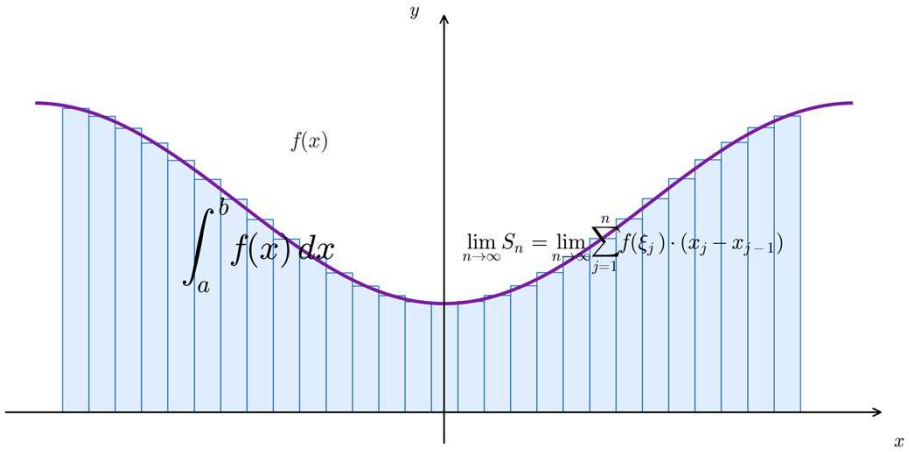
Calcolo integrale

Funzione integrale, Integrale indefinito, Integrale definito



Calcolo integrale

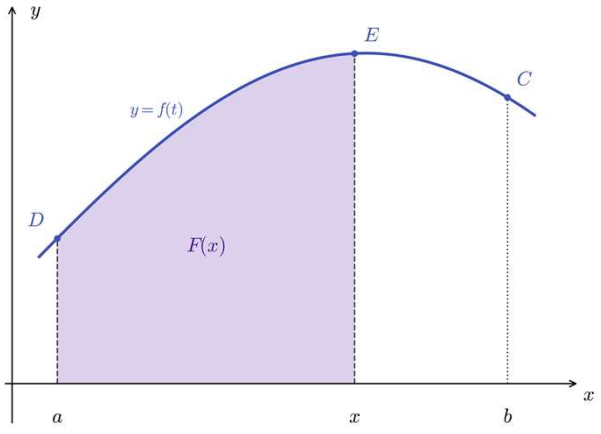
Definizione e significato geometrico della funzione integrale

Definizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,b]$.

Fissato $x \in [a,b]$, si definisce **funzione integrale** di f (con punto iniziale a) la funzione $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita dall'integrale definito:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Calcolo integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$. Allora la funzione integrale:

$$F(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$$

è derivabile in tutto $[a,b]$ (ed è di classe $C^1([a,b])$), e la sua derivata prima coincide con la funzione integranda:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Calcolo integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale - Dimostrazione

Scriviamo il rapporto incrementale della funzione $F(x)$ per un incremento $h \neq 0$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f\,(t)\,dt - \int_a^x f\,(t)\,dt\right]$$

Sfruttando la proprietà additiva dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione:

$$\int_a^{x+h} f\,(t)\,dt = \int_a^x f\,(t)\,dt + \int_x^{x+h} f\,(t)\,dt$$

Sostituendo e semplificando, si ottiene:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f\,(t)\,dt$$

Calcolo integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale - Dimostrazione

Per il **Teorema della Media Integrale**, poiché f è continua nell'intervallo tra x e $x+h$, esiste un punto c_h *compreso tra* x e $x+h$ tale che:

