Foglio Esercizi 4 – Laboratorio

Usare la classe `Problem_PL` con i metodi `duale()`, `verifica_dualita()`, `duali()`, `tabella_scarti()`, `ammissibile(x)` (oltre a `risolvi()`, `Valore()` e `soluzione()`) e le funzioni del file `grafici_pl.py`. In ogni esercizio scrivere *prima* il duale a mano e solo dopo controllarlo con il codice.

1.

$$\min\ -3x_1 - 2x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \le 4, \quad 2x_1 + x_2 \le 6, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

Risolvere primale e duale e confrontare i valori ottimi. Disegnare le due regioni ammissibili. Nella figura del duale, individuare le sei soluzioni di base e dire quali sono ammissibili per il duale. Su quali rette sta l'ottimo duale? Quali variabili sono positive nell'ottimo primale?

2.

$$\max\ -x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \le 2, \quad x_1 + x_2 \le 6, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

Che segno hanno le variabili duali? Che tipo di vincoli ha il duale? Disegnare primale e duale. Il primo vincolo del primale è soddisfatto con l'uguaglianza all'ottimo? Quanto vale la variabile duale corrispondente?

3. I pezzi di ricambio.

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 25x_4 + 10x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 \le 700 \quad \text{(ore di fonderia)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \le 1000 \quad \text{(ore di finitura)} \\ & x_1, \dots, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

(a) Risolvere primale e duale.
(b) Risolvere di nuovo il primale con 701 ore di fonderia: di quanto aumenta il profitto massimo? Ripetere con 1001 ore di finitura. Confrontare con la soluzione duale.
(c) Per ogni pezzo j calcolare il valore delle ore che consuma, $y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j}$, e confrontarlo con il suo profitto. Quali pezzi vengono prodotti? Che cosa hanno in comune?
(d) Disegnare il duale. Che cosa rappresentano le cinque rette? Su quali rette sta l'ottimo?

4. Il mangime.

$$\min\ 2x_1 + 3x_2 \quad \text{s.t.} \quad 4x_1 + 2x_2 \ge 8, \quad x_1 + 3x_2 \ge 6, \quad 2x_1 + 2x_2 \ge 5, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

Risolvere primale e duale e stampare la tabella degli scarti. Quale vincolo non è soddisfatto con l'uguaglianza all'ottimo? Quanto vale la sua variabile duale? Che cosa si osserva nella colonna "prodotto"? Disegnare il primale: perché il duale non si può disegnare?

5. La lega.

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ & 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 \ge 30 \\ & 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.7x_3 \le 55 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Prevedere a mano il segno delle tre variabili duali e il tipo dei tre vincoli duali, poi controllare con `duale()`. Verificare che i valori ottimi coincidono.

6. Problemi senza ottimo. Per ciascuno dei due problemi

$$\text{(a)}\quad \max\ x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 \le 1, \quad x_1 - x_2 \le 1, \quad x_1, x_2 \ge 0;$$
$$\text{(b)}\quad \min\ x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \le 1, \quad x_1 + x_2 \ge 3, \quad x_1, x_2 \ge 0,$$

dire che cosa succede al primale e al duale, e spiegarlo guardando le figure. Completare poi la tabella seguente indicando quali combinazioni si sono osservate negli esercizi di questo foglio.

	duale ottimo	duale illimitato	duale inammissibile
primale ottimo			
primale illimitato			
primale inammissibile			

7. Dualità debole. Per il problema dei pezzi di ricambio scegliere una produzione x e dei prezzi delle ore y qualsiasi, controllare con `ammissibile` che siano ammissibili per il primale e per il duale, e confrontare il profitto $c^T x$ con $b^T y$. Ripetere con altre scelte. Che cosa si osserva sempre? Che cosa significa per l'azienda?

8. Il duale del duale. Per il problema della lega, costruire `P.duale().duale()` e verificare che coincide con il problema di partenza: stessa matrice, stessi vettori, stessi tipi di vincoli e di variabili, stesso senso.

9. Il trasporto. Tre magazzini con disponibilità $25, 25, 50$ e quattro clienti con richieste $15, 20, 30, 35$; costo unitario dal magazzino i al cliente j dato dalla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ogni magazzino spedisce tutta la merce e ogni cliente riceve esattamente quanto richiesto. Risolvere primale e duale. Confrontare la soluzione del duale con le variabili duali calcolate da Gurobi: sono uguali? Calcolare la differenza fra i due vettori: che forma ha? Verificare che entrambi i vettori sono ammissibili per il duale e hanno lo stesso valore. Come si spiega?

10. Variabili di segno diverso.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \text{ libera}, \quad x_3 \le 0. \end{aligned}$$

Scrivere a mano il duale, poi controllarlo con `duale()`. Risolvere primale e duale e stampare la tabella degli scarti.