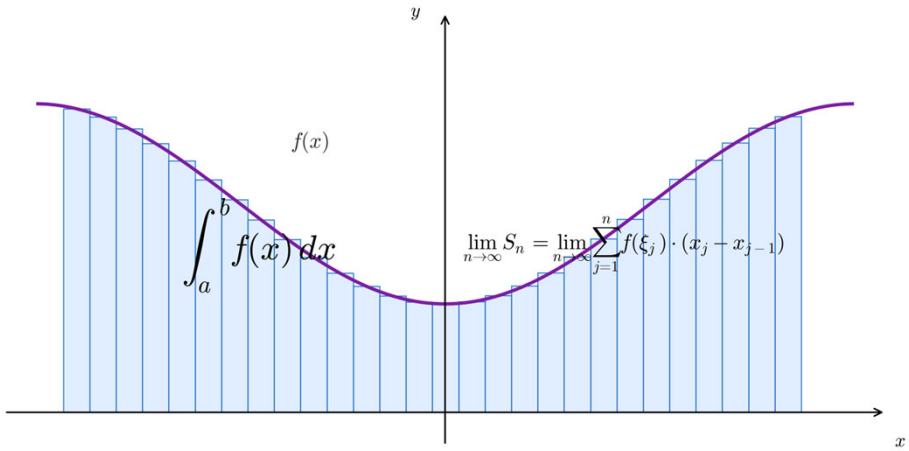
Calcolo integrale

L'integrale di Riemann



Calcolo integrale

Somma di Riemann

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione **limitata**

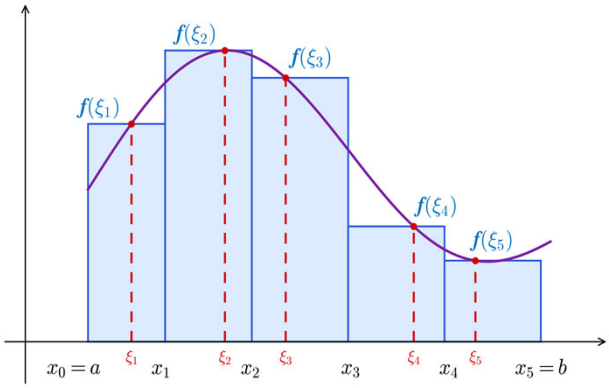
Consideriamo una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ definita dai punti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Costruiamo la **somma di Riemann**:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right) \cdot \left(x_j - x_{j-1}\right)$$

dove $f\left(\xi_j\right)$ è il valore che assume la funzione nel punto $\xi_j \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$



n.b. ξ_j è arbitraria, in generale non coincide con il punto medio dell'intervallo generico

Calcolo integrale

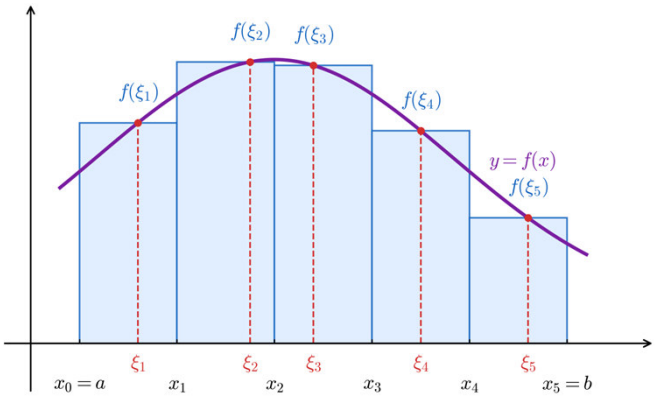
Somma di Riemann

Se la suddivisione dell'intervallo è uniforme, ossia:

$$x_j = a + j \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (j = 0,1,\dots,n)$$

La **somma di Riemann diventa**:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)$$

