LEZIONE 18-11-2026

Svolgimento esercizi:

1) classificare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -3x = -3 \cdot 2 = -6$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 1 = 2 - 1 = 1$

Poiché i due limiti sono finiti e diversi $\longrightarrow$ I SPECIE.

ii) $y = \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad$ (in $x = 1$)

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Poiché almeno uno dei due limiti è ∞ $\longrightarrow$ II SPECIE.

iii) $y = \dfrac{1-x^2}{x-1}$ $\qquad$ (in $x = 1$)

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} -(1+x) = -2$

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} -(1+x) = -2$

Poiché i due limiti sono finiti e coincidono, ma $f(1)$ non è definito $\longrightarrow$ III SPECIE.

2) Calcolare la derivata della funzione $y = mx + q$.

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale in x e $x+h$: $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h)+q-[mx+q]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{mx+mh+q-mx-q}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = \boxed{m}$$

Come ci aspettavamo, la pendenza della tangente ad una retta coincide con la pendenza della retta stessa.

3) Derivare:

i) $y = e^{x^2}$

ii) $y = \text{sen}(x^2)$

iii) $y = \dfrac{2}{(x^3+2)^2}$

iv) $y = \ln(x^4 - 3x^2)$

v) $y = \sqrt{x}$

vi) $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

vii) $y = \text{sen}^2 x - \text{tg}(x^2-1)$

(Suggerimento vii: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$)

i) $y' = e^{x^2} \cdot 2x$

ii) $y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

iii) $y' = \dfrac{0 - 2\cdot 2(x^3+2)\cdot 3x^2}{(x^3+2)^4}$

iv) $y' = \dfrac{1}{x^4-3x^2} \cdot (4x^3 - 3\cdot 2x)$

v) $y = \sqrt{x}$ è la stessa cosa di $y = x^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

vi) $y' = \dfrac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \dfrac{-1(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x}{1-x} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1-x)(1+x)}$

vii) $y' = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - \dfrac{\cos^2(x^2-1) + \text{sen}^2(x^2-1)}{\cos^2(x^2-1)} \cdot 2x$

Applicazioni delle derivate e punti di non derivabilità

Le derivate possono essere utilizzate per risolvere alcuni

Limiti che presentano F.I.:

TEOREMA: (di De l'Hospital)

Siano f, g due funzioni continue in un punto x_0 e supponiamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Allora, se

i) f, g sono derivabili in un intorno di x_0;

ii) $g'(x) \neq 0$ in un tale intorno;

iii) esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vale che $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esso vale anche se $x \to \infty$.

Esempi:

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x-2} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}\cdot(1+0)}{1-0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

(Sapevamo già che questo fosse il risultato per la gerarchia degli infiniti)

2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-4}{\ln x} = \dfrac{+\infty}{\ln(+\infty)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ F. I.

$\downarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4\cdot 2x - 0}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{\frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 8x : \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 8x \cdot x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 8x^2 = +\infty$$

Attenzione! Nel teorema di de l'Hospital, il limite originale viene sostituito con uno dove ho le derivate sia del numeratore che del denominatore

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ciò NON É la stessa cosa di derivare la frazione poiché

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'\cdot g - g'\cdot f}{g^2(x)}$$

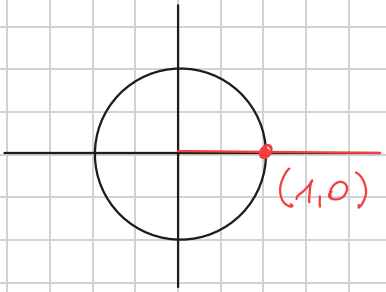
3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^3-9x+6}{5x^5+2x^4-33x+26} = \dfrac{3\cdot 1 - 9\cdot 1 + 6}{5\cdot 1 + 2\cdot 1 - 33\cdot 1 + 26} = \dfrac{0}{0}$ F.I.

$\downarrow$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3\cdot 3x^2 - 9 + 0}{5\cdot 5x^4 + 2\cdot 4x^3 - 33 + 0} = \lim_{x\to 1} \frac{9x^2-9}{25x^4+8x^3-33} = \frac{9-9}{25+8-33} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{9\cdot 2x - 0}{25\cdot 4x^3 + 8\cdot 3x^2 - 0} = \lim_{x\to 1} \frac{18x}{100x^3 + 24x^2} = \frac{18}{100+24} = \boxed{\frac{9}{62}}$$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0}$ F. I.



