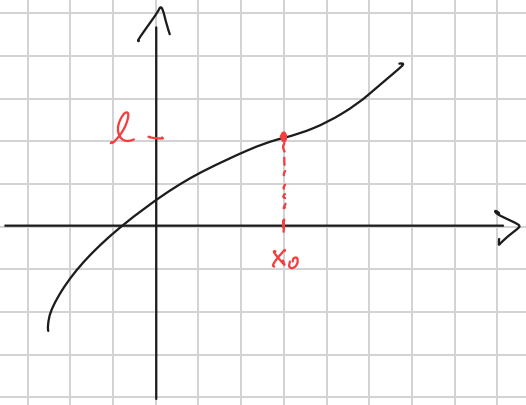
LEZIONE 10-11-2026

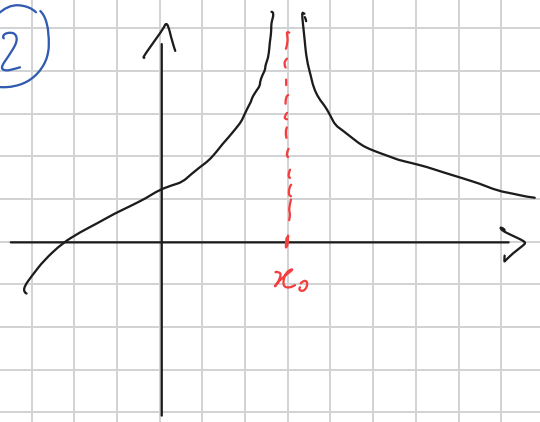
Recap sui limiti visti finora e loro grafici:

(1)



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

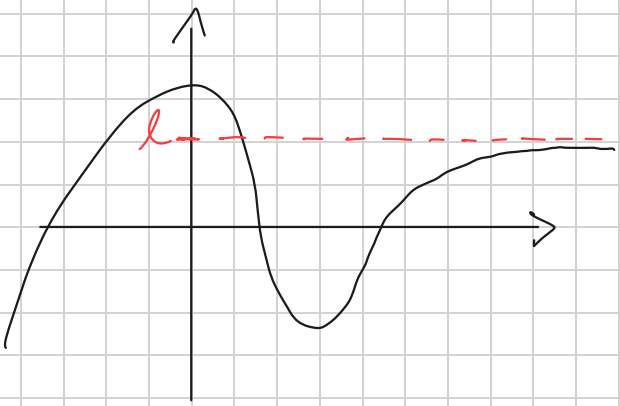
(2)



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

(ASINTOTO VERTICALE $x = x_0$)

(3)



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

(ASINTOTO ORIZZONTALE $y = l$)

(4)



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

Osservazione: a differenza dell'asintoto verticale (2), dove la funzione non tocca mai tale retta, una funzione può toccare (intersecare) un asintoto orizzontale.

Esempio: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ Ha un asintoto orizzontale, infatti basta calcolare $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

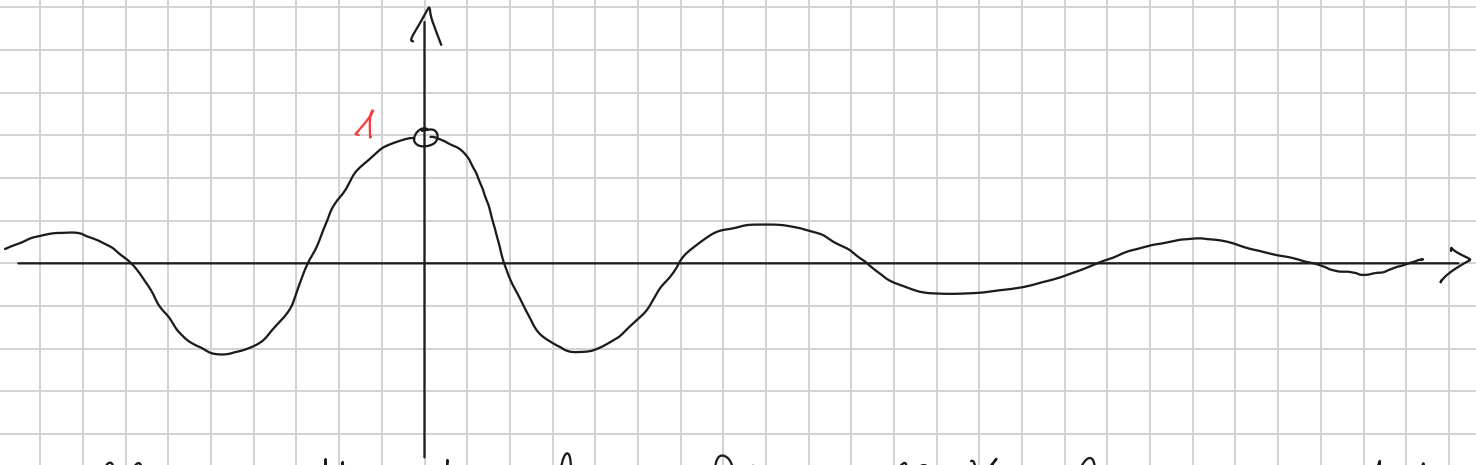
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = ?$ Cerchiamo di sfruttare il teo. dei due carabinieri:

$$-1 \le \sin x \le 1 \overset{*}{\Longrightarrow} -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

