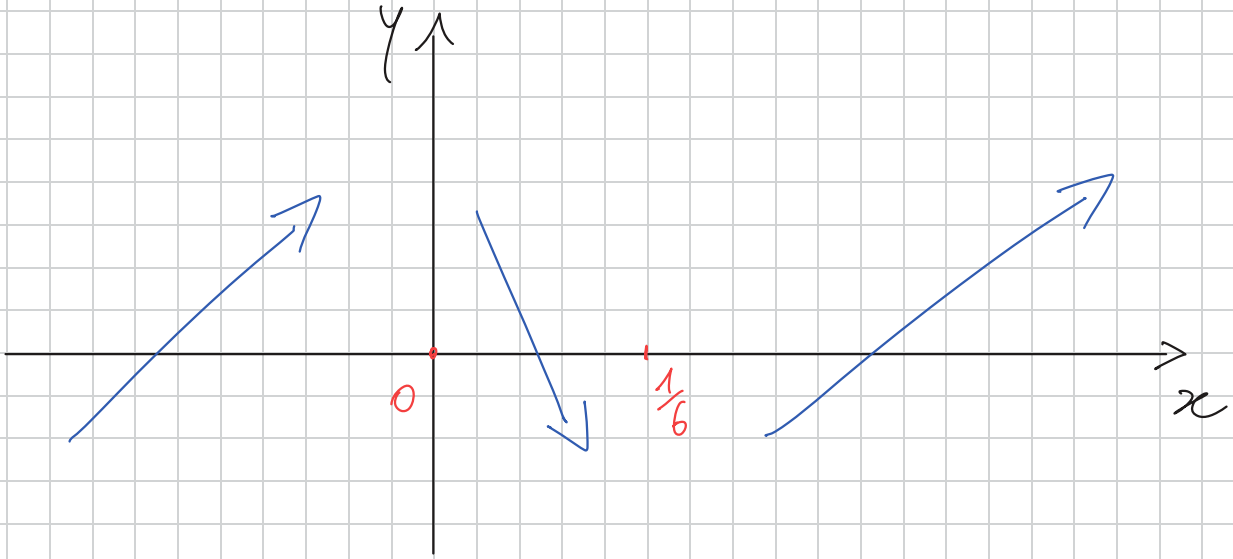
LEZIONE 19 – 11 – 2026



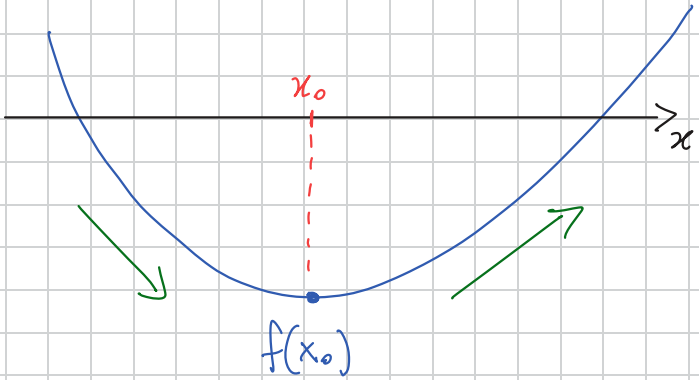
DEF: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che

a. il punto $x_0 \in D$ è di MINIMO RELATIVO se $\exists I_\delta(x_0)$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$

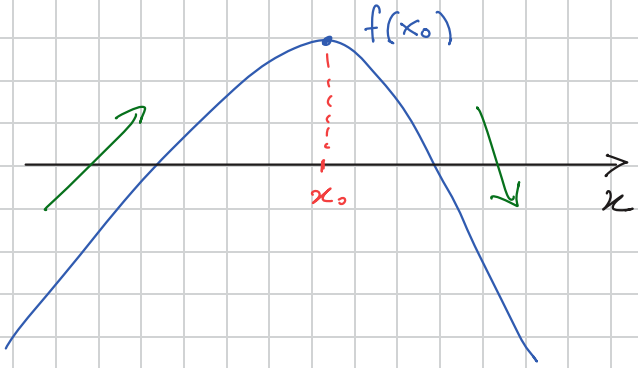
b. il punto $x_0 \in D$ è di MASSIMO RELATIVO se $\exists I_\delta(x_0)$ tale che $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$.

