INTEGRALI MULTIPLI

FUNZIONE LIMITATA: UNA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, CON $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, SI DICE LIMITATA SE ESISTONO $m, M \in \mathbb{R}$ TALI CHE $m \leq f(x) \leq M$ PER OGNI x.

ESEMPIO: $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ È LIMITATA SU $A = \mathbb{R}^2$ PERCHÉ $-1 \leq \operatorname{sen} xy \leq 1$ PER OGNI (x,y).

ESEMPIO: $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ È LIMITATA SU $A = \mathbb{R}^2$ PERCHÉ $-\frac{\pi}{2} \leq f(x,y) \leq \frac{\pi}{2}$.

NOTARE CHE LE UGUAGLIANZE NON VALGONO IN NESSUN PUNTO.

ESEMPIO: $f(x,y) = e^{xy}$ È LIMITATA INFERIORMENTE PERCHÉ $f(x,y) \geq 0$ PER OGNI $(x,y) \in A = \mathbb{R}^2$. MA NON È LIMITATA SUPERIORMENTE. INFATTI PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE UN (x_M, y_M) TALE CHE $f(x_M, y_M) > M$.

ESERCIZIO: DETERMINARE (x_M, y_M) IN FUNZIONE DI M.

OSSERVAZIONE: SE ESISTONO m, M TALI CHE $m \leq f(x) \leq M$ PER OGNI $x \in A$, ALLORA OGNI $m' < m$ ED OGNI $M' > M$ VA BENE LO STESSO PERCHÉ $m' < m \leq f(x) \leq M < M'$. DUNQUE, SE f È LIMITATA, L'INSIEME DEI MINORANTI m È UN INTERVALLO DEL TIPO (A PRIORI) $(-\infty, b)$ OPPURE $(-\infty, b]$. PER LA STESSA RAGIONE, L'INSIEME DEI MAGGIORANTI M È UN INTERVALLO DEL TIPO $(a, +\infty)$ O $[a, +\infty)$.

I CASI INDICATI IN GRIGIO NON SI POSSONO VERIFICARE IN QUANTO L'INSIEME DEI NUMERI REALI È COMPLETO. IL PIÙ GRANDE MINORANTE b ED IL PIÙ PICCOLO MAGGIORANTE a SI DENOTANO CON $b = \inf_{x \in A} f(x)$ E $a = \sup_{x \in A} f(x)$.

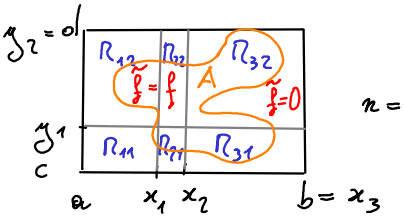
INSIEMI LIMITATI: UN $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, SI DICE LIMITATO SE ESISTE $z \in (0, +\infty)$ TALE CHE $A \subset B_z(0)$.

ESEMPIO: L'ASSE x DATO DA $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ NON È LIMITATO, MENTRE IL QUADRATO $Q_\ell = \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \times \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]$, $\ell \in (0, +\infty)$, LO È. **ESERCIZIO:** DIMOSTRARE CHE $A \subset \mathbb{R}^2$ È LIMITATO SE E SOLO SE ESISTE $\ell \in (0, +\infty)$ TALE CHE $A \subset Q_\ell$. **ESERCIZIO:** SE A È LIMITATO, ALLORA PER OGNI $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE $A \subset B_\delta(x_0)$.

INTEGRALE DOPPIO: CONSIDERIAMO UNA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA SU $A \subset \mathbb{R}^2$ LIMITATO. CONSIDERIAMO UN RETTANGOLO $R = [a,b] \times [c,d]$ TALE CHE $A \subset R$ E DEFINIAMO $\tilde{f}: R \longrightarrow \mathbb{R}$ PONENDO

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{SE } (x,y) \in A; \\ 0, & \text{SE } (x,y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

CONSIDERIAMO UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ED UNA $\mathcal{D}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d\}$. NE RISULTA LA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ DEL RETTANGOLO R NEI RETTANGOLI $R_{ij} = I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$



$n = 3, \quad k = 2$

AD OGNI DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$

CORRISPONDONO LA SOMMA INFERIORE

$$s = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \text{area}(R_{ij}) \cdot \inf_{R_{ij}} \tilde{f}$$

