Applicazioni lineari

In questo capitolo vogliamo studiare le applicazioni tra due spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$. Siamo in particolare interessati a quelle applicazioni che, in qualche modo, tengano conto della struttura di spazio vettoriale e che la conservino.

Definizione 1.11.4. *Siano $(V, +, \cdot)$ e $(W, \boxplus, \boxdot)$ due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Una applicazione $f : V \longrightarrow W$ è detta* applicazione lineare *se per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha*

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = f(\mathbf{v}) \boxplus f(\mathbf{v}') \tag{1.41}$$

$$f(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \boxdot f(\mathbf{v}). \tag{1.42}$$

Un po' di nomenclatura: una applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ è detta

- *epimorfismo* se è suriettiva;
- *monomorfismo* se è iniettiva;
- *isomorfismo* se è bigettiva;
- *endomorfismo* se $V = W$;
- *automorfismo* se è un isomorfismo e $V = W$.

Infine, denoteremo con il simbolo $\mathrm{Lin}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V in W, con $End(V)$ l'insieme degli endomorfismi di V e con $Aut(V)$ l'insieme degli automorfismi di V.

Osservazione 1.11.5. *Le condizioni* (1.42)-(1.42) *che definiscono una applicazione lineare sono equivalenti alla condizione seguente (verificare!):*

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boxdot f(\mathbf{v}_i)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Prima di studiare le proprietà delle applicazioni lineari vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.11.6. *Dati gli spazi vettoriali* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, le applicazioni* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definite da* $f(x, y, z) = (2x + y - 3z, 0)$ *e* $g(x, y, z) = (x + y - 10z, -x - z)$ *sono applicazioni lineari.*

Esempio 1.11.7. *La funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = -2x$ *è lineare.*

Esempio 1.11.8. *La funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = 2x + 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *non è lineare.*

Esempio 1.11.9. *Siano* $C^1(a, b), C^0(a, b)$ *rispettivamente lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili con derivata continua sull'intervallo* (a, b) *e quello delle funzioni continue su* (a, b)*, muniti dell'usuale somma e prodotto per uno scalare. Consideriamo l'applicazione*

$$D : C^1(a, b) \longrightarrow C^0(a, b)$$

che a ciascuna $f \in C^1(a, b)$ *associa* $D(f) = f'$*, dove* f' *è la derivata della funzione* f*. Per via delle proprietà della derivata della somma di due funzioni e del prodotto di una costante per una funzione, studiate nel corso di Analisi Matematica, possiamo concludere che* D *è una applicazione lineare.*

Vediamo alcune immediate conseguenze della definizione di applicazione lineare.

Proposizione 1.11.10. *Se* $f : V \to W$ *è lineare allora si ha:*

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$*,*
2. $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$ *per ogni* $\mathbf{v} \in V$*.*

Dimostrazione. Invero

$$f(\mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V) + f(\mathbf{0}_V) \,,$$

per cui

$$f(\mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V) + f(\mathbf{0}_V)$$

e quindi sommando l'opposto di $f(\mathbf{0}_V)$ ad ambo i membri si ottiene $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Sia ora $\mathbf{v} \in V$. Per quanto appena dimostrato e per la linearità, abbiamo

$$\mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V) = f(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) + f(-\mathbf{v})$$

e quindi $f(-\mathbf{v})$ è l'opposto di $f(\mathbf{v})$. □

Osservazione 1.11.11. *Viene lasciato come utile esercizio per il lettore dimostrare che la composizione di applicazioni lineari è ancora una applicazione lineare.*

Ad un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ restano associati due importanti insiemi dello spazio di V e di W.

Definizione 1.11.12. *Data una applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, il* nucleo *di f è l'insieme*

$$\ker(f) := \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = 0\}$$

*e l'*immagine *di f l'insieme*

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \text{ tale che } \mathbf{w} = f(\mathbf{v})\}.$$

Proposizione 1.11.13. *Una applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ è suriettiva se e solo se* $\mathrm{Im}(f) = W$ *ed è iniettiva se e solo se* $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. La suriettività di f, per definizione, equivale a dire che $f(V) = W$, cioè $\mathrm{Im}(f) = W$.