In particolare, se la funzione è derivabile (e quindi possiamo usare il segno della derivata per capirne il tono) ci aspettiamo che

a. se x_0 è un punto di minimo relativo, la f prima decresce e poi dopo x_0 cresce



b. se x_0 è un punto di massimo relativo, la f prima cresce e poi dopo x_0 decresce



Nota sulla terminologia:

di solito si specifica «PUNTO DI MINIMO RELATIVO» riferendosi alle x (ascisse), mentre si dice solamente «MINIMO RELATIVO» riferendosi alle $f(x)$ (ordinate). Stesso dicasi per MASSIMO RELATIVO.

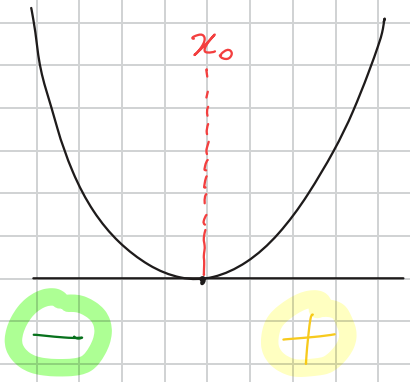
Nei punti di massimo e minimo relativo la derivata cambia segno, quindi in loro corrispondenza deve valere zero, come dice il seguente:

TEOREMA DI FERMAT:

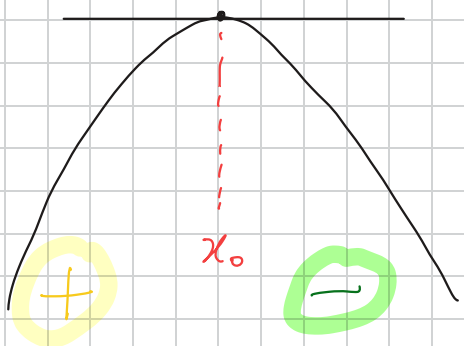
Se f è una funzione derivabile e $x_0 \in D$ è un punto di MAX/MIN relativo $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

(x_0 è detto essere un PUNTO STAZIONARIO o CRITICO).

Osservazione: si possono verificare 4 casi di punti stazionari ($f'(x_0) = 0$):

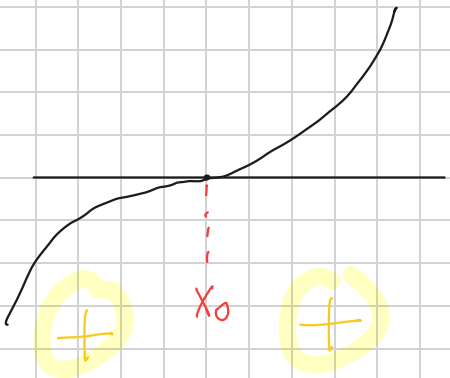
1) 

La funzione prima di x_0 decresce (derivata negativa) e dopo x_0 cresce (derivata positiva) $\Longrightarrow$ PUNTO DI MIN RELATIVO

2) 

La funzione prima di x_0 cresce (derivata positiva) e dopo x_0 decresce (derivata negativa) $\Longrightarrow$ PUNTO DI MAX RELATIVO

③

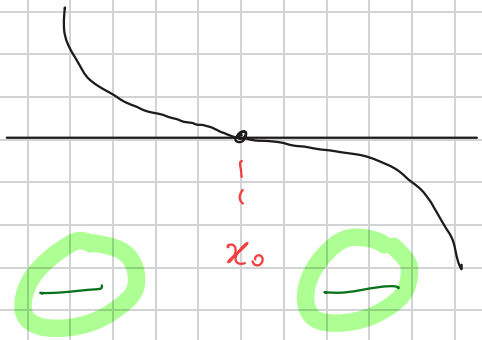


La funzione cresce prima di x_0 (derivata positiva) e cresce anche dopo x_0 (derivata positiva) $\Rightarrow$

PUNTO DI FLESSO

A TANGENTE ORIZZONTALE

④



La funzione decresce prima di x_0 (derivata negativa) e decresce anche dopo x_0 (derivata negativa) $\Rightarrow$

PUNTO DI FLESSO

A TANGENTE ORIZZONTALE

Esempi: studiare il tono delle seguenti funzioni e determinarne eventuali punti di MAX–MIN–FLESSO ORIZZONTALE

1) $y = x^3 - 4x$ (Esercizio)

2) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 1$ → funzione polinomiale, pertanto dominio $D = \mathbb{R}$, continua e derivabile.