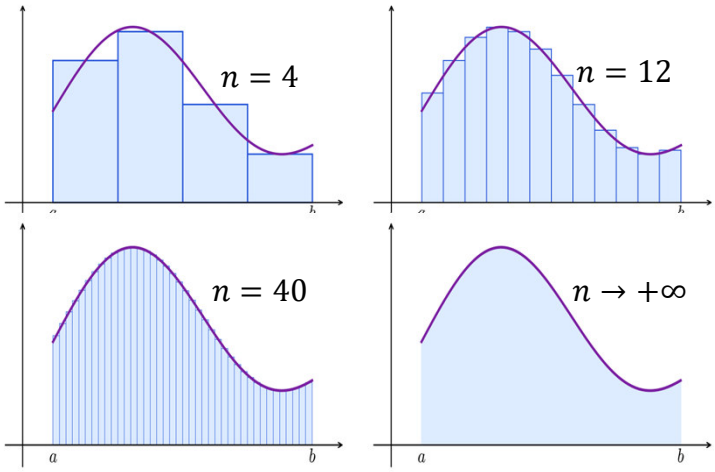


3

Calcolo integrale

Convergenza delle somme di Riemann

All'aumentare del numero n dei punti della suddivisione uniforme di $[a, b]$, aumenta il numero degli addendi della somma di Riemann e, al limite per $n \to +\infty$, la somma coincide con l'area del sottografico.



4

Calcolo integrale

Definizione di integrale secondo Riemann

Si dice che la funzione $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, **limitata**, è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, se esiste finito il limite di S_n, per $n \to \infty$, e tale limite non dipende né dalla scelta delle suddivisioni né dalla scelta dei punti ξ_j. Allora si pone:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\, dx$$

Si legge «integrale da a a b di $f(x)$ in dx»; $f(x)$ si chiama *funzione integranda* e x è la *variabile d'integrazione* ed è una *variabile muta*:

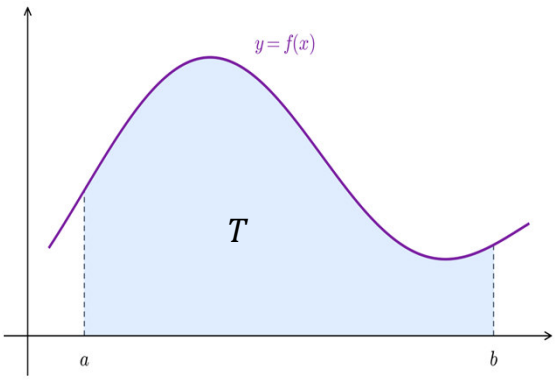
$$\int_a^b f(t)\, dt \quad \text{ha lo stesso significato di} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Calcolo integrale

Integrale definito, interpretazione geometrica

Se $f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx =$ area di T

Se in $[a, b]$ in f cambia segno, $\int_a^b f(x)\, dx$ è sempre un numero, ma non rappresenta più l'area del sottografico di f

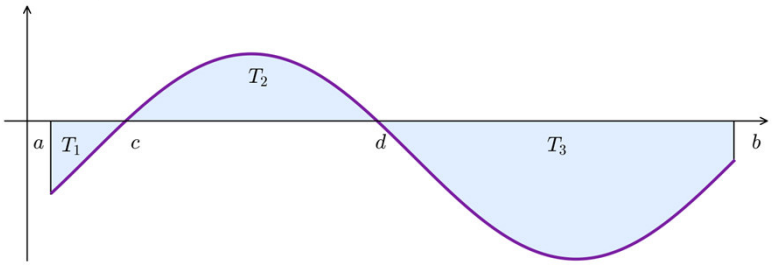


$\int_a^b f(x)\, dx$ è un numero, non dipende da x

Calcolo integrale

Integrale definito, interpretazione geometrica

Se f cambia segno in $[a, b]$ e si vuole calcolare l'area complessiva (superficie geometrica) racchiusa tra il grafico e l'asse x, bisogna suddividere l'intervallo in sottointervalli in cui f ha segno costante:



$$(\text{area tra } f \text{ e asse delle } x) = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^b f(x)\,dx$$

7

Calcolo integrale

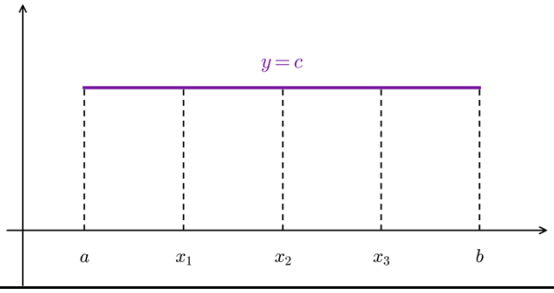
Integrale definito, interpretazione geometrica