Supponiamo ora che f sia iniettiva e dimostriamo che $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Sia $\mathbf{v} \in \ker(f)$. Poichè si ha $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$, per l'iniettività di f si ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e quindi $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Viceversa, sia $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ tali che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}')$. Per la linearità di f si ha $f(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ e quindi $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ e allora f è iniettiva. □

In effetti $\ker(f) \subseteq V$ e $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$ non sono semplici sottoinsiemi di V e W, ma qualcosa di più:

Proposizione 1.11.14. *Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora* $\ker(f)$ *è un sottospazio vettoriale di V e* $\mathrm{Im}(f)$ *è un sottospazio vettoriale di W.*

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \ker(f)$ e per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, per la linearità di f, si ha $f(\lambda\mathbf{v}+\lambda'\mathbf{v}') = \lambda f(\mathbf{v})+\lambda' f(\mathbf{v}') = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Quindi $\lambda\mathbf{v}+\lambda'\mathbf{v}' \in \ker(f)$. Questo prova che $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V. Ora siano $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathrm{Im}(f)$. Per definizione di immagine, $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ e $\mathbf{w}' = f(\mathbf{v}')$, per qualche $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. Allora si ha $\lambda\mathbf{w} + \lambda'\mathbf{w}' = \lambda f(\mathbf{v}) + \lambda' f(\mathbf{v}') = f(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}')$, da cui $\lambda\mathbf{w} + \lambda'\mathbf{w}' \in W$. □

Il precedente risultato può essere visto come un caso particolare del seguente risultato, la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Proposizione 1.11.15. *Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora si ha:*

1. *Se $V' \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale allora $f(V')$ è un sottospazio vettoriale di W.*
2. *Se $W' \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale allora $f^{-1}(W')$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Cerchiamo ora di capire come si comportano le applicazioni lineari rispetto ai sistemi di generatori e alla lineare indipendenza.

Proposizione 1.11.16. *Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare.*

1. *Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ è un sistema di generatori per V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m)\}$ è un sistema di generatori per $\mathrm{Im}(f)$.*
2. *Se f è iniettiva e i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ sono linearmente indipendenti, allora i vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k) \in W$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. 1. Sia $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(f)$. Allora esiste $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Poiché V è generato da $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Allora per la linearità di f si ottiene

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(\mathbf{v}_i)$$

e quindi $\mathrm{Im}(f)$ è generato da $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m)\}$.
2. Consideriamo una qualsiasi combinazione lineare dei vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)$ tale che

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}.$$

Per la linearità di f si ha

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}$$

cioè

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \in \ker(f).$$

Essendo f iniettiva si ha $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ e quindi si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

e dunque $\lambda_i = 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, dato che per ipotesi i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti. Questo implica che anche i vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)$ sono linearmente indipendenti. □

Osservazione 1.11.17. *Nella seconda parte della proposizione precedente l'potesi di iniettività è essenziale. Per esempio, l'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, definita da* $f(x, y, z) = (x - y, z)$*, manda i vettori linearmente indipendenti* $\mathbf{v} = (1, 0, 0), \mathbf{v}' = (0, 1, 0)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *nei vettori linearmente dipendenti* $f(\mathbf{v}) = (1, 0), f(\mathbf{v}') = (-1, 0)$ *di* $\mathbb{R}^2$*. Si noti che* f *non è iniettiva, in quanto, per esempio,* $f(1, 1, 0) = (0, 0) = f(0, 0, 0)$*.*

Come conseguenza immediata si ha il seguente e che le applicazioni lineari iniettive mandano basi di V in basi della loro immagine:

Corollario 1.11.18. *Sia* $f : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare iniettiva. Se* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base di* V *allora* $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ *è una base di* $\mathrm{Im}(f)$*.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, i vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti e generano $\mathrm{Im}(f)$ e quindi costituiscono una base di $\mathrm{Im}(f)$. □

Si osservi che data una applicazione lineare $f : V \to W$, se $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di V e $\mathbf{v} \in V$, per calcolare $f(\mathbf{v})$ è sufficiente conoscere le immagini di ciascun vettore della base e le componenti di $\mathbf{v}$. Infatti, se $(x_1, \ldots, x_n)$ sono le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto a B, allora per la linearità di f si ha $f(\mathbf{v}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n)$. Questa osservazione suggerisce il fatto che una applicazione lineare sia completamente determinata da $f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$. Ebbene, abbiamo il seguente risultato.

Teorema 1.11.19 (Teorema fondamentale delle applicazioni lineari)**.** *Siano* V *e* W *due spazi vettoriali. Sia* $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *una base di* V *e* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$*. Esiste un'unica applicazione lineare* $f : V \longrightarrow W$ *tale che* $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, n\}$*.*

Dimostrazione. Definiamo f come segue. Dato un vettore $\mathbf{v} \in V$ poniamo

$$f(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{w}_i,$$

dove gli scalari $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sono le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto a $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Dalla definizione segue immediatamente che $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Verifichiamo che f è lineare. Siano $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{v}' = x'_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + x'_n\mathbf{e}'_n$. Allora

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}') &= f\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i + \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \lambda' x'_i)\mathbf{e}_i\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \lambda' x'_i)\mathbf{w}_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i + \lambda'\sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{w}_i \\ &= \lambda f(\mathbf{v}) + \lambda' f(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Ora dimostriamo l'unicità di f. Supponiamo che esista un'altra applicazione lineare, chiamiamola $g : V \longrightarrow W$, tale che $g(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, e mostriamo che $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$. Infatti preso un arbitrario vettore $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ si ha

$$g(\mathbf{v}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) \stackrel{\text{linearità di } g}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i g(\mathbf{e}_i) \stackrel{g(\mathbf{e}_i)=\mathbf{w}_i}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i = f(\mathbf{v}).$$

Quindi $g = f$. □

Il prossimo teorema mostra che la dimensione del nucleo, dell'immagine e del dominio di una applicazione lineare sono fortemente legate tra loro.