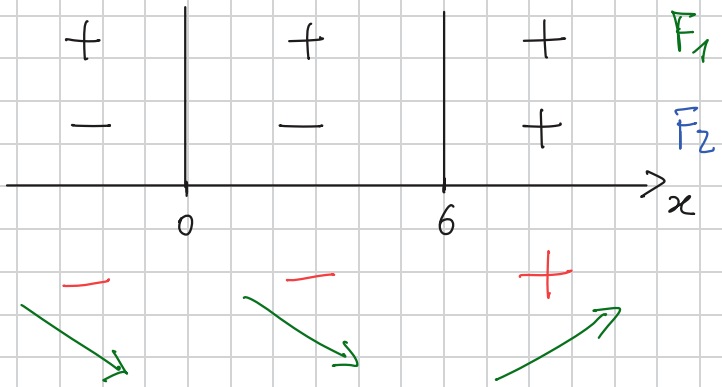
$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 0 = x^3 - 6x^2$$

Studiamo il segno di y':

$y' \geq 0 \rightarrow x^3 - 6x^2 \geq 0 \; ; \quad x^2(x-6) \geq 0$

$F_1: x^2 \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, inoltre $x^2 = 0$ se $x = 0$

$F_2: x - 6 \geq 0 \rightarrow x \geq 6$



Abbiamo ottenuto che y decresce in $(-\infty, 0]$ e anche in $[0, 6]$, invece cresce in $[6, +\infty)$. Quindi i punti stazionari $x=0$ e $x=6$ sono:

- $x=0$ → punto di flesso a tangente orizzontale;
- $x=6$ → punto di minimo relativo.

3) $y = \dfrac{2x^3}{x+2}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$$y' = \frac{(2\cdot 3x^2)(x+2) - (2x^3)(1)}{(x+2)^2} = \frac{6x^3 + 12x^2 - 2x^3}{(x+2)^2} = \frac{4x^3 + 12x^2}{(x+2)^2}$$

Studiamo il segno di y', quindi

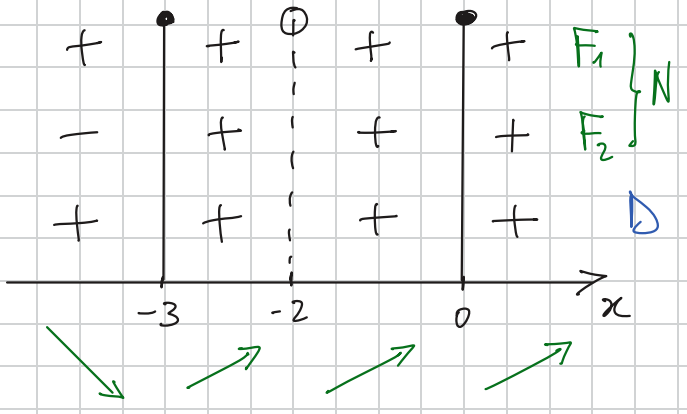
$$y' \geq 0 \longrightarrow \frac{4x^3 + 12x^2}{(x+2)^2} \geq 0$$

N: $4x^3 + 12x^2 \geq 0$;

$$4x^2(x+3) \geq 0 \begin{cases} \rightarrow F_1: 4x^2 \geq 0 \rightarrow \forall x \in D, \text{ inoltre } 4x^2 = 0 \text{ quando } x = 0 \\ \rightarrow F_2: x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \end{cases}$$

D: $(x+2)^2 > 0 \longrightarrow \forall x \in D$

non si mette "$\geq$" perché il denominatore non può essere uguale a zero!



Abbiamo ottenuto che y decresce in $(-\infty, -3]$, poi cresce in $[-3, -2)$, $(-2, 0]$ e $[0, +\infty)$, quindi poiché i punti stazionari sono $X = -3$ e $X = 0$ si ha:

- $X = -3 \longrightarrow$ punto di minimo relativo
- $X = 0 \longrightarrow$ punto di flesso a tangente orizzontale

Nota: $X = -2$ NON È un punto di flesso perché non appartiene al dominio D!