$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \ln x}{7x - 2} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F. I.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{7} = \frac{3 + 0^+}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

Esercizi:

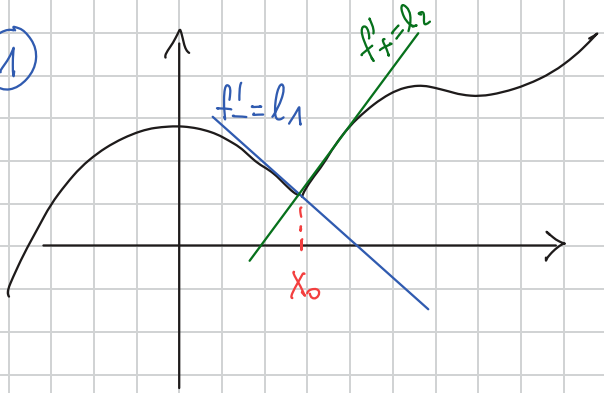
6) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x}$

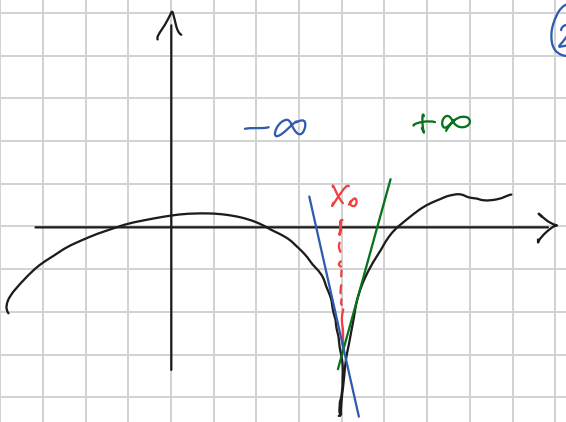
7) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

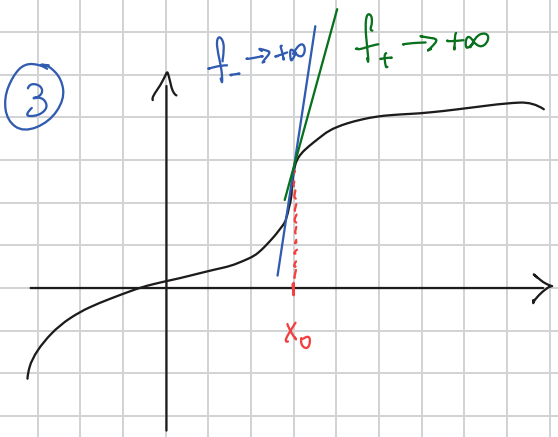
8) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^3}$

9) $\lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x^2-9)}$

Analogamente ai punti di discontinuità, possiamo classificare i punti in cui non esiste $f'(x)$. Ricordiamo che $f'(x)$ esiste se e solo se $f'_+(x)$ ed $f'_-(x)$ esistono e coincidono. Se pensiamo ad $f'(x)$ come una FUNZIONE, i punti di NON DERIVABILITÁ di f sono quelli di discontinuitá di f'.







1) PUNTI ANGOLOSI: si hanno quando $f'_-(x_0) = l_1$ $f'_+(x_0) = l_2$ e $l_1 \neq l_2$ (anche uno dei due ∞)

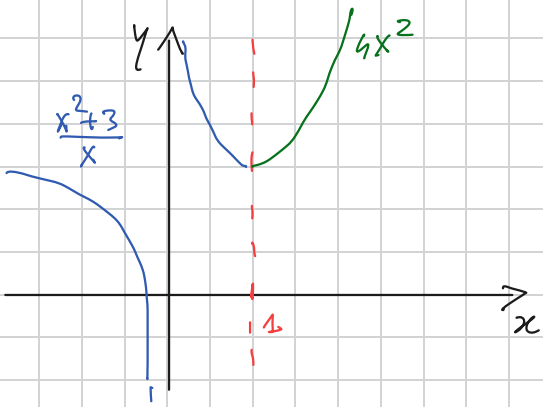
2) CUSPIDI: si hanno quando $f'_-(x_0) = -\infty$ e $f'_+(x_0) = +\infty$ (o con i segni invertiti)

3) FLESSI A TANGENTE VERTICALE: si hanno quando $f'_-(x_0) = +\infty = f'_+(x_0)$ oppure $f'_-(x_0) = -\infty = f'_+(x_0)$.

Note: funzioni definite per casi

Si tratta di funzioni che hanno una diversa espressione in base ad una suddivisione del dominio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x} & \text{se } x \leq 1 \\ 4x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Un esercizio tipico in questo contesto è verificare la continuità e derivabilità nel punto in cui cambia caso. In questo esempio $x = 1$.

CONTINUITÀ:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+3}{x} = \frac{1+3}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 4x^2 = 4 \cdot 1 = 4$$

e inoltre $f(1) = \frac{1^2+3}{1} = 4 \implies f$ è continua in $x=1$.