Teorema 1.11.20 (Equazione dimensionale per le applicazioni lineari)**.** *Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e supponiamo che* $\dim(V) = n$*. Allora si ha*

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f).$$

Dimostrazione. Essendo V di dimensione finita, lo è anche il nucleo di f in quanto sottospazio di V. Sia quindi $h \leq n$ la dimensione di $\ker(f)$ e $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_h\}$ una sua base. Essendo i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_h$ linearmente indipendenti, per il Teorema di completamento ad una base, esistono $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-h} \in V$ tali che $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_h, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-h}\}$ è base di V. Vogliamo dimostrare che

$$B' = \{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_{n-h})\}$$

è una base di $\mathrm{Im}(f)$. Dato che B è un sistema di generatori per V, per la Proposizione 1.11.16, $f(B) = \{\mathbf{0}\} \cup B'$ è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}(f)$. Inoltre $\mathbf{0} \in L(B')$ e quindi anche B' è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}(f)$. Rimane dunque da dimostrare che l'insieme B' è linearmente indipendente. Siano quindi $a_1, \ldots, a_{n-h} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n-h} a_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}.$$

Dalla linearità di f segue che

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-h} a_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}.$$

Questo implica che $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n-h}\mathbf{v}_{n-h} \in \ker(f) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_h)$ e quindi esistono $b_1, \ldots, b_h \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n-h}\mathbf{v}_{n-h} = b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_h\mathbf{e}_h$$

cioè

$$-b_1\mathbf{e}_1 - \cdots - b_h\mathbf{e}_h + a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n-h}\mathbf{v}_{n-h} = \mathbf{0},$$

da cui, per la lineare indipendenza di B, si ha che $a_1 = \cdots = a_{n-h} = 0$. Pertanto $B' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-h}\}$ è base di $\mathrm{Im}(f)$ e quindi $\dim(\mathrm{Im}f) = n - h$. Allora

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}f) = h + (n - h) = n = \dim(V).$$

□

Osservazione 1.11.21. *La dimensione di* $\mathrm{Im}f$ *è spesso chiamata* rango *di* f*. La ragione di questo nome sarà chiara tra poco.*

Enunciamo alcune conseguenze immediate e utili del Teorema 1.11.20. La verifica viene lasciata al lettore per esercizio.

Corollario 1.11.22. *Sia* $f : V \longrightarrow W$ *una applicazione lineare, con* V *finitamente generato. Allora si ha:*

1. f *è iniettiva* $\iff \dim(\ker f) = 0 \iff \dim(\mathrm{Im}f) = \dim(V)$*;*
2. f *è suriettiva* $\iff \dim(\mathrm{Im}f) = \dim(W)$*;*
3. f *è un isomorfismo* $\iff \dim(\mathrm{Im}f) = \dim(W) = \dim(V)$*;*

4. se $\dim(V) = \dim(W)$*,* f *è biettiva* $\iff$ f *è iniettiva* $\iff$ f *è suriettiva*

Una applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ biettiva viene chiamata *isomorfismo* tra V e W. Viene lasciato al lettore come utile esercizio il compito di verificare che se f è un isomorfismo tra V e W, allora anche la sua applicazione inversa $f^{-1} : W \longrightarrow V$ è biettiva.

Definizione 1.11.23. *Due spazi vettoriali* V *e* W *si dicono* isomorfi *se esiste un isomorfismo tra di essi.*

Vediamo ora come la dimensione di uno spazio vettoriale sia uno strumento - in Matematica si direbbe un *invariante* - per distinguere tra loro due spazi vettoriali, o in altre parole per capire se due spazi vettoriali sono o no isomorfi tra loro.

Teorema 1.11.24. *Due spazi vettoriali* V, W *di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Per il Corollario 1.11.22, se V e W sono isomorfi allora hanno la stessa dimensione. Viceversa, se hanno la stessa dimensione n, siano $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ basi di V e W rispettivamente. Per il Teorema 1.11.19 esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ricordiamo che f è definita nel modo seguente: per ogni $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in V$,

$$f(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}'_n.$$

Verifichiamo che f è iniettiva. Sia $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \ker(f)$. Allora $\mathbf{0} = f(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}'_n$ implica, per la lineare indipendenza di $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$, che $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Quindi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. La suriettività segue dal Corollario 1.11.22. □

1.12 Matrice associata ad una applicazione lineare

Data una applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tra due spazi vettoriali di dimensione finita n ed m rispettivamente, scelta una base per V e una per W, è possibile associare ad f una matrice nel modo seguente.

