LEZIONE 13-11-2026

Svolgimento esercizi:

1) Calcolare i seguenti limiti

a. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+7}{8x^3-5x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{7}{x}\right)}{x^3\left(8-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

($\frac{7}{x} \to 0$, $\frac{5}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x^3} \to 0$)

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}+x}{x^{10}} = +\infty$ (gerarchia di infiniti)

c. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} -(1+x) = -2$

($(1-x) = -1\cdot(x-1)$)

2) Concludere lo studio dei limiti agli estremi calcolando $x \to -\frac{7}{8}^+, 0^-, 0^-, +\infty$. Poi abbozzare il grafico di f con le informazioni raccolte.

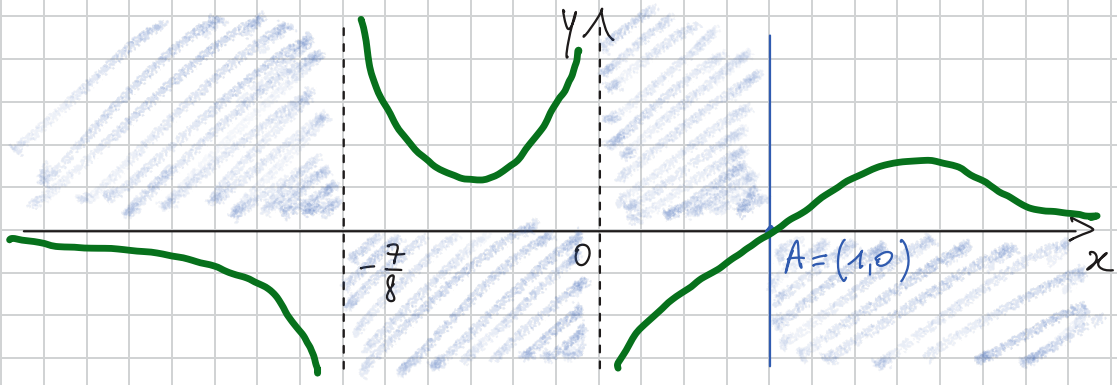
- $\lim_{x\to-\frac{7}{8}^+} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \frac{-\frac{15}{8}}{0^-} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

asintoti verticali

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(8+\frac{7}{x}\right)} = \frac{1}{8\cdot(+\infty)} = 0$

asintoto orizzontale

Bozza grafico:



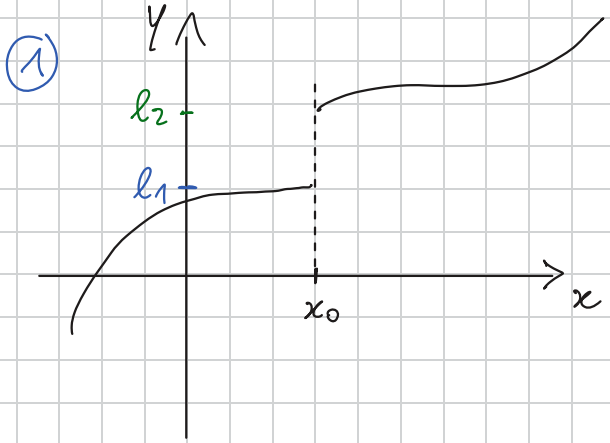
Continuità e discontinuità.

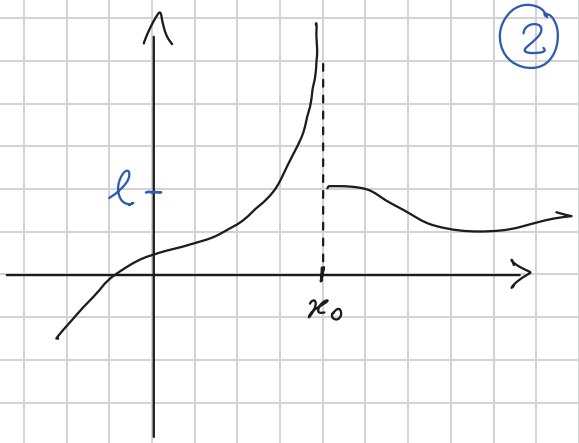
Per tracciare il grafico di una funzione data è necessario capire se essa è continua oppure no.

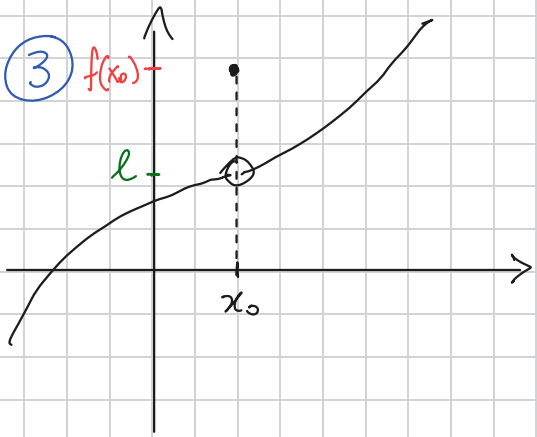
Ricordiamo che f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e se questo vale $\forall x_0 \in D$, f si dice CONTINUA in D.