DERIVABILITÀ:

$$f'_-(1) = \left. \frac{2x \cdot x - (x^2+3) \cdot 1}{x^2} \right|_{x=1} = \left. \frac{2x^2 - x^2 - 3}{x^2} \right|_{x=1}$$

↑ da calcolare in $x=1$

$$= -2$$

$$f'_+(1) = \left. 4 \cdot 2x \right|_{x=1} = \left. 8x \right|_{x=1} = 8$$

$\implies x=1$ è un punto di non derivabilità perché $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, inoltre è di tipo "punto angoloso".

TEOREMA: Una funzione derivabile è anche continua.

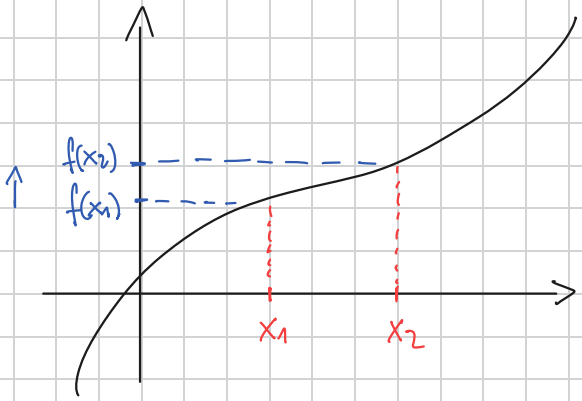
DEF: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Diremo che f è CRESCENTE se

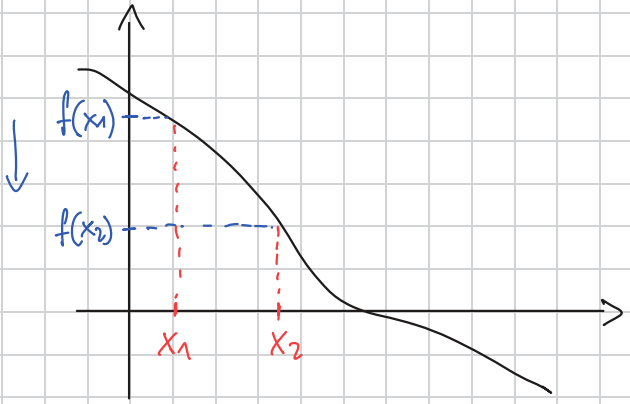
$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in D$$

Diremo che f è DECRESCENTE se

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in D$$



Funzione crescente



Funzione decrescente

Esempi: $y = 3x$ è crescente, $y = 2 - x$ è decrescente.

Nota: «crescente» e «decrescente» di una funzione vengono talvolta chiamate TONO. Una funzione che rimane sempre crescente (o decrescente) si chiama MONOTÒNA.

TEOREMA: (Caratterizzazione del tono)

Sia f una funzione derivabile su un intervallo $[a,b]$. Allora:

1) f è crescente in $[a,b] \iff f' \geq 0$ in $[a,b]$
2) f è decrescente in $[a,b] \iff f' \leq 0$ in $[a,b]$.

Esempio: stabiliamo il tono di $y = 4x^3 - x^2 + 1$. Per il teorema precedente basta studiare il segno della derivata

$$y' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot x + 0 = 12x^2 - 2x$$

Dobbiamo studiare il segno di $y' = 12x^2 - 2x$: cerchiamo i valori per cui $y' \geq 0$, ossia $12x^2 - 2x \geq 0$

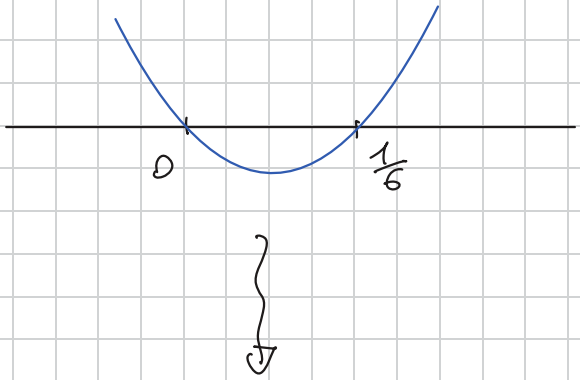
↳ positiva

Metodo grafico per la parabola:

i) concavità: verso l'alto in quanto $a = 12 > 0$;

ii) intersezioni: soluzioni di $12x^2 - 2x = 0$, ottenute come

$$\frac{+2 \pm \sqrt{4 - 0}}{2 \cdot 12} = \frac{2 \pm 2}{24} \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$



$12x^2 - 2x \geq 0$ quando

$x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{6}$