Siano $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ basi di V e W rispettivamente. Il vettore $f(\mathbf{e}_j) \in W$ si può esprimere in maniera unica come combinazione lineare degli elementi della base B' e quindi esistono unici $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{e}'_1 + a_{2j}\mathbf{e}'_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{e}'_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_i$$

Si noti che l'indice j in basso nelle componenti sta ad indicare che si tratta delle componenti del vettore $f(\mathbf{e}_j)$.

Al variare di $j \in \{1, \dots, n\}$ e di $i \in \{1, \dots, m\}$ si ottengono in questo modo $m \cdot n$ scalari a_{ij}. Definiamo la *matrice associata a f rispetto alle basi B e B'* proprio la matrice $M_{BB'}(f) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ le cui entrate sono tali scalari a_{ij}:

$$M_{BB'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(\mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_j) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{1.43}$$

In pratica, $M_{BB'}(f)$ è la matrice con $m = \dim(W)$ righe ed $n = \dim(V)$ colonne la cui j-esima colonna è formata dalle componenti del vettore $f(\mathbf{e}_j)$ rispetto alla base B' di W.

La matrice di f rispetto alle basi B e B' permette di trovare le componenti di un qualsiasi vettore $f(\mathbf{v})$ note quelle di $\mathbf{v}$:

Proposizione 1.12.1. *Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ basi ordinate di V e W rispettivamente. Sia $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in V$. Allora $f(\mathbf{v}) = x'_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + x'_m\mathbf{e}'_m$, dove*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = M_{BB'}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Dimostrazione. Sia $M_{BB'}(f) = (a_{ij})$. Si ha quindi $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_i$. Sostituendo questa espressione in quella del vettore $f(\mathbf{v})$ e sfruttando la linearità di f, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x'_i\mathbf{e}'_i = f(\mathbf{v}) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \mathbf{e}'_i \end{aligned}$$

da cui, per l'unicità delle componenti di $f(\mathbf{v})$ rispetto a B', si ricava che la i-esima componente di $f(\mathbf{v})$ vale $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ e questo equivale alla (1.44). □

Osservazione 1.12.2. *Nel calcolo della matrice associata di un un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ di solito si considera la stessa base nel dominio e nel codominio, a meno che non venga esplicitamente detto diversamente.*

Esempio 1.12.3. *Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z)$. Siano $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente e troviamo la matrice $M_{BB'}(f)$ di f rispetto a tali basi.*

Abbiamo $f(\mathbf{e}_1) = (1, 2) = 1\mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2$ e quindi nella prima colonna di $M_{BB'}(f)$ dobbiamo mettere tali componenti. Facciamo lo stesso per gli altri vettori di B e otteniamo $f(\mathbf{e}_2) = (1, 0) = 1\mathbf{e}'_1$, $f(\mathbf{e}_3) = (-1, 1) = -1\mathbf{e}'_1 + 1\mathbf{e}'_2$.

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora la base $B'' = \{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2\}$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2$ di $\mathbb{R}^2$ e calcoliamo la matrice di f rispetto a B e B''. Dobbiamo calcolare le componenti di $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)$ rispetto a B''. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= (1, 2) = \frac{3}{2}\mathbf{e}''_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}''_2, \\ f(\mathbf{e}_2) &= (1, 0) = \frac{1}{2}\mathbf{e}''_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}''_2, \\ f(\mathbf{e}_3) &= (-1, 1) = -\mathbf{e}''_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$M_{BB''}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

L'esempio precedente mostra che se si cambiano le basi, la matrice associata alla stessa applicazione lineare cambia. Vedremo più avanti in che modo avviene questo cambiamento.

Ora consideriamo l'insieme $\mathrm{Lin}(V, W)$ di tutte le applicazioni lineari $f : V \longrightarrow W$ dallo spazio vettoriale V allo spazio vettoriale W. Definiamo su tale insieme una operazione di somma

$$+ : \mathrm{Lin}(V, W) \times \mathrm{Lin}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Lin}(V, W) \tag{1.45}$$

e una operazione di prodotto per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Lin}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Lin}(V, W) \tag{1.46}$$

nel modo seguente. Date $f, g \in \mathrm{Lin}(V, W)$, definiamo la $f + g : V \longrightarrow W$ come l'applicazione tale che $(f + g)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$. Inoltre, dato $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$ definiamo $\lambda \cdot f : V \longrightarrow W$ come l'applicazione tale che $(\lambda \cdot f)(\mathbf{v}) := \lambda f(\mathbf{v})$. Non ci resta che dimostrare ora che le applicazioni appena definite, $f+g$ e $\lambda \cdot f$, sono lineari, cosicchè le operazioni (1.45) e (1.46) risultano ben definite. Mostriamo dunque che per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ si ha $(f + g)(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}') = \lambda(f + g)(\mathbf{v}) + \lambda'(f + g)(\mathbf{v}')$. Infatti per come è definita $f + g$ e per la linearità di f e g, si ha