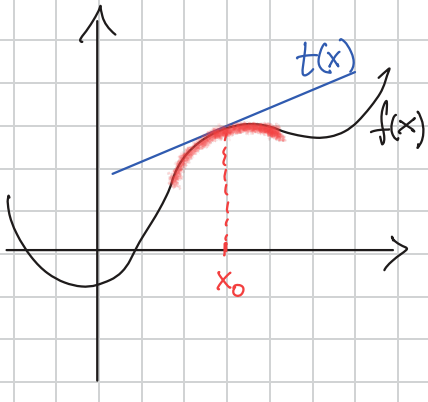
Derivata seconda e concavità:

Data una funzione $f: D \to \mathbb{R}$, abbiamo visto che la (funzione) derivata f' dà informazioni sul tono della f originale, in particolare quando $f' \geq 0$ allora f è crescente mentre quando $f' \leq 0$ allora f è decrescente. Inoltre i punti di max/min relativo si trovano tra i punti stazionari (quelli dove $f' = 0$).

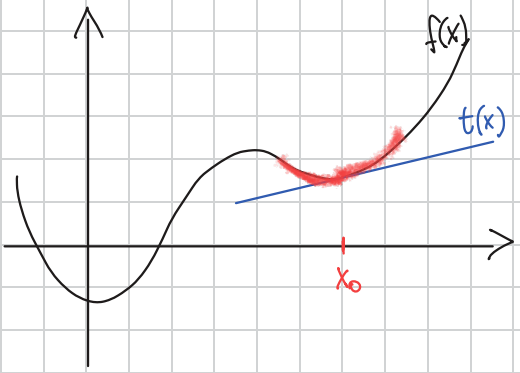
Se della funzione f' calcoliamo ulteriormente la derivata essa verrà chiamata DERIVATA SECONDA e denotata con f''.
Vediamo quali informazioni dà f'' sul grafico di f:

DEF: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ derivabile, $x_0 \in D$ e sia $t(x)$ la retta tangente ad $f(x)$ in x_0.

i) Si dice che f in x_0 ha CONCAVITÀ VERSO IL BASSO se $\exists I_\delta(x_0)$ tale che $f(x) < t(x)$ $\forall x \in I_\delta(x_0)$, ossia intorno a x_0

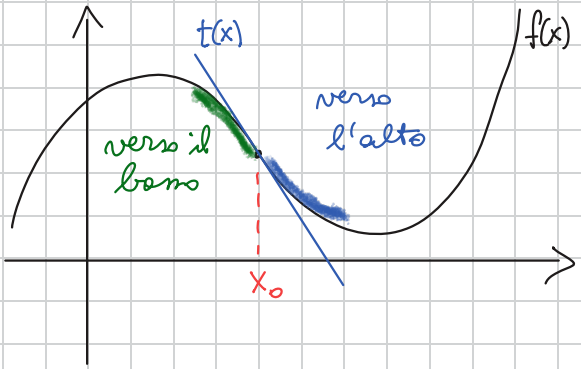


il grafico di f sta <u>SOTTO</u> la retta tangente.



ii) Si dice che f in x_0 ha CONCAVITÁ VERSO L'ALTO se $\exists I_\delta(x_0)$ tale che $f(x) > t(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$, ossia intorno a x_0 il grafico di f sta <u>SOPRA</u> la retta tangente.

iii) Si dice che f presenti un FLESSO in x_0 se in tale punto il grafico di f cambia concavità.



TEOREMA:

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e sia $x_0 \in D$. Allora:

1) f ha concavità verso il basso in x_0 se $f''(x_0) < 0$
2) f ha concavità verso l'alto in x_0 se $f''(x_0) > 0$

<u>Notazione:</u> ⌒ ⌣ per concavità verso l'alto e il basso.

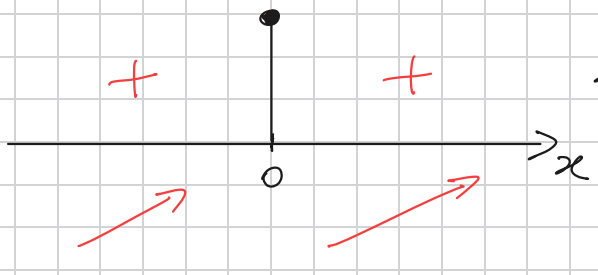
Esempi: calcolare i punti di MAX/MIN relativo e studiare la concavità.