Se invece ciò non accade in un certo punto $x_0 \in D$ esso si dice essere un PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f.

Esistono 3 tipi di discontinuità:







1) <u>I SPECIE</u>: se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$ $\quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$

ma $l_1 \neq l_2$

2) <u>II SPECIE</u>: se uno dei due limiti è $\pm\infty$, ad es.

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

3) III SPECIE: se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ma $f(x_0) \neq l$.

Questa si chiama anche DISCONTINUITÀ ELIMINABILE perché basterebbe ridefinire $f(x_0) = l$ per avere la continuità in x_0.

Esercizio: classificare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

2) $y = \dfrac{x}{x-1}$ $\quad (\text{in } x = 1)$

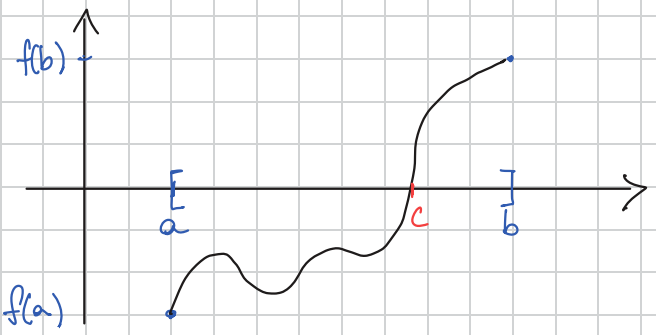
3) $y = \dfrac{1-x^2}{x-1}$ $\quad (\text{in } x = 1)$

Premessa

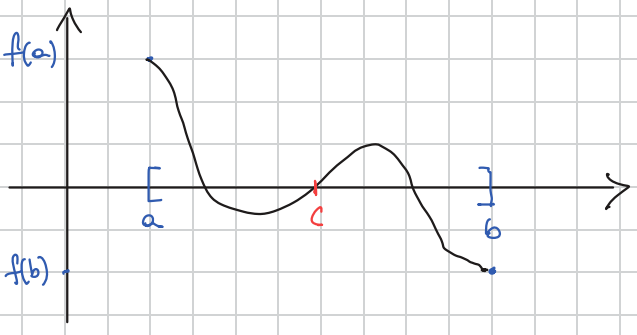
TEOREMA: (Esistenza degli zeri)

Sia $[a,b]$ un intervallo e $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi (ossia uno positivo e l'altro negativo), allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$.