$$\begin{aligned}(f + g)(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}') &= f(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}') + g(\lambda\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{v}') \\ &= \lambda f(\mathbf{v}) + \lambda' f(\mathbf{v}') + \lambda g(\mathbf{v}) + \lambda' g(\mathbf{v}') \\ &= \lambda \left(f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})\right) + \lambda' \left(f(\mathbf{v}') + g(\mathbf{v}')\right) \\ &= \lambda(f + g)(\mathbf{v}) + \lambda'(f + g)(\mathbf{v}').\end{aligned}$$

In maniera analoga si prova che anche $\lambda \cdot f$ è lineare.

Ebbene, le operazioni (1.45) e (1.46) che abbiamo appena definito rendono $\mathrm{Lin}(V, W)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La verifica di ciò (vale a dire degli 8 assiomi di spazio vettoriale) è lasciata per esercizio al lettore. Si osservi che il vettore nullo di $\mathrm{Lin}(V, W)$ è l'applicazione, detta *applicazione nulla*, $\mathbf{0} : V \longrightarrow W$ che ad ogni vettore di V associa il vettore nullo di W.

Mostriamo ora che nel caso in cui V e W sono finitamente generati allora anche $\mathrm{Lin}(V, W)$ è finitamente generato. Innanzitutto abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 1.12.4. *Siano V e W spazi vettoriali isomorfi. Se V è finitamente generato allora anche W lo è.*

Dimostrazione. Sia $f : V \longrightarrow W$ un isomorfismo tra V e W e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ generatori di V. Allora $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m)$ sono generatori di $\mathrm{Im}(f) = W$. □

Teorema 1.12.5. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Siano inoltre $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ basi di V e W rispettivamente. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned}F : \mathrm{Lin}(V, W) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \\ f &\mapsto M_{BB'}(f)\end{aligned}$$

che ad una applicazione lineare associa la sua matrice rispetto a B e B', è un isomorfismo tra spazi vettoriali. In particolare $\mathrm{Lin}(V, W)$ è finitamente generato e si ha

$$\dim\left(\mathrm{Lin}(V, W)\right) = \dim(V)\dim(W).$$

Dimostrazione. Siano $f, g \in \mathrm{Lin}(V,W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $M_{BB'}(f) = (a_{ij})$ la matrice associata a f, $M_{BB'}(g) = (b_{ij})$ quella associata a g e $M_{BB'}(f+g) = (c_{ij})$ quella associata a $f+g$. Dobbiamo dimostrare che $F(f+g) = F(f)+F(g)$, vale a dire $M_{BB'}(f+g) = M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g)$. Si noti che le entrate di $M_{BB'}(f+g)$ sono definite come segue

$$(f+g)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\mathbf{e}'_i.$$

Sfruttiamo ora la definizione di somma di due applicazioni lineari:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\mathbf{e}'_i &= (f+g)(\mathbf{e}_j)\\ &\overset{\text{def di }+}{=} f(\mathbf{e}_j) + g(\mathbf{e}_j)\\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mathbf{e}'_i\\ &= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}+b_{ij})\mathbf{e}'_i,\end{aligned}$$

da cui si ricava $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ che equivale a $M_{BB'}(f+g) = M_{BB'}(f)+M_{BB'}(g)$. Ora dimostriamo che la matrice associata a λf è proprio $\lambda M_{BB'}(f)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathrm{Lin}(V,W)$. Come prima si ha

$$(\lambda f)(\mathbf{e}_j) = \lambda f(\mathbf{e}_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij})\mathbf{e}'_i$$

e $F(\lambda f) = \lambda F(f)$. Questo mostra la linearità di F. Dimostriamo ora che F è iniettiva. Per far questo basta dimostrare che il suo nucleo è formato dalla sola applicazione nulla. Sia dunque $f \in \ker(F)$. Allora la sua matrice associata rispetto alle basi B e B' è la matrice nulla. Questo significa che $f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}$ per ogni $j \in \{1,\dots,n\}$ e quindi, per il Teorema 1.11.19 necessariamente $f = \mathbf{0}$. Mostriamo infine la suriettività di F. Data $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ basta definire f come l'unica applicazione lineare tale che per ogni $j \in \{1,\dots,n\}$ si abbia $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_j$.