E LA SOMMA SUPERIORE

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \text{area}(R_{ij}) \cdot \sup_{R_{ij}} \tilde{f}$$

LE QUALI HANNO VALORI FINITI PERCHÉ f È LIMITATA PER IPOTESI. È OVVIO CHE

$$s(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \text{area}(R_{ij}) \cdot \inf_{R_{ij}} \tilde{f}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \text{area}(R_{ij}) \cdot \sup_{R_{ij}} \tilde{f} = S(\mathcal{D})$$

E SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, ANCHE PRENDENDO DUE DECOMPOSIZIONI DIVERSE $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$

RISULTA $\boxed{s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}')}$.

NE SEGUE CHE

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}'} S(\mathcal{D}').$$

SE VALE L'UGUAGLIANZA, SI DICE CHE f È INTEGRABILE SUL DOMINIO A E SI DEFINISCE

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D})$$

ALTRIMENTI, f NON È INTEGRABILE.

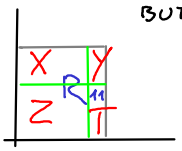
VEDIAMO PERCHÉ, ANCHE PRENDENDO DUE DECOMPOSIZIONI DIVERSE $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$

RISULTA $\boxed{s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}')}$.

PRENDIAMO LA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}'' = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$. CIOÈ, SE $\{x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b\}$ SONO I PUNTI DI $\mathcal{D}_1$ E $\{x'_0 = a < x'_1 < \dots < x'_m = b\}$ SONO I PUNTI DI $\mathcal{D}'_1$, QUELLI DI $\mathcal{D}''_1$ SARANNO $\{x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b\} \cup \{x'_0 = a < x'_1 < \dots < x'_m = b\}$ E LO STESSO CON $\mathcal{D}_2$ E $\mathcal{D}'_2$. SI DIMOSTRA CHE $s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}'')$ E CHE $S(\mathcal{D}') \geq S(\mathcal{D}'')$. NE SEGUE CHE

$$s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}'') \leq S(\mathcal{D}'') \leq S(\mathcal{D}').$$

RESTA DA VERIFICARE CHE $s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}'')$ E $S(\mathcal{D}') \geq S(\mathcal{D}'')$. VEDIAMO LA PRIMA. PENSIAMO, PER FISSARE LE IDEE, CHE IL RETTANGOLO R_{11} DI $\mathcal{D}$ RISULTI DECOMPOSTO IN 4 RETTANGOLI DI $\mathcal{D}''$. IL CONTRIBUTO DI R_{11} IN $s(\mathcal{D})$ È



$\text{area}(R_{11}) \inf_{R_{11}} \tilde{f}$ MENTRE IL CONTRIBUTO DI X, Y, Z, T IN $s(\mathcal{D}'')$ È

$$\text{area}(X) \inf_{X} \tilde{f} + \text{area}(Y) \inf_{Y} \tilde{f} + \text{area}(Z) \inf_{Z} \tilde{f} + \text{area}(T) \inf_{T} \tilde{f} \geq$$

$$\geq \text{area}(X) \inf_{R_{11}} \tilde{f} + \text{area}(Y) \inf_{R_{11}} \tilde{f} + \text{area}(Z) \inf_{R_{11}} \tilde{f} + \text{area}(T) \inf_{R_{11}} \tilde{f} =$$

$$= \text{area}(R_{11}) \inf_{R_{11}} \tilde{f}.$$

LA TESI SEGUE RIPETENDO IL RAGIONAMENTO PER OGNI R_{ij}.

LA MISURABILITÀ DELLE FIGURE PIANE SECONDO PEANO – JORDAN

SONO NOTI INSIEMI LIMITATI A TALI CHE LA FUNZIONE $\chi_A(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y) =$

$$= \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \end{cases}$$

NON È INTEGRABILE! ESEMPI TIPICI: $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x,y \in \mathbb{Q}\}$ E $A' = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}$. QUELLI NEI QUALI χ_A È INTEGRABILE SI DICONO MISURABILI E SI DEFINISCE $|A| = \iint_A dx\,dy$.

INTEGRALE TRIPLO

DATA UNA $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, LIMITATA, CON $A \subset \mathbb{R}^3$ INSIEME LIMITATO, SCEGLIAMO $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \supset A$ E DEFINIAMO $\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{SE } (x,y,z) \in A; \\ 0, & \text{SE } (x,y,z) \in R \setminus A. \end{cases}$

PRENDIAMO $\mathcal{D}_1 = \{a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_1} = b_1\}$, $\mathcal{D}_2 = \{a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_2} = b_2\}$ E $\mathcal{D}_3 = \{a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n_3} = b_3\}$ COSICCHÉ RESTANO INDIVIDUATI $R_{ijk} \subset R$ DATI DA

$$R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

E DI CONSEGUENZA

$$s = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \operatorname{vol}(R_{ijk}) \cdot \inf_{R_{ijk}} \tilde{f}$$

E $S = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \operatorname{vol}(R_{ijk}) \cdot \sup_{R_{ijk}} \tilde{f}$.

SI DIMOSTRA CHE, COMUNQUE SI PRENDANO $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$ E $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1' \times \mathcal{D}_2' \times \mathcal{D}_3'$ RISULTA $s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}')$ E PERCIÒ

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}'} S(\mathcal{D}').$$

SE VALE $=$ LA f SI DICE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, E SI DEFINISCE

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D})$$

SE VALE $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) < \inf_{\mathcal{D}'} S(\mathcal{D}')$

LA f NON È INTEGRABILE.

ESEMPIO: CALCOLIAMO $\iint_R C\,dx\,dy$ CON C COSTANTE REALE E $R = [a,b] \times [c,d]$. LA $f(x,y) = C$ È DEFINITA SU $A = R$ QUINDI $\tilde{f} = f$. PRENDIAMO $\mathcal{D}_1 = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ E $\mathcal{D}_2 = \{c = y_0 < \dots < y_k = d\}$ E RESTANO INDIVIDUATI I RETTANGOLI $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ PER $i = 1, \dots, n$ E $j = 1, \dots, k$. LE CORRISPONDENTI s E S SONO:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{area}(R_{ij}) \inf_{R_{ij}} C = C \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{area}(R_{ij}) = C \operatorname{area}(R)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \text{area}(R_{ij}) \sup_{R_{ij}} C =$$

$$= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \text{area}(R_{ij}) = C\,\text{area}(R)$$

NÉ s NÉ S DIPENDE DA $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ E SI TROVA SUBITO CHE

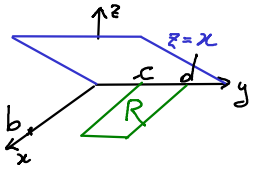
$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = C\,\text{area}(R);$$

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}') = C\,\text{area}(R) \quad \text{PERTANTO}$$

$f(x,y) = C$ È INTEGRABILE SU $R = [a,b] \times [c,d]$ E RISULTA

$$\iint_R C \, dx\,dy = C(b-a)(d-c).$$

ESERCIZIO: CONSIDERIAMO $f(x,y) = x$ SU $R = [0,b] \times [c,d]$. SI TROVA $\iint_R x \, dx\,dy =$



$$= \frac{1}{2} b^2 (d-c)$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE DOPPIO:

SE $f: A \to [0,+\infty)$ È UNA FUNZIONE REGOLARE E IL DOMINIO A È UNA FIGURA PIANA REGOLARE, L'INTEGRALE $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ È UGUALE AL VOLUME DEL SOLIDO $F = \{(x,y,z) : (x,y) \in A \text{ E } z \in [0, f(x,y)]\}$.

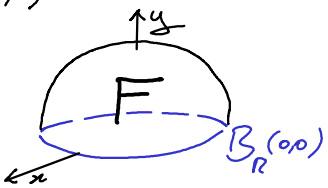
ESEMPIO: SE $C \in (0,+\infty)$, L'INTEGRALE $\iint_R C \, dx\,dy$ CON $R = [a,b] \times [c,d]$ È IL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO $R \times [0,C]$ CIOÈ $C(b-a)(d-c)$.

ESEMPIO: L'INTEGRALE $\iint_{B_R(0,0)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$

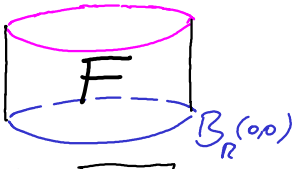
È UGUALE AL VOLUME DELLA SEMISFERA $F = \{(x,y,z) : (x,y) \in B_R(0,0) \text{ E } z \in [0, f(x,y)]\}$

DOVE $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, CIOÈ

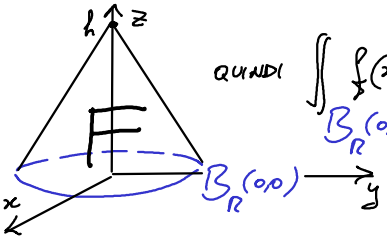
$$\iint_{B_R(0,0)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi R^3$$



ESEMPIO: $\iint_{B_R(0,0)} C \, dx\,dy = C\pi R^2$



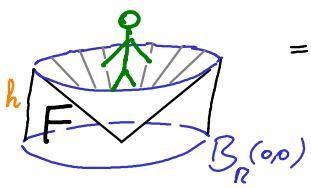
ESEMPIO: $f(x,y) = h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ SI ANNULLA LUNGO LA CIRCONFERENZA $\sqrt{x^2+y^2} = R$

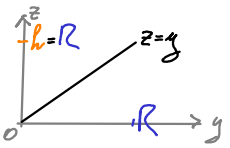


QUINDI $\iint_{B_R(0,0)} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

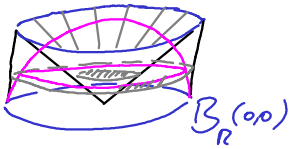
ESEMPIO: $\iint_{B_R(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 h =$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi R^3$$





VEDERE LA « SCODELLA DI GALILEO »



LE PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

1. LINEARITÀ: SE f E g SONO INTEGRABILI SUL DOMINIO A (CHE POSSIAMO SUPPORRE MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN) E PRENDO $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ OTTENGO LA FUNZIONE $\lambda f(x) + \mu g(x)$ CHE È INTEGRABILE E

$$\int_A \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int_A f(x)\,dx + \mu \int_A g(x)\,dx.$$

QUI x STA PER $(x_1, \dots, x_m)$ E dx STA PER $dx_1 \dots dx_m$.

IL SIMBOLO $\int$ STA PER $\underbrace{\int \dots \int}_{n \text{ VOLTE}}$.

APPLICAZIONE:

$$\int_{B_R(0,0)} \left(h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

$$= \int_{B_R(0,0)} h\,dx\,dy - \frac{h}{R}\int_{B_R(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= h\pi R^2 - \frac{h}{R}\,\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

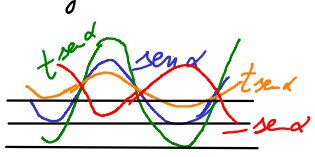
LA DIMOSTRAZIONE DELLA LINEARITÀ SI BASA SULLA DEFINIZIONE. PONIAMO, PER SEMPLICITÀ, $n = 2$. VERIFICHIAMO CHE SE $t \geq 0$ ALLORA

$$\int_A t f(x,y)\,dx\,dy = t \int_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

PER OGNI DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ DEL RETTANGOLO $R \supset A$ IN RETTANGOLI R_{ij} RISULTA CHE

$$\inf_{R_{ij}} tf = t \inf_{R_{ij}} f$$

PERCHÉ $t \geq 0$



SOMMANDO SU i, j SEGUE CHE $s(tf) = t\,s(f)$

E DI CONSEGUENZA $\sup_{\mathcal{D}} s(tf) = t \sup_{\mathcal{D}} s(f)$

$$= t \int_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{PER LA DEFINIZIONE.}$$

SIMILMENTE $\inf_{\mathcal{D}} S(tf) = t \inf_{\mathcal{D}} S(f)$

$$= t \int_A f(x,y)\,dx\,dy. \quad \text{QUINDI } tf \text{ È INTEGRABILE E } \int_A t f(x,y)\,dx\,dy = t \int_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

PER PROSEGUIRE, STUDIAMO $-f(x,y)$ CIOÈ IL CASO $\lambda = -1$. IN QUESTO CASO

$$\inf_{R_{ij}} \left(-f(x,y)\right) = -\sup_{R_{ij}} f(x,y) \quad \text{E PERCIÒ}$$

$$s(-f) = -S(f) \quad \text{E DA QUI SI RICAVA}$$

$$\sup_{\mathcal{D}} s(-f) = -\inf_{\mathcal{D}} S(f) =$$

$$= -\int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

RAGIONANDO ANALOGAMENTE SI TROVA CHE

$$\inf_{\mathcal{D}} S(-f) = -\int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

DA CUI SI DEDUCE CHE $-f$ È INTEGRABILE E

$$\int_A \left(-f(x,y)\right) dx\,dy = -\int_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

COMBINANDO QUESTO RISULTATO COL PRECEDENTE SI TROVA CHE $\int_A \lambda f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \lambda \int_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{PER OGNI } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. MONOTONIA RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA: SE HO f E g INTEGRABILI SULLO STESSO $A \subset \mathbb{R}^n$ E RISULTA $f(x) \leq g(x)$ PER OGNI $x \in A$ ALLORA

$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx.$$

CASO PARTICOLARE $f \equiv 0$. ALLORA $\int_A f(x)\,dx = 0$ ED ABBIAMO CHE: SE $g(x) \geq 0$ PER OGNI $x \in A$ ALLORA $\int_A g(x)\,dx \geq 0$.

IL CASO DI $|f|$: SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE f È INTEGRABILE, ALLORA ANCHE $|f|$ LO È. ESERCIZIO: DEFINIRE f NON INTEGRABILE TALE CHE $|f|$ SIA INTEGRABILE.

LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE IMPLICA CHE, SICCOME $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, SI HA

$$-\int_A |f(x)|\,dx \leq \int_A f(x)\,dx \leq \int_A |f(x)|\,dx$$

DUNQUE

$$\left| \int_A f(x)\,dx \right| \leq \int_A |f(x)|\,dx$$

« DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE PER GLI INTEGRALI ». CORRISPONDE A

$$\left| \sum_{i=1}^{m} y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |y_i|$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE TRIPLO

SE $A \subset \mathbb{R}^3$ È UN SOLIDO REGOLARE, LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA $\chi_A(x,y,z) = 1\!\!1_A(x,y,z)$ È INTEGRABILE, E SI TROVA CHE

$$\iiint_A dx\,dy\,dz = \mathrm{vol}(A).$$

ESEMPIO: SE $A = B_R(0,0,0)$ ALLORA

$$\iiint_A dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

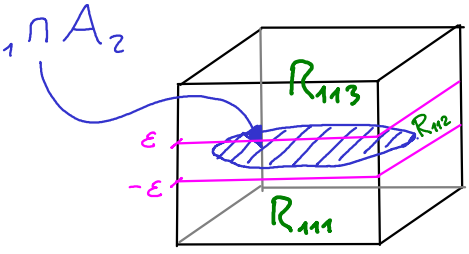
ESEMPIO: SIANO $A_1 = A \cap \{z \geq 0\}$ E $A_2 = A \cap \{(x,y,z) : z \leq 0\}$. ALLORA

$$\iiint_{A_1} dx\,dy\,dz = \iiint_{A_2} dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

OSSERVIAMO CHE $A = A_1 \cup A_2$ E CHE

$$A_1 \cap A_2 = A \cap \{(x,y,z) : z = 0\} = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 < R^2\}$$

QUESTO INSIEME È MISURABILE? QUAL È LA SUA MISURA? PRENDIAMO $Q = [-R,R]^3 \supset A_1 \cap A_2$



PRENDIAMO $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$ CON $\mathcal{D}_1 = \{-R = x_0 < x_1 = R\}$, $\mathcal{D}_2 = \{-R = y_0 < y_1 = R\}$ E $\mathcal{D}_3 = \{-R = z_0 < -\varepsilon = z_1 < \varepsilon = z_2 < R = z_3\}$ E CALCOLIAMO

ESSENDO $\sup_{R_{11k}} \chi_{A_1 \cap A_2}(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{se } k=1 \text{ o } k=3 \\ 1, & \text{se } k=2 \end{cases}$

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{1} \sum_{k=2}^{2} \mathrm{vol}(R_{ijk}) \cdot 1$$

$$= \mathrm{vol}(R_{112}) = 2\varepsilon(2\Omega)^2.$$

SICCOME $\sup_{\mathcal{D}'} s(\mathcal{D}') \leq \inf_{\mathcal{D}'} S(\mathcal{D}') \leq$

$\leq S(\mathcal{D}_\varepsilon) = 2\varepsilon(2\Omega)^2$ PER OGNI $\varepsilon \in (0, R)$

NE SEGUE CHE L'INSIEME $A_1 \cap A_2$ È MISURABILE E $|A_1 \cap A_2| = 0$.

A QUESTO PUNTO OSSERVIAMO, FINALMENTE, CHE

$$\iiint_A dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi\Omega^3 = \iiint_{A_1} dx\,dy\,dz +$$

$$+ \iiint_{A_2} dx\,dy\,dz.$$ SI DIMOSTRA, IN GENERALE, CHE

3. ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE: SE A_1 E $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ SONO MISURABILI E L'INTERSEZIONE $A_1 \cap A_2$ HA MISURA NULLA, E PRENDIAMO f INTEGRABILE SU A_1 E SU A_2, ALLORA f È INTEGRABILE SULL'UNIONE $A_1 \cup A_2$ E RISULTA CHE

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x)\,dx = \int_{A_1} f(x)\,dx + \int_{A_2} f(x)\,dx$$

GLI INSIEMI DI MISURA NULLA

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN INSIEME $A \subset R = [a,b] \times [c,d]$ ABBIA MISURA NULLA È CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTA UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ TALE CHE

$$\sum_{\substack{i,j \\ A \cap R_{ij} \neq \emptyset}} \mathrm{area}(R_{ij}) < \varepsilon$$

NEL CASO DI UN INSIEME $A \subset Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ LA CONDIZIONE DIVENTA

$$\sum_{\substack{i,j,k \\ A \cap R_{ijk} \neq \emptyset}} \mathrm{vol}(R_{ijk}) < \varepsilon$$

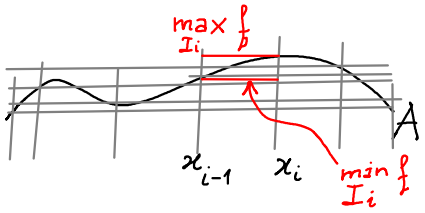
L'ESEMPIO DI IERI CAPITA A PROPOSITO. ALTRI ESEMPI TIPICI:

PRENDO $f \in C^0([a,b])$ CIOÈ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA. IL SUO GRAFICO $A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y = f(x)\} \subset [a,b] \times [c,d]$ CON $c \leq \min f$ E $d \geq \max f$ HA MISURA BIDIMENSIONALE NULLA.

DIMOSTRAZIONE: PER IL TEOREMA DI HEINE-CANTOR, LA FUNZIONE $f \in C^0([a,b])$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA. QUINDI, PRESO $\varepsilon > 0$, ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SE $x, x' \in [a,b]$ SODDISFANO $|x - x'| < \delta$ RISULTA $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. QUINDI PRENDO UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_1 = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ CON $x_i - x_{i-1} < \delta$ ESERCIZIO: DETERMINARE n E x_i PER $i = 0, \dots, n$ COME SOPRA E OTTENGO CHE $\max_{I_i} f - \min_{I_i} f < \varepsilon$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$. PRENDO $\mathcal{D}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$ I CUI ELEMENTI y_j CONTENGANO I VALORI $\max_{I_i} f$ E $\min_{I_i} f$. CON $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ RISULTA

$$\sum_{\substack{i,j \\ A \cap R_{ij} \neq \emptyset}} \text{area}(R_{ij}) < \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\varepsilon =$$

$$= \varepsilon(b-a) \quad \text{E PER}$$



L'ARBITRARIETÀ DI ε LA CONDIZIONE DATA ALL'INIZIO È SODDISFATTA. SIMILMENTE SI PUÒ DIMOSTRARE CHE IL GRAFICO DI UNA $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, CHE SIA INTEGRABILE, HA MISURA BIDIMENSIONALE NULLA. E ANCORA: IL GRAFICO DI UNA $f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, CHE SIA INTEGRABILE, HA MISURA TRIDIMENSIONALE NULLA. QUESTO ACCADE, IN PARTICOLARE, SE $f \in C^0([a,b] \times [c,d])$.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'INTEGRABILITÀ

UNA $f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ È INTEGRABILE SE L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ HA MISURA DI PEANO-JORDAN NULLA.

OSSERVAZIONI: 1) L'INSIEME VUOTO HA MISURA NULLA; 2) NON VALE IL VICEVERSA, UN CONTROESEMPIO FU DATO DA THOMAE

ESEMPIO: PRENDIAMO $g(x,y) = C \neq 0$ PER $(x,y) \in B_R(0,0)$ E DEFINIAMO

$$f(x,y) = \begin{cases} C, & \text{SE } (x,y) \in B_R(0,0) \\ 0, & \text{SE } (x,y) = Q \setminus B_R(0,0) \end{cases}$$

DOVE $Q = [-R,R] \times [-R,R]$. LA f È DISCONTINUA SULL'INSIEME $A = \partial B_R(0,0) = A_1 \cup A_2$ CON A_i GRAFICO DI $\varphi_i(x) = (-1)^i \sqrt{R^2 - x^2}$ QUINDI L'INSIEME A HA MISURA NULLA.

IL CASO DEL CERCHIO NON È CHE UN ESEMPIO DI

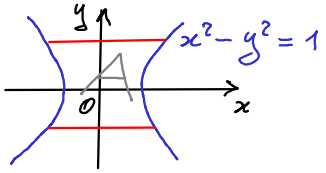
DOMINIO SEMPLICE

UN INSIEME $A \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE SEMPLICE SE ESISTE UN INTERVALLO $[a,b]$ E DUE FUNZIONI $\varphi_i \in C^0([a,b])$ TALI CHE

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b] \text{ E } y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$$

OPPURE $A = \{(x,y) : y \in [a,b] \text{ E } x \in [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]\}$.

ESEMPIO: $A = \{(x,y) : y \in [-1,1], x^2 - y^2 < 1\} =$



$$= \{(x,y) : y \in [-1,1], x \in [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]\}$$

CON $\varphi_i(y) = (-1)^i \sqrt{1+y^2}$.

DALLE CONSIDERAZIONI APPENA SVOLTE SEGUE CHE UNA $f \in C^0(A)$ CON A DOMINIO SEMPLICE È INTEGRABILE. INFATTI L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA FUNZIONE

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{SE } (x,y) \in A \\ 0, & \text{SE } (x,y) \in R \setminus A \end{cases}$$

CON $R = [a,b] \times [c,d] \supset A$ È L'UNIONE DEI GRAFICI DI φ_1 E φ_2, CONTINUE SU $[a,b]$, QUINDI HA MISURA NULLA.

IL METODO ANALITICO PIÙ TIPICO PER IL CALCOLO DEGLI INTEGRALI MULTIPLI È LA RIDUZIONE

CONSIDERIAMO $f: [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ CHE SIA INTEGRABILE. NON È AFFATTO DETTO CHE PER OGNI $y \in [c,d]$ LA FUNZIONE $f(x,y)$ DELLA SOLA VARIABILE $x \in [a,b]$ RISULTI INTEGRABILE. SE PERÒ QUESTO AVVIENE, RESTA DEFINITA LA FUNZIONE

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

PER OGNI $y \in [c,d]$ E SI DIMOSTRA CHE:

1) $G(y)$ È INTEGRABILE SU $[c,d]$;

2) $$\int_c^d G(y)\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

SOLITAMENTE LA TESI SI SCRIVE

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

OVVIAMENTE I RUOLI DELLE VARIABILI x E y SONO INTERSCAMBIABILI E PERCIÒ, SE PER OGNI $x \in [a,b]$ LA $f(x,y)$ È INTEGRABILE IN dy SULL'INTERVALLO $[c,d]$, RISULTA

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

ESEMPIO: CI ASPETTIAMO CHE $\iint_{B_R(0,0)} C\,dx\,dy = C\pi R^2$? USANDO LE FORMULE DI RIDUZIONE, TROVIAMO

$$\iint_{B_R(0,0)} C\,dx\,dy = C\iint_{[-R,R]^2} \chi_{B_R(0,0)}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= C\int_{-R}^{R} dy \int_{-R}^{R} \chi_{B_R(0,0)}(x,y)\,dx =$$

$$\chi_{B_R(0,0)}(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 < R^2 - y^2 \\ 0, & x^2 \geq R^2 - y^2 \end{cases}$$

$$= C\int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx$$

$$= C\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-y^2}\,dy = C\pi R^2 \quad \checkmark$$

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI RIDUZIONE.

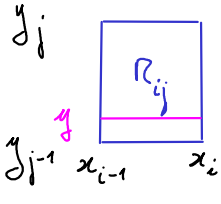
DOBBIAMO VERIFICARE CHE $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ È INTEGRABILE, QUINDI PRENDIAMO $\mathcal