVERE $t = t(s)$ E RISULTA $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\| \bar{\varepsilon}'(t) \|}$

CONSEGUENZA: DA OGNI $f(t)$ DI CLASSE C^1 SI RICAVA $g(s) = f(t(s))$ DI CLASSE C^1.

3) LA LUNGHEZZA DELL'ARCO DI CURVA TRA t_1 E t_2 È DATA DA

$$\int_{t_1}^{t_2} \| \bar{\varepsilon}'(t) \| \, dt = s(t_2) - s(t_1)$$

SE $t_1 < t_2$.

4) CONSIDERIAMO $\bar{\varepsilon}(t(s))$ E CALCOLIAMO

$$\frac{d}{ds} \bar{\varepsilon}(t(s)) = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} =$$

$$= \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \cdot \frac{1}{\| \bar{\varepsilon}'(t) \|}$$ QUINDI

$$\left\| \frac{d}{ds} \bar{\varepsilon}(t(s)) \right\| = 1.$$