Quindi F è un isomorfismo e, per il Lemma 1.12.4, essendo $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ finitamente generato, anche $\mathrm{Lin}(V,W)$ lo è. Inoltre, per il Teorema 1.11.24, si ha $\dim(\mathrm{Lin}(V,W)) = \dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = m\cdot n = \dim(V)\dim(W)$. □

Il prossimo teorema ci permette di calcolare la matrice associata ad una composizione di applicazioni lineari.

Teorema 1.12.6. *Siano $f : V \to W$ e $g : W \to U$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali finitamente generati e B, B', B'' basi di V ,W, U rispettivamente. Allora si ha*

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g)M_{BB'}(f). \tag{1.47}$$

Dimostrazione. Siano $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ e $B'' = \{\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_p\}$ le basi di V, W e U, rispettivamente. Si ha

$$f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}'_i \quad \text{e} \quad g(\mathbf{e}'_i) = \sum_{k=1}^{p} c_{ki}\mathbf{e}''_k,$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\mathbf{e}_j) &= g(f(\mathbf{e}_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(\mathbf{e}'_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} c_{ki}\mathbf{e}''_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ki}a_{ij} \right) \mathbf{e}''_k\end{aligned}$$

e questo prova la (1.47). □

Corollario 1.12.7. *Se $f : V \longrightarrow W$ è un isomorfismo, B, B' basi ordinate di V e W, rispettivamente. Allora la matrice associata a f rispetto alle basi B e B' è invertibile e si ha*

$$(M_{BB'}(f))^{-1} = M_{B'B}(f^{-1})$$

Dimostrazione. Applicando il teorema precedente a $f \circ f^{-1} = id_V$ si ottiene $I_n = M_{BB}(id_V) = M_{BB}(f \circ f^{-1}) = M_{BB'}(f) \cdot M_{B'B}(f^{-1})$, da cui segue l'asserto. □

Osservazione 1.12.8. *Una matrice è invertibile se e solo se è la matrice associata a un isomorfismo. Infatti, per il corollario precedente, ogni matrice associata ad un isomorfismo è invertibile. Viceversa se A è una matrice invertibile di ordine n, A può essere pensata come matrice associata all'applicazione lineare da $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che*

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che f_A è lineare, invertibile e ha come matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ proprio la matrice A.

Piu in generale, si osservi che ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è del tipo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

per qualche matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Infatti basta prendere $A = M_{BB'}(f)$, con B e B' le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, rispettivamente. In altre parole A è la matrice la cui j-esima colonna è data dalle componenti della m-pla $f(\mathbf{e_j}) = f(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Concludiamo con un'altra conseguenza del Teorema 1.12.6.

Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V è, per definizione, una applicazione lineare $f : V \longrightarrow V$.

Consideriamo ora due basi B e B' di V e cerchiamo di capire la relazione tra le matrici associate a f nelle due basi. Applicando la (1.47) alla applicazione lineare $f = id_V \circ f \circ id_V$ si ottiene

$$M_{B'B'}(f) = M_{BB'}(id_V) \cdot M_{BB}(f) \cdot M_{B'B}(id_V).$$

Si osservi che la matrice associata applicazione identica di V rispetto alle basi B e B' è proprio la matrice di passaggio da B a B'. Quindi la precedente uguaglianza diventa

$$M_{B'B'}(f) = M_{BB'} \cdot M_{BB}(f) \cdot M_{B'B} = P \cdot M_{BB}(f) \cdot P^{-1}, \tag{1.48}$$

dove abbiamo posto $P = M_{BB'}$.

In generale, abbiamo la seguente definizione.

Definizione 1.12.9. *Due matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si dicono* simili *se esiste $P \in GL(n)$ tale che*

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

La (1.48) dunque esprime il fatto che le matrici associate ad un endomorfismo in due basi diverse sono simili.

Proposizione 1.12.10. *Matrici simili hanno stesso determinante e stessa traccia.*

Dimostrazione. Siano A e B matrici simili. Allora esiste se esiste $P \in GL(n)$ tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Da quest'ulima uguaglianza e dal Teorema di Binet

segue che

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P \cdot B \cdot P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B)(\det(P))^{-1} \\ &= \det(B).\end{aligned}$$

Analogamente

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P \cdot B \cdot P^{-1}) = \operatorname{tr}(P \cdot P^{-1} \cdot B) = \operatorname{tr}(I_n \cdot B) = \operatorname{tr}(B).$$

□

1.13 Spazio duale e biduale di uno spazio vettoriale

Abbiamo visto precedentemente che dati due spazi vettoriali V e W di dimensione n ed m rispettivamente, l'insieme $L(V, W)$ di tutte le applicazioni lineari da V in W ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione mn. Nel caso particolare in cui $W = \mathbb{R}$ tale spazio vettoriale si indica con V^* e si chiama *spazio duale* di V. Quindi V^* è lo spazio vettoriale costituito da tutte le applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$. Chiameremo *spazio biduale* di V, e lo indicheremo con V^{**}, lo spazio duale di V^*. Per quanto detto sopra si ha

$$\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$$

e quindi i tre spazi sono isomorfi.