1) $y = 2x^3 - 5$

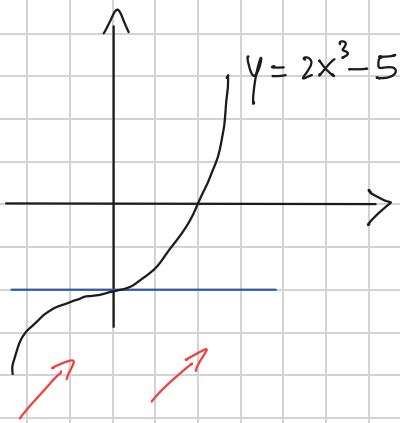
$y' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$

Punti stazionari: $y' = 0 \to 6x^2 = 0 \to x = 0$

Studiamo il segno di y': $y' \geq 0 \to 6x^2 \geq 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$



→ quindi y è sempre crescente e ha un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 0$.

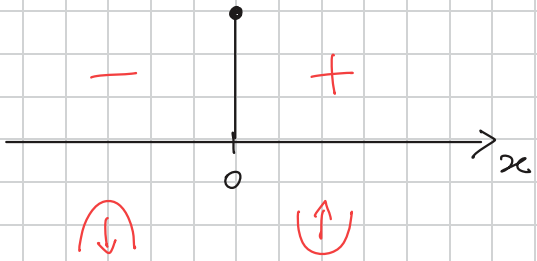


Calcoliamo la derivata seconda:

$y'' = 6 \cdot 2 \cdot X = 12X$

Il segno mi dice la concavità:

$y'' \geq 0 \longrightarrow 12X \geq 0 \longrightarrow X \geq 0$



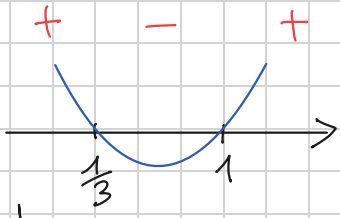
2) $y = x^3 - 2x^2 + X$

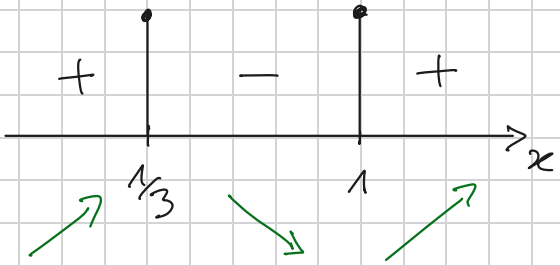
$y' = 3X^2 - 2 \cdot 2X + 1 = 3X^2 - 4X + 1$

Punti stazionari: $y' = 0 \iff 3x^2 - 4X + 1 = 0 \iff X = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2 \cdot 3}$

$= \frac{4 \pm 2}{6} \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$ ossia due punti stazionari, $X = 1$, $X = \frac{1}{3}$

Segno di y': $y' \geq 0 \iff 3x^2 - 4X + 1 \geq 0$



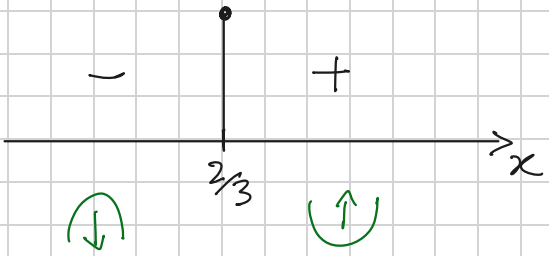


$X = \frac{1}{3}$ punto di MAX RELATIVO

$X = 1$ punto di MIN RELATIVO

Concavità: $y'' = 3 \cdot 2X - 4 \cdot 1 = 6X - 4$

$y'' \geq 0 \iff 6X - 4 \geq 0 \iff 6X \geq 4 \iff X \geq \frac{2}{3}$



$\rightsquigarrow X = \frac{2}{3}$ punto di FLESSO

//

Studio di funzione.

Tutto ciò che studieremo per rappresentare il grafico di una funzione f è:

1) Dominio
2) Intersezioni con gli assi
3) Segno di f
4) Limiti agli estremi
5) Max/Min relativi e tono ← NEW !!!
6) Concavità e flessi ← NEW !!!