* ho potuto dividere per x senza cambiare il verso delle disequazioni perché sto pensando $x \to +\infty$, quindi è un numero positivo e diverso da zero.

Ora abbiamo che:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{+\infty} = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$



$\Rightarrow$ abbiamo ottenuto che $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ha un asintoto orizzontale $(y=0)$ e nonostante ciò tocca tale retta infinite volte.

Limiti notevoli (prosegue dalla lez. precedente):

3) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (ASINTOTO ORIZZONTALE $y=e$)

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Esercizio: dimostrare questi limiti partendo dal 3°.

Note:

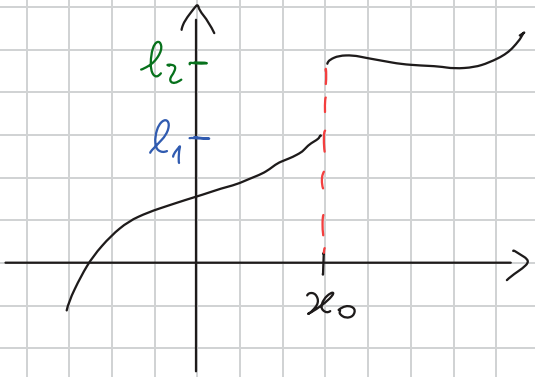
1) Il prodotto/rapporto dei limiti segue la regola dei segni:

$$\frac{+\infty}{+\ell} = +\infty \qquad (-\ell)(+\infty) = -\infty \qquad \frac{-\ell}{-\infty} = 0^+$$

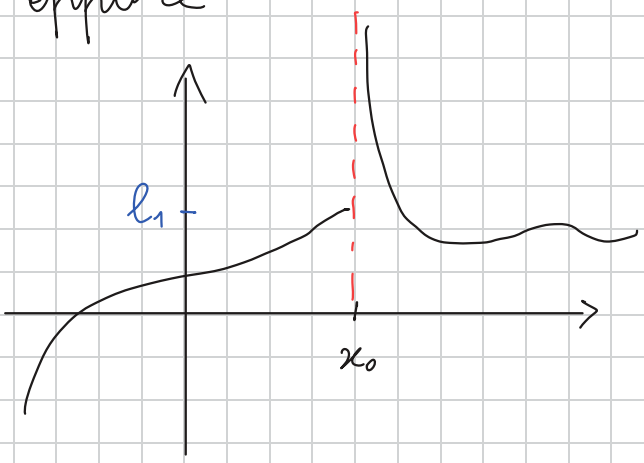
	+	−
+	+	−
−	−	+

2) Esistono casi in cui il limite non esiste perché una funzione $f(x)$ non tende a nessun (unico) limite (finito o infinito). Un caso semplice è quando

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$$



oppure



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \quad , \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

In entrambi scriveremo

$$\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Sappiamo calcolare i limiti grazie all'aritmetica, però sorgono difficoltà quando si ottengono Forme Indeterminate (F.I.). Facciamo 3 considerazioni su casi particolari, tutte basate su situazioni in cui calcoliamo limiti di rapporti:

a. rapporto tra polinomi con $x \to \pm\infty$

Esempio: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-3x^2+5x+7}{x^2-2x} = \dfrac{+\infty-\infty-\infty+7}{+\infty-\infty}$

Possiamo mettere in evidenza, sia al num. che al denom., il termine di grado max, poi semplificare:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{+\infty\,(1-0+0+0)}{1\,(1-0)} = +\infty$$

($\frac{3}{x^2}\to 0$, $\frac{5}{x^3}\to 0$, $\frac{7}{x^4}\to 0$, $\frac{2}{x}\to 0$)

In generale per il calcolare il limite per $x \to \pm\infty$ di un rapporto tra polinomi si raccoglie il termine di grado max sia al num. che al denom., poi si semplifica e si sfrutta che $\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to \pm\infty$.

b. Gerarchie degli infiniti: $a^x >> x^\alpha \geq \log_a x$

(esponenziali sono più grandi delle potenze, che a loro volta sono più grandi dei logaritmi)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4+x^2+1} = +\infty$$ perché l'esponenziale è più veloce dei polinomi.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$ perché il logaritmo è più lento dei polinomi.

c. "Infiniti equivalenti": sono quelle funzioni che tendono a ∞ per $x\to\infty$ e il loro rapporto dà 1.
Più precisamente, siano $f(x)$, $g(x)$ due INFINITI, cioè

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Si dicono EQUIVALENTI se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e scriviamo che $f \sim g$.
Se $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$, allora $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Esempio: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^3+7} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (F.I.)