Ora costruiremo degli isomorfismi espliciti tra tali spazi. Data una base $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di V, per ciascun $j = 1, \ldots, n$, per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari, esiste un'unica applicazione lineare

$$\mathbf{e}^j : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}.$$

Per definizione di spazio duale, abbiamo che $\mathbf{e}^j \in V^*$. Si noti che per ogni $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in V$ si ha che

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_i\left(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_i\mathbf{e}_i + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\right) = x_i.$$

Si ottengono in questo modo n elementi di V^*, $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$. Vogliamo dimostrare che $B^* = \{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ è una base di V^*. A tal fine è sufficiente dimostrare che i vettori di B^* sono linearmente indipendenti, visto che $\dim V^* = n$.

Siano quindi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}^i = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{0} : V \to \mathbb{R}$ è l'applicazione nulla. La precedente uguaglianza, in particolare, implica che, per ogni $j = 1, \ldots, n$:

$$0 = \mathbf{0}(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}^i \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j.$$

Quindi $a_j = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ e dunque B^* è una base di V^*.

La base B^* è detta *base duale* di B. A questo punto è facile costruire un isomorfismo tra V e V^*. Infatti basta definire $F : V \longrightarrow V^*$ come l'unica applicazione lineare tale che $F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}^i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Bisogna osservare che per costruire questo isomorfismo è necessario utilizzare una base di V e quindi in questo senso si dice che tale isomorfismo non è *canonico*, ma dipende dalla base scelta. Ora vedremo invece come sia possibile costruire un isomorfismo canonico tra V e il suo biduale.

Innanzitutto, dato un vettore $\mathbf{v} \in V$, sia $f_{\mathbf{v}} : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\mathbf{v}}(\omega) = \omega(\mathbf{v})$$

per ogni $\omega \in V^*$. Quanto fatto ha senso poichè ω è un elemento di V^*, cioè una applicazione lineare $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, e quindi si può applicare ai vettori di V. Inoltre si verifica facilmente che, per ogni $\omega, \eta \in V^*$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_{\mathbf{v}}(\omega + \eta) = f_{\mathbf{v}}(\omega) + f_{\mathbf{v}}(\eta), \quad f_{\mathbf{v}}(\lambda \cdot \omega) = \lambda f_{\mathbf{v}}(\omega)$$

e quindi $f_{\mathbf{v}}$ è lineare, cioè appartiene a V^{**}. Sia ora $F : V \longrightarrow V^{**}$ definita come segue:

$$F(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{v}}.$$

Dimostriamo che F è lineare. Abbiamo $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$. Calcoliamo $f_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$ su un vettore generico $\omega \in V^*$:

$$f_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\omega) = \omega(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}) + \omega(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{u}}(\omega) + f_{\mathbf{v}}(\omega) = (f_{\mathbf{u}} + f_{\mathbf{v}})(\omega)$$

e quindi si ha $f_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = f_{\mathbf{u}} + f_{\mathbf{v}}$, cioè $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$. Analogamente si dimostra che $F(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot F(\mathbf{u})$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e quindi F è lineare.

Per dimostrare che F è un isomorfismo è sufficiente dimostrare che è iniettiva, visto che $\dim V = \dim V^{**}$. Poiché F è lineare, basta dimostrare che il suo nucleo è ridotto al vettore nullo.

Sia quindi $\mathbf{v} \in \ker F$. Si ha allora $F(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ e quindi l'applicazione $f_{\mathbf{v}}$ vale zero su ogni vettore di V. Se per assurdo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, potremmo completarlo ad una base $\{\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di V. Consideriamo allora la sua base duale $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$. Allora

$$0 = f_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}^1) \overset{\text{definizione di } f_{\mathbf{v}_1}}{=} \mathbf{v}^1(\mathbf{v}_1) = 1$$

e questo è assurdo, quindi si deve avere $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = 0$.

Esempio 1.13.1. *Sia $V = \mathbb{R}^3$ munito della base canonica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Definiamo la base duale di B. Per esempio si ha che $\mathbf{e}^1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è definita da $\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_j) = \delta_{1j}$ e quindi*

$$\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_1) = 1, \quad \mathbf{e}^1(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}^1(\mathbf{e}_3) = 0.$$

Per calcolare $\mathbf{e}^1$ su un vettore qualunque di $\mathbb{R}^3$ ci occorrono le componenti del vettore rispetto a B. Sia dunque $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cioè $\mathbf{v} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3$, dato che B è la base canonica. Per la linearità di $\mathbf{e}^1$ otteniamo

$$\mathbf{e}^1(v) = x\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_1) + y\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_2) + z\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_3) = x.$$

Allo stesso modo si ottiene $\mathbf{e}^2(x, y, z) = y$ e $\mathbf{e}^3(x, y, z) = z$.