CASO $f(a)<0$, $f(b)>0$

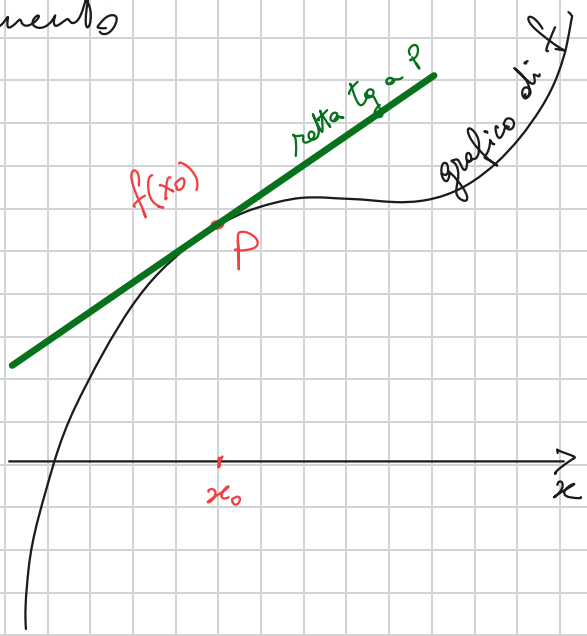


CASO $f(a)>0$, $f(b)<0$



Derivate: il problema della tangente

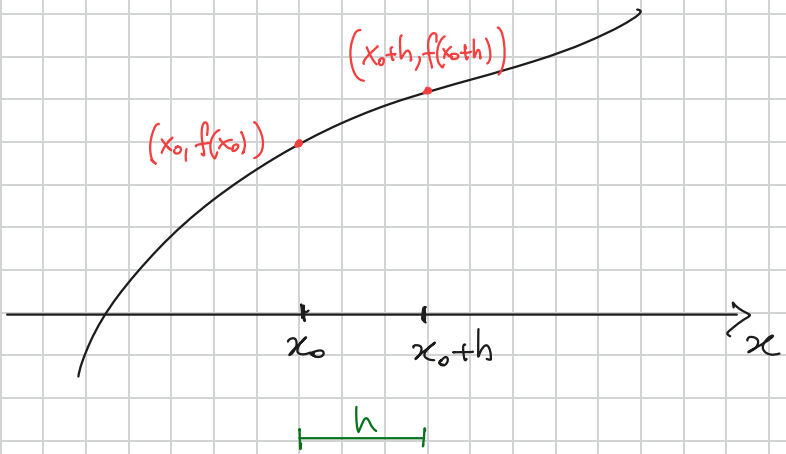
Per poter descrivere meglio l'andamento di una funzione (il suo grafico), cerchiamo di capire come trovare, se esiste, la retta TANGENTE ad esso in ogni suo punto. Ciò, tra le altre cose, ci direbbe se la funzione cresce o decresce nei pressi (in un intorno) di un punto.



Se un punto è quindi assegnato, per determinare una retta ci basta stabilirne il COEFFICIENTE ANGOLARE. Esso si calcola come

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Scriviamo $(x_0, f(x_0))$ le coordinate di un punto x_0 e $(x_0+h, f(x_0+h))$ le coordinate di un punto x_0+h



$$\Longrightarrow m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

DEF: Chiamiamo RAPPORTO INCREMENTALE $m = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ossia la pendenza della retta che passa per i 2 punti x_0 e x_0+h.

DEF: La DERIVATA di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente ad f in x_0, si denota come $f'(x_0)$ «f primo di x_0» e si calcola come

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f'(x_0)$ esiste, diremo che f è DERIVABILE in x_0.
Se ciò vale $\forall x_0 \in D$, si dice semplicemente che f è DERIVABILE.

Notazione: $f'(x_0)$, y', $Df(x_0)$

↑ noi non lo scriveremo così!

Esempio:

1) $y = x^2 - x$, $x_0 = 3$, $y'(3) = ?$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - (3+h) - [3^2 - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 3 - h - 6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 5h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+5)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 5 = 0 + 5 = \boxed{5}$$

2) Derivata in un punto qualsiasi (quindi lascerò scritto x invece di sostituirlo con un valore specifico)

$f(x) = 4x^2$ in x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(x^2 + h^2 + 2xh) - 4x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x^2 + 4h^2 + 8xh - 4x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4h+8x)}{h} = \lim_{h\to 0} (4h+8x) = 0+8x = 8x$$

In questo caso lasciando libero il punto x, abbiamo ottenuto che la derivata di una funzione è a sua volta una funzione.

$$f(x) = 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 8x$$

Note: essendo la derivata un limite, possiamo calcolar= lo sia da destra che da sinistra, definendo

DERIVATA DX: $$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DERIVATA SX: $$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

f è derivabile in $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = l < \infty$.

«se e solo se»

Derivate Fondamentali:

a. $f(x) = c$ (costante) $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Importante: questa NON È una F.I. poiché il numerat. è sempre identicamente uguale a zero; le F.I. sono quelle che hanno numeratore e denominatore che TENDONO a zero.

b. $f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1$

Più in generale, per le potenze

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

c. $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$

d. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

d. bis) se $a = e$, allora:

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Proprietà delle derivate:

i) $D[k \cdot f(x)] = k \cdot Df(x)$ (k costante)

ii) $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$

iii) $D[f(x) \cdot g(x)] = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$

quindi nel caso (iii) devo derivare una funzione e l'altra no, poi sommare facendo il contrario.

iv) $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2(x)}$

v) derivata della funzione composta

$$D[f(g(x))] = f' \cdot g'$$

↖ calcolata in $g(x)$

Esempi:

1) $y = -3x^2 \Rightarrow y' = -3 \cdot 2 \cdot x = -6x$

2) $y = 2x^2 - 6x + 1 + 2\,\text{sen } x \Rightarrow y' = 4x - 6 \cdot 1 + 0 + 2\cos x$

3) $y = x \cdot \operatorname{sen} x \implies y' = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x$

4) $y = 4x^2 \cdot e^x \implies y' = 8x \cdot e^x + 4x^2 \cdot e^x$

5) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x} \implies y' = \dfrac{(6x - 0)(x^2 + x) - (3x^2 + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$

6) $y = \ln(x^2 + 2) \implies y' = \dfrac{1}{x^2 + 2} \cdot (2x + 0)$

Esercizi:

1) Calcolare la derivata della funzione $y = mx + q$.

2) Derivare:

i) $y = e^{x^2}$

ii) $y = \operatorname{sen}(x^2)$

iii) $y = \dfrac{2}{(x^3 + 2)^2}$

iv) $y = \ln(x^4 - 3x^2)$

v) $y = \sqrt{x}$

vi) $y = \ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

vii) $y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg}(x^2 - 1)$

(Suggerimento vii: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$)