Modulo 5: Numeri complessi

Francesco Cannas Aghedu

Matematica 1 - A.A. 2026/2027

Unità immaginaria

Problema: «Qual è il numero reale x il cui quadrato è uguale a -1?».

Il problema non ammette soluzione, perché non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato fornisca un numero negativo.

Introdurremo ora un nuovo insieme numerico, più ampio di $\mathbb{R}$, in cui invece il problema proposto avrà soluzione. Questo nuovo insieme, che indicheremo con la lettera $\mathbb{C}$, è l'insieme dei **numeri complessi**.

Definizione

*Chiamiamo **unità immaginaria** quel numero, non appartenente a $\mathbb{R}$, che elevato al quadrato dà -1; indichiamo l'unità immaginaria con i:*

$$i^2 := -1$$

Ad esempio, con l'uso della notazione informale $i = \sqrt{-1}$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i$$

Potenze di i

Calcoliamo alcune potenze con esponente naturale di i:

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i; \quad \dots$$

Possiamo notare che le potenze si ripetono nell'ordine: 1, i, -1, $-i$, cioè sono cicliche di periodo 4. Le potenze con esponente pari valgono 1 oppure -1, quelle con esponente dispari valgono i oppure $-i$.

Per calcolare per esempio i^{14}, tenendo conto delle proprietà delle potenze che già conosciamo, possiamo scrivere:

$$i^{14} = i^{4 \cdot 3 + 2} = (i^4)^3 \cdot i^2 = 1^3 \cdot (-1) = -1.$$

Numeri complessi

Definizione

Si dice ***numero complesso*** *ogni scrittura algebrica della forma* $a + ib$*, con* a, b *numeri reali e* i *unità immaginaria. L'insieme dei numeri complessi si denota con* $\mathbb{C}$ *e si ha:*

$$\mathbb{C} = \{a + ib \text{ tali che } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}.$$

Dato il numero complesso in **forma algebrica** $z = a + ib$, i numeri reali a e b si dicono rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e si scrive: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Esempi

- $z = 1 - 2i$ è un numero complesso con parte reale 1 e parte immaginaria -2.
- $z = -\sqrt{2} + 0i = -\sqrt{2}$ è un numero complesso con parte reale $-\sqrt{2}$ e parte immaginaria 0.
- $z = 0 + 4i = 4i$ è un numero complesso con parte reale 0 e parte immaginaria 4.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Di solito, i numeri complessi si indicano con le ultime lettere dell'alfabeto: $z, w, \ldots$.

I numeri della forma $a + 0i$ sono, di fatto, numeri reali, per cui

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Una differenza sostanziale tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ è quella dell'*ordinamento*. Nell'insieme dei numeri complessi non si definisce una relazione d'ordine, cioè non è possibile stabilire se un numero complesso è maggiore o minore di un altro.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ si dicono **uguali** se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Opposto, coniugato e modulo di un numero complesso

Dato il numero $z = a + ib$ si chiama

- **Opposto** di z il numero complesso

$$-z = -a - ib$$

- **Coniugato** di z il numero complesso

$$\bar{z} = a - ib$$

- **Modulo** di z il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ad esempio, dato il numero complesso $z = 3 + 4i$ si ha

$$-z = -3 - 4i, \qquad \bar{z} = 3 - 4i \qquad |z| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

Soluzioni complesse di una equazione

Esempi

- L'equazione $z^2 + 2z + 2 = 0$ dal momento che $\Delta = -4 < 0$ non ammette soluzioni reali ma ammette 2 soluzioni complesse coniugate:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

- L'equazione $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$, posto $t = z^2$ diventa $t^2 + 5t + 4 = 0$, da cui otteniamo le due soluzioni reali per t: $t_1 = -1$ e $t_2 = -4$.
  1. Per $t_1 = -1$: $z^2 = -1 \implies z = \pm\sqrt{-1} \implies z = \pm i$
  2. Per $t_2 = -4$: $z^2 = -4 \implies z = \pm\sqrt{-4} \implies z = \pm 2i$

  In conclusione, l'equazione ammette quattro soluzioni in $\mathbb{C}$, a coppie complesse coniugate:

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 2i, \quad z_4 = -2i$$

Esempi

Esempi

Risolvere le seguenti equazioni algebriche nel campo complesso:

- $z^2 + 2z + 5 = 0$
- $-4z^2 + 4z - 3 = 0$
- $z^2 + iz + 2 = 0$
- $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$
- $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$
- $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

Operazioni tra numeri complessi

Nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si definiscono inoltre le seguenti operazioni:

- **Somma di due numeri complessi** $z = a + ib$ e $w = c + id$ è il numero complesso

$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$

- **Prodotto di due numeri complessi** $z = a + ib$ e $w = c + id$ è il numero complesso

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Ad esempio, dati i numeri complessi $z = 2 + 5i$ e $w = -3 + 7i$ la loro somma è il numero complesso

$$z + w = (2 + 5i) + (-3 + 7i) = (2 - 3) + (5 + 7)i = -1 + 12i$$

e il loro prodotto è il numero complesso

$$z \cdot w = (2 + 5i) \cdot (-3 + 7i) = -6 + 14i - 15i + 35i^2 = -6 - i + 35(-1) = -41 - i$$

Operazioni tra numeri complessi

- **Differenza di due numeri complessi** $z = a + ib$ e $w = c + id$ è il numero complesso

$$z - w = (a - c) + i(b - d).$$

- **Quoziente di due numeri complessi** $z = a + ib$ e $w = c + id$, $(w \neq 0)$ è il numero complesso

$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ad esempio, dati i numeri complessi $z = -1 + 2i$ e $w = 1 + i$ la loro differenza è il numero complesso

$$z - w = (-1 + 2i) - (1 + i) = (-1 - 1) + (2 - 1)i = -2 + i$$

e il loro quoziente è il numero complesso

$$\frac{z}{w} = \frac{-1 + 2i}{1 + i} = \frac{(-1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 + i + 2i - 2i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Esempi

- Vogliamo scrivere la forma algebrica, cioè la forma $z = a + ib$ del numero complesso

$$z = \frac{2+5i}{1-3i}.$$

Per fare questo moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1+3i$ (il complesso coniugato di $1-3i$) e otteniamo:

$$z = \frac{2+5i}{1-3i} = \frac{(2+5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = -\frac{13}{10} + \frac{11}{10}i.$$

- Scriviamo in forma algebrica il numero complesso

$$i(5+6i)^2 - \frac{4}{1-i}.$$

Si ha:

$$i(25+60i+36i^2) - \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -60 - 11i - 2(1+i) = -62 - 13i$$

Esempi

Calcolare il valore delle seguenti espressioni esprimendo il risultato in forma algebrica:

- $\dfrac{1-2i}{2+i}+\dfrac{2-3i}{5}$
- $(3+2i)(3-2i)+(2-4i)3i-(6+2i)^2$
- $(2+3i)(2-3i)-(3+i)^2+i\overline{(3+2i)}-6(i+2)$
- $\dfrac{9+7i}{2+i}+\dfrac{-2i^4+3i^3-2i^2+3i}{3-2i}$

Piano di Argand–Gauss

È noto che i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea.

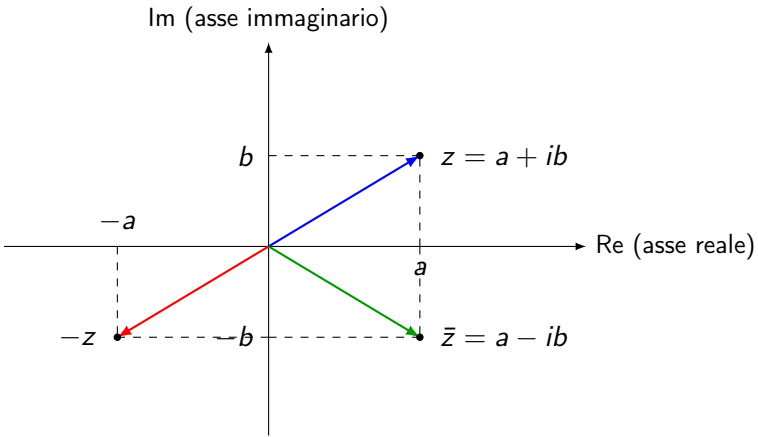
Analogamente, associando al numero della forma $z = a + ib$ il punto di coordinate (a, b), si realizza una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano cartesiano (detto in questo contesto **piano di Argand–Gauss**). In tale corrispondenza: $a = \mathrm{Re}(z)$ è l'ascissa di (a, b) e $b = \mathrm{Im}(z)$ è l'ordinata di (a, b).