Sia ora $f \in V^*$. Allora si avrà $f(x, y, z) = ax + by + cz$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$. Poiché $f \in V^*$, allora è combinazione lineare di $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ e si avrà $f = \alpha \cdot \mathbf{e}^1 + \beta \cdot \mathbf{e}^2 + \gamma \cdot \mathbf{e}^3$. Per calcolare i coefficienti della combinazione lineare basterà applicare f ai vettori di B. Applicando f a $\mathbf{e}_1$ si ha

$$f(\mathbf{e}_1) = (\alpha \cdot \mathbf{e}^1 + \beta \cdot \mathbf{e}^2 + \gamma \cdot \mathbf{e}^3)(\mathbf{e}_1) = \alpha.$$

Poichè conosciamo l'espressione di f e di $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, otteniamo $f(\mathbf{e}_1) = a$ e quindi $\alpha = a$. Continuando allo stesso modo si ottiene $\beta = b$ e $\gamma = c$. Ovviamente se si cambia base di $\mathbb{R}^3$ e quindi anche base duale, le componenti rispetto alla nuova base duale non saranno più a, b, c.

1.14 Esercizi conclusivi

1. Dimostrare che $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

2. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

   (i) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, t) = (x - y, y + z, t)$
   (ii) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y,) = (x + 3y, y - 4z - x)$
   (iii) $h = g \circ f$
   (iv) $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad F(z_1, z_2, z_3) = (iz_1 - z_3, 2iz_2)$
   (v) $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad F(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, 2i, z_1)$
   (vi) $G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad G(z) = \overline{z}$

3. Per quelle funzioni dell'esercizio precedente delle quali ci si è accertati essere lineari, si trovi una base del nucleo e una base dell'immagine.

4. Si consideri su $\mathbb{C}^3$ la (usuale) struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ definita nel modo seguente

$$(z_1, z_2, z_3) + (z_1', z_2', z_3') := (z_1 + z_1', z_2 + z_2', z_3 + z_3'),$$
$$\lambda \cdot (z_1, z_2, z_3) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$$

   per ogni $(z_1, z_2, z_3), (z_1', z_2', z_3') \in \mathbb{C}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verificare se la seguente applicazione e lineare

$$f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(z_1, z_2, z_3) = (\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2 + z_3)),$$

   dove $\mathrm{Re}(z)$ indica la parte reale del numero complesso z.

5. Trovare dei sistemi di generatori per le immagini delle applicazioni lineari degli esercizi precedenti

6. Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e V' un sottospazio vettoriale di V. Dimostrare che $f(V')$ è sottospazio vettoriale di W.

7. Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e W' un sottospazio vettoriale di W. Dimostrare che $f^{-1}(W')$ è sottospazio vettoriale di V.

8. Sull'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n ad entrate in $\mathbb{R}$ si definisca la seguente relazione. Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diremo che A è in relazione con B se e solo se A e B sono simili. Dimostare che tale relazione è di equivalenza.

9. Determinare gli eventuali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tale che $f(x, y, z) = (5x + 2y, (k - 2)z, y - x)$, è un isomorfismo. Per tali valori di k trovare l'inversa di f.

10. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$\ker(f) = L(1, 0, 1),$$
$$f(2, -1, 3) = (-2, 0, -1, -3), \quad f(1, 0, 0) = (2, -3, 1, 1).$$

Dire se esiste una base B di $\mathbb{R}^4$ ed una base B' di $\mathbb{R}^3$ tali che la matrice associata ad f rispetto alle basi B e B' sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

come matrice associata rispetto alle basi $B = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, -4, 3)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $B' = \{(1, 1), (0, 2)\}$ di $\mathbb{R}^2$. Trovare inoltre le componenti del vettore $f(1, 2, 3)$ rispetto alla base B'.

12. Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1, 1, 0) = (1, 1)$$
$$f(0, -1, 1) = (1, -2)$$
$$f(-1, 0, 1) = (0, -1).$$

Inoltre

(a) trovare $f(1, 2, 3)$;
(b) per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ trovare $f(x, y, z)$.

13. Verificare che l'applicazione $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associa la sua traccia, è lineare. Inoltre, dopo aver verificato che

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si trovi $M_{BB'}(\mathrm{tr})$, dove B' è la base di $\mathbb{R}$ data da $B' = \{2\}$. Trovare infine la dimensione del nucleo e dell'immagine di tale applicazione.

14. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare. Sia
$$W := \{v \in V : (f \circ f)(v) = v\}\,.$$
Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V. Nel caso particolare in cui $V = \mathbb{R}^3$ e f sia definita da $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, z)$, trovare una base di W.

15. Stabilire se esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 1, 0) = (1, 2, 0)$ e $f(0, 1, 0) = (1, -1, 0)$.