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)\cdot h$$

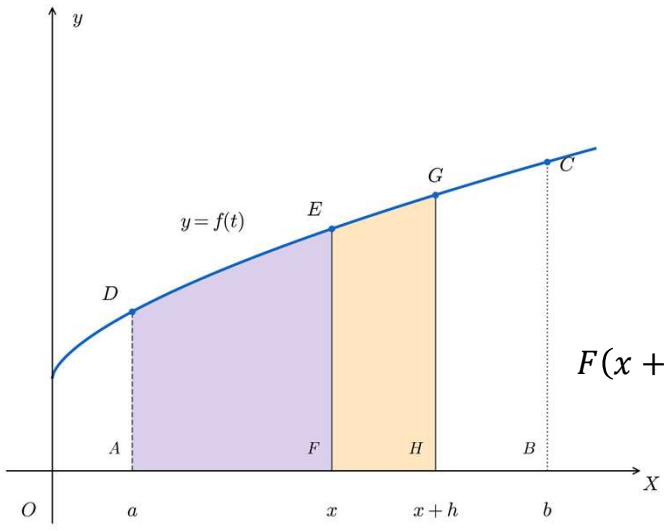
Sostituendo nel rapporto incrementale: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\cdot f(c_h)\cdot h = f(c_h)$

Passando al limite per $h \to 0$: $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$

(Poiché per $h \to 0$ anche $c_h \to x$ e f è continua).

Calcolo integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale - Dimostrazione



$F(x) = Area\ sotto\ la\ curva\ DE$

$F(x+h) = Area\ sotto\ la\ curva\ DG$

$F(x+h) - F(x) = Area\ sotto\ la\ curva\ EG$

Calcolo integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale - Osservazioni

L'ipotesi di continuità per f è fondamentale per la derivabilità di F.
Infatti se f è solo integrabile **non** si può affermare che F è derivabile.

Esempio

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow F(x) = |x|$$

- Per $x > 0$: $F(x) = \int_0^x 1 \; dt = x = |x|$
- Per $x < 0$: $F(x) = \int_0^x (-1) \; dt = -x = |x|$

$f(x)$ è integrabile ma non è continua, $F(x)$ è continua ma non è derivabile in $x = 0$.

Calcolo integrale

Primitive di una funzione - Definizione

Una funzione $F(x)$, derivabile in $[a, b]$, si chiama **PRIMITIVA** di $f(x)$ se:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Esempio

Una primitiva di $f(x) = \cos x$ è la funzione $F(x) = \sin x$.

Se $f(x) = x^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$

Tuttavia anche $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ è una primitiva di $f(x) = x^2$

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ lo è anche $F(x) + c$, infatti:

$$(\boldsymbol{F(x) + c})' = \boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

Calcolo integrale

Integrale Indefinito - Definizione

La famiglia di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ è detta **INTEGRALE INDEFINITO** e si indica:

$$\int f(x)\, dx$$

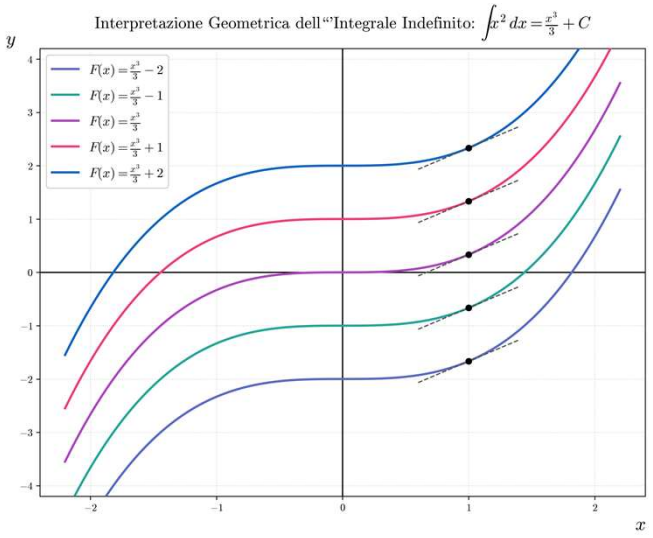
quindi:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

Calcolo integrale

Integrale Indefinito – Interpretazione geometrica

Famiglia di tutte le primitive di una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$



Calcolo integrale

Corollario del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a, b]$ e $F(x)$una sua primitiva. Allora:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Esempi