So che $x^4-1 \sim x^4$, $x^3+7 \sim x^3$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-1}{x^3+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty .$$

Esercizi: calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+7}{8x^3-5x+2}$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}+x}{x^{10}}$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1}$.

Riprendiamo ora lo studio di funzione e aggiungiamo lo studio agli ESTREMI (del dominio). Per prima cosa dovremo abituarci a riscrivere il dominio come unione di intervalli, come negli esempi successivi:

$$y = \frac{x-1}{8x^2+7x}$$

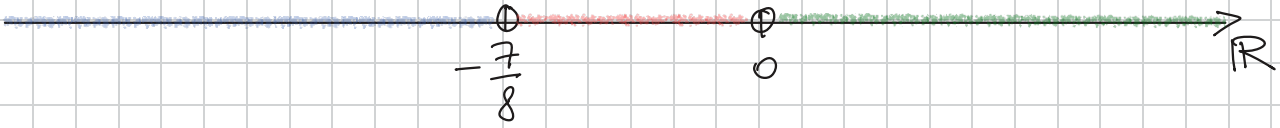
1) Dominio: C.E: $8x^2+7x \neq 0$

$$x(8x+7) \neq 0$$

$\boxed{x \neq 0}$, $8x+7 \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq -\frac{7}{8}}$

ossia abbiamo ottenuto che $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{7}{8}\}$.

$$\mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{7}{8}\} = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup \left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup \left(0, +\infty\right)$$



2) Intersezioni con gli assi:

asse y $(x=0)$: non si può fare perché $x=0 \notin D$

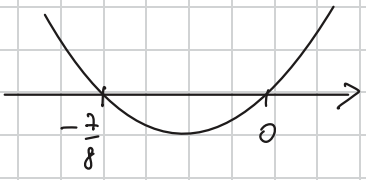
asse x $(y=0)$: otteniamo $0 = \frac{x-1}{8x^2+7x} \rightarrow x=1$

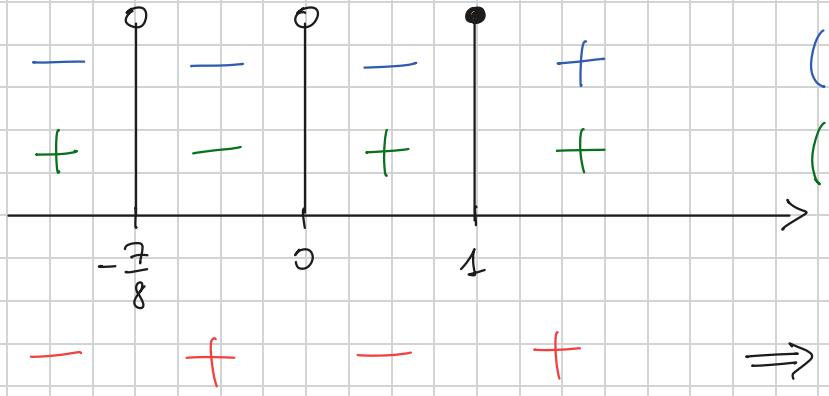
ossia il punto $A=(1,0)$

3) Segno di f: $f(x) \geq 0$ quando $\frac{x-1}{8x^2+7x} \geq 0$

N: $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

D: $8x^2+7x > 0 \rightarrow x < -\frac{7}{8} \vee x > 0$





$\Rightarrow f(x) \geq 0$ se $-\frac{7}{8} < x < 0$ oppure $x \geq 1$

4) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(8+\frac{7}{x}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

($1-\frac{1}{x} \to 0$, $8+\frac{7}{x} \to 0$)

$$\lim_{x \to -\frac{7}{8}^-} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \frac{-\frac{7}{8}-1}{8\cdot\frac{49}{64}-\frac{49}{8}} = \frac{-\frac{15}{8}}{0} = -\infty$$

Esercizio: concludere lo studio dei limiti agli estremi calcolando $x \to -\frac{7}{8}^+$, 0^-, 0^-, $+\infty$. Poi abbozzare il grafico di f con le informazioni raccolte.