I numeri della forma $a + 0i$, (che sono di fatto numeri reali) corrispondono ai punti dell'asse delle ascisse che verrà perciò detto **asse reale**, evidenziando che si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I numeri della forma $0 + ib = ib$, (detti **immaginari puri**) corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate che verrà perciò detto **asse immaginario**.

L'opposto di z, ossia il numero $-z = -a - ib$ corrisponde al punto $(-a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'origine.

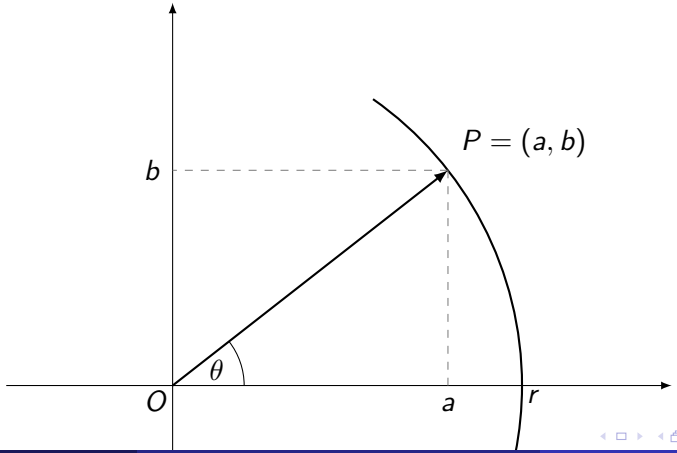
Rappresentazione nel piano di Argand–Gauss



Il modulo di z rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine ed è quindi la lunghezza del vettore associato a z.

Forma trigonometrica di un numero complesso

Osserviamo che ogni punto $P = (a, b)$, diverso dall'origine, nel piano di Argand–Gauss può essere individuato anche assegnando la sua distanza r dall'origine O e l'angolo θ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP.



Forma trigonometrica di un numero complesso

Per definizione di coseno e seno si ha:

$$a = r\cos\theta; \qquad b = r\sin\theta. \tag{1}$$

Si ottiene quindi: $z = a + ib = (r\cos\theta) + i(r\sin\theta)$.

Definizione

La rappresentazione

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

si chiama ***forma trigonometrica*** *del numero complesso $z = a + ib$, dove r è il modulo di z. L'angolo θ è detto* ***argomento*** *di z, $\theta = Arg(z)$ (l'argomento non è unico).*

Dato un numero complesso in forma trigonometrica (ossia noti r e θ), la sua forma algebrica si ricava mediante le formule (1); viceversa dato un numero complesso in forma algebrica si ricavano r e θ osservando che:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

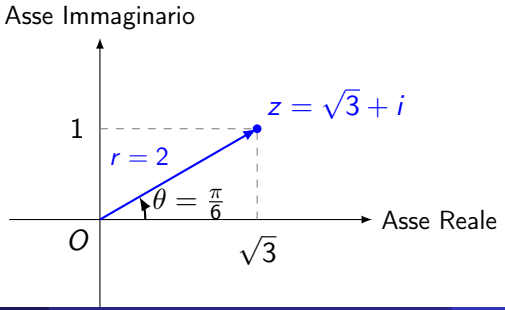
Esempio

Determiniamo la forma trigonometrica del numero complesso $z = \sqrt{3} + i$. Si ha

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{2},$$

e quindi $\theta = \pi/6$. La forma trigonometrica cercata è

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$



Forma esponenziale di un numero complesso

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ vale la cosiddetta **formula di Eulero** che è una relazione fondamentale che lega la funzione esponenziale alle funzioni trigonometriche:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Dal momento che ogni numero complesso non nullo può essere scritto nella forma $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, possiamo anche dire che:

$$z = re^{i\theta}. \tag{2}$$

La (2) è detta **forma esponenziale** del numero complesso z. Dalla (2) segue immediatamente che:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

nota come **formula di De Moivre**, utile per calcolare le potenze di un numero complesso.

Esempio

Scriviamo la forma esponenziale del numero complesso $z = 1 - i$ e la forma trigonometrica di z^4. Si ha

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

mentre

$$\cos\theta = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Segue che $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e la forma esponenziale di z è data da

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

Per la formula di De Moivre si ha:

$$z^4 = 4(\cos(7\pi) + i\sin(7\pi)) = -4.$$