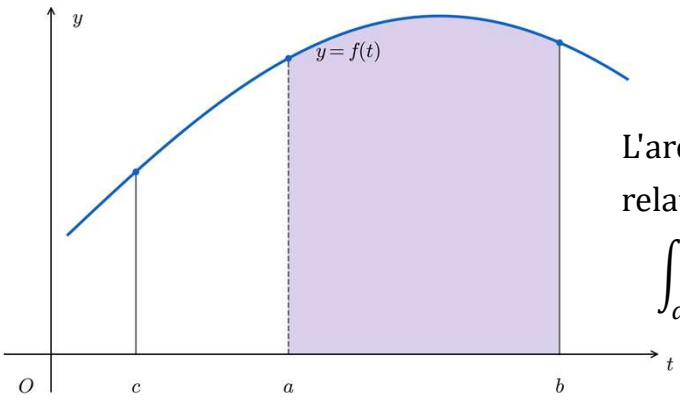
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\int_1^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Calcolo integrale

Corollario del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale - Dimostrazione

Consideriamo una funzione $f(t)$ definita in un intervallo $[c, b]$.



L'area del sottografico della funzione f relativa all'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$\int_a^b f\,(t)\,dt = \int_c^b f\,(t)\,dt - \int_c^a f\,(t)\,dt$$

Calcolo integrale

Corollario del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale - Dimostrazione

La funzione integrale in un generico punto x è data dalla relazione:

$$F(x) = \int_c^x f\,(t)\,dt$$

si ha che $F(a) = \int_c^a f\,(t)\,dt$ e $F(b) = \int_c^b f\,(t)\,dt$

che sono rispettivamente la funzione integrale in a e in b.

Sostituendo si ottiene:

$$\int_a^b f\,(t)\,dt = \int_c^b f\,(t)\,dt - \int_c^a f\,(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ossia, l'**integrale definito** è dato dalla differenza della **funzione integrale** calcolata negli estremi b e $a \Longrightarrow F(b) - F(a)$.

Calcolo integrale

Legame tra Integrale Definito e Indefinito

$\int_a^b f\,(x)\,dx$ è un numero reale

$\int f\,(x)\,dx$ è un insieme di funzioni

Proprietà dell'integrale indefinito

Dalle proprietà delle derivate si ottiene:

$i)$ $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f\,(x)\,dx + \int g\,(x)\,dx$

$ii)$ $\int c\,f(x)\,dx = c\int f\,(x)\,dx, \quad c =$ costante

Calcolo integrale

Tabella degli Integrali Indefiniti Immediati

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \quad (\alpha = -1)$$

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$$

$$\int sen\, x\, dx = -cos\, x + c$$

$$\int cosx\, dx = sen\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \text{tg}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \text{arctg}\, x + c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Sia F una primitiva di f in un intervallo I, ossia:

$$F'(t) = f(t) \quad \forall t \in I$$

Sia $t = g(x)$ una funzione derivabile con derivata continua in $[a, b]$: $g([a, b]) \subset I$.

Dal teorema della derivata di una funzione composta:

$$D\big[F\big(g(x)\big)\big] = F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Integrando membro a membro otteniamo:

$$\int D\left[F\big(g(x)\big)\right] = \int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\, dx$$

ossia $\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Consideriamo la funzione:

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx \quad n \neq -1$$

Posto $f(x) = t$ e differenziando $f'(x)\, dx = dt$, sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

Esprimendo questa soluzione nell'incognita x si ottiene:

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Esempi:

$$\int (x^2 - 1)\, x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2 - 1)^3\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^4}{4} + C$$

$$\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\int -\sin x \cos^2 x \, dx = \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} \cdot \ln^2(1+x^2)\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}[\ln(1+x^2)]^2 = \frac{\ln^3(1+x^2)}{6} + c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Consideriamo la funzione:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Posto $f(x) = t$ e differenziando $f'(x)\,dx = dt$, sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c$$

Esprimendo questa soluzione nell'incognita $x$si ottiene:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Esempi:

$$\int \frac{2x}{(x^2-1)}\,dx = \ln|x^2-1| + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\,dx = \ln|\operatorname{arctg} x| + c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Consideriamo la funzione:

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx$$

Posto $f(x) = t$ e differenziando $f'(x)\, dx = dt$, sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\int e^t\ dt = e^t + c$$

Esprimendo questa soluzione nell'incognita x si ottiene:

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

In modo analogo si ottengono le primitive dei seguenti integrali:

$$\int sin\big(f(x)\big) \cdot f'(x), dx = -cos\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \cos\big(f(x)\big) \cdot f'(x), dx = sen\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + \big(f(x)\big)^2}\, dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \big(f(x)\big)^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} f(x)) + C$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Esempi:

$$\int 3\cos(2x+5)\,dx = \frac{3}{2}\int 2\cos(2x+5)\,dx = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x+5)+c$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\cos(\sqrt{x})+C$$

$$\int \frac{3x}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(1+x^2)+c$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)+c$$

Calcolo integrale

Integrali riconducibili a integrali immediati

Esempi:

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x-1+1}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$$
$$= 2\arcsen(x+1)+C$$

$$\int \frac{3}{4x^2-4x+2}\,dx = \int \frac{3}{4x^2-4x+1+1}\,dx = \int \frac{3}{1+(2x-1)^2}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x-1)+C$$

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili con derivata continua, si ha

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$f(x) =$ fattore finito;

$g'(x)\,dx =$ fattore differenziale

È l'inverso della regola di derivazione del prodotto e permette di ricondurre un integrale complesso $\int f(x)g'(x)dx$ a uno più semplice $\int f'(x)g(x)dx$

N. B. L'ipotesi che le derivate di f e g siano continue assicura che gli integrali siano ben definiti, ossia che si possano calcolare gli integrali.

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per parti - Dimostrazione

Consideriamo la formula di derivazione di un prodotto

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando membro a membro si ha

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

A primo membro abbiamo l'integrale della derivata di $f \cdot g$, ossia due operazioni inverse per cui otteniamo

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Dalla quale si ricava la tesi ossia

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per parti - Esercizi

Utilizzando il metodo di integrazione per parti calcolare

$$\int x\cos x\ dx = x\sin x - \int \sin x\ dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$\int \ln x\ dx = \int 1\cdot \ln x\ dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\ dx = x\ln x - x + c$$

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\ dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\ dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x) + c$$

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per sostituzione

Sia $f(x)$ una funzione continua e $g(t)$ una funzione derivabile con derivata continua. Posto $x = g(t)$, si ha:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f\left(g(t)\right) g'(t)\,dt$$

L'integrale nella variabile x, valutato ponendo $x = g(t)$, coincide con l'integrale nella variabile t ottenuto sostituendo x con $g(t)$ e il differenziale dx con $g'(t)\,dt$.

L'invertibilità di $g(t)$ non serve per applicare la formula, ma dipende dal tipo di integrale:
Negli **integrali indefiniti** è indispensabile per poter tornare alla variabile originale x tramite l'inversa $t = g^{-1}(x)$.
Negli **integrali definiti** non è necessaria, perché il risultato è un numero che si calcola direttamente cambiando gli estremi dell'integrale nella variabile t.

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per sostituzione - Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che, posto $x = g(t)$, vale l'uguaglianza:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt$$

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, ossia tale che $F'(x) = f(x)$. Per definizione di integrale indefinito si ha:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Valutando questa espressione in $x = g(t)$, il primo membro della formula assume la forma:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = F\big(g(t)\big) + c$$

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per sostituzione - Dimostrazione

Derivando la funzione composta $F\big(g(t)\big)$ rispetto alla variabile t e poiché $F' = f$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}F\big(g(t)\big) = F'\big(g(t)\big)\cdot g'(t) = f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)$$

L'uguaglianza precedente mostra che $F\big(g(t)\big)$ è una primitiva della funzione $f\big(g(t)\big)\,g'(t)$ rispetto alla variabile t, ovvero:

$$\int f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt = F\big(g(t)\big) + c$$

Confrontando questo risultato con il primo passaggio, si ottiene infine la tesi:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt$$

Calcolo integrale

Metodo di integrazione per sostituzione - Esercizi

Utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione calcolare

$\int e^{\sqrt{x}} dx$ *con la sostituzione* $x = t^2, \quad t \geq 0$

$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$ *con la sostituzione* $x = sen\, t$