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in $\mathrm{I} = [a, b]$ si indica con $R(\mathrm{I})$ o $\mathcal{R}([a, b])$. $\mathcal{R}(\mathrm{I})$ non è vuoto, infatti, ogni funzione costante $y = c$ è integrabile su qualunque intervallo [a, b] e si ha:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} c = \frac{b-a}{n} \cdot (n \cdot c) = (b-a)c$$

Per qualunque suddivisione (anche non uniforme) di $[a, b]$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$



8

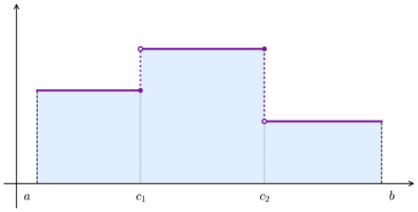
Calcolo integrale

Condizioni sufficienti per l'integrabilità secondo Riemann

Teorema.
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Teorema.
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è monotona e limitata, allora è integrabile.

Teorema.
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è limitata in $[a,b]$ con un numero finito di punti di discontinuità, allora è integrabile.



Il teorema si può estendere alle funzioni limitate con una infinità numerabile di punti di discontinuità, cioè i punti di discontinuità possono essere infiniti ma non devono essere «troppi» (ossia non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali).

Calcolo integrale

Condizioni sufficienti per l'integrabilità secondo Riemann

La funzione di **Dirichlet** su $[a,b]$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & se\ x\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\\ 0 & se\ x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

è limitata e non è integrabile secondo Riemann (i punti di discontinuità sono «troppi»

Infatti se si scelgono i punti ξ_j razionali si ha

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\cdot\left(x_j-x_{j-1}\right)=\sum_{j=1}^{n} 1\cdot\left(x_j-x_{j-1}\right)=(b-a)$$

Se invece si scelgono i punti ξ_j irrazionali si ha

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\cdot\left(x_j-x_{j-1}\right)=\sum_{j=1}^{n} 0\cdot\left(x_j-x_{j-1}\right)=0$$

Calcolo integrale

Integrale definito, proprietà

Siano f e g nintegrabili in [a, b], allora:

1. **Linearità dell'integrale**: se α e β sono costanti la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f\,(x)\, dx + \beta \int_a^b g\,(x)\, dx$$

2. **Additività dell'integrale** rispetto all'intervallo di integrazione: Se $a \leq s \leq b$ allora f è integrabile anche su $[a, s]$ e $[s, b]$ e:

$$\int_a^b f\,(x)\, dx = \int_a^s f\,(x)\, dx + \int_s^b f\,(x)\, dx$$

Calcolo integrale

Integrale definito, proprietà

3. **Positività e monotonia**:

$$f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f\,(x)\, dx \geq 0$$

$$f \geq g \Longrightarrow \int_a^b f\,(x)\, dx \geq \int_a^b g\,(x)\, dx$$

In particolare

$$\left| \int_a^b f\,(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x)|\, dx$$

Per convenzione, invertendo gli estremi di integrazione si pone:

$$\int_b^a f\,(x)\, dx = -\int_a^b f\,(x)\, dx$$

Calcolo integrale

Teorema della media integrale

i) Sia f limitata e integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ Allora

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx \leq M$$

Dove $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$

ii) Se f è continua su $[a, b]$, $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx = f(x_0)$$

valore medio integrale di f su $[a, b]$

Calcolo integrale

Teorema della media integrale - Dimostrazione

i. Essendo $f(x)$ limitata si ha

$$m \leq f(x) \leq M$$

Integrando membro a membro su [a, b]

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx \leq M$$

ii. Indichiamo con y_0 il valore $y_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx$ compreso tra m e M

Essendo f continua, per il teorema dei valori intermedi, esisterà $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$, cioè la tesi.

Calcolo integrale

Teorema della media integrale - Dimostrazione