Esempio (Prova d'esame 14/02/24)

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{e^x}$$

Dominio: funzione fratta $\longrightarrow$ $e^x \neq 0$ $\longrightarrow$ poiché le funzioni esponenziali sono sempre strettamente positive, $e^x \neq 0$ per qualunque valore $x \in \mathbb{R}$, pertanto non devo escludere alcun valore e $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi:

asse x $(y=0)$ $\longrightarrow$ $0 = \frac{x^2+3x+2}{e^x}$ $\longrightarrow$ $x^2+3x+2=0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

ossia i punti $A=(-2,0)$, $B=(-1,0)$

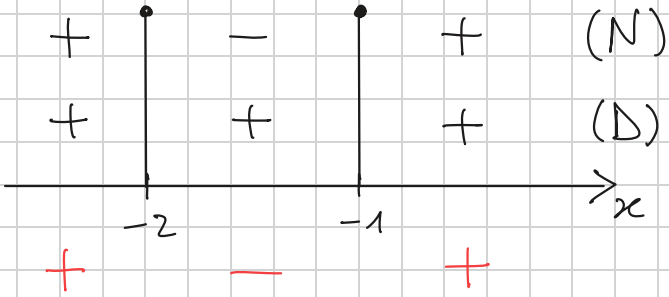
asse y $(x=0)$ $\rightsquigarrow$ $y = \frac{0^2+3\cdot 0+2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2$

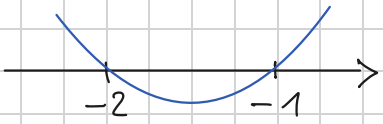
ossia il punto $C=(0,2)$

Segno di f: $f(x) \geq 0 \longrightarrow \frac{x^2+3x+2}{e^x} \geq 0$

N: $x^2+3x+2 \geq 0$ → parabola, metodo grafico

D: $e^x > 0$ → $\forall x \in \mathbb{R}$





Limiti agli estremi del dominio $D = (-\infty, +\infty)$:

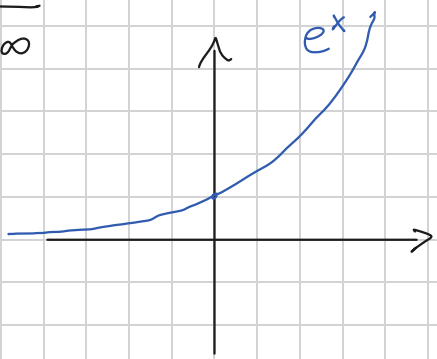
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+2}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{e^x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

($+\infty - \infty$; $\frac{3}{x} \to 0$, $\frac{2}{x^2} \to 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+2}{e^x} = \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Uso il teorema di de l'Hospital:

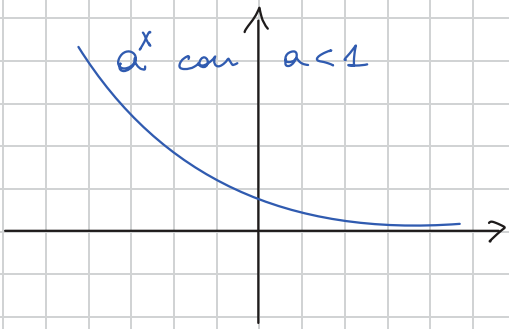
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$



Uso di nuovo il teorema:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$e^{-\infty} = \left(\frac{1}{e}\right)^{+\infty} \to 0^+$



→ $y = 0$ è ASINTOTO ORIZZONTALE

Max/Min relativi:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)e^x - (x^2+3x+2)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\left[(2x+3)-(x^2+3x+2)\right]}{e^{2x}}$$

$$= \frac{2x+3-x^2-3x-2}{e^x} = \frac{-x^2-x+1}{e^x}$$

Punti stazionari ($f' = 0$):

$$\frac{-x^2-x+1}{e^x}=0 \quad \rightarrow \quad -x^2-x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{+1\pm\sqrt{1+4}}{-2}=$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{-2} \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{-2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{-2} \end{cases}$$

Segno di f': $\quad f' \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{-x^2-x+1}{e^x} \geq 0$

Esercizio: concludere lo studio del segno di f' e dire qual è la natura dei punti stazionari. Domani concluderemo con la derivata seconda e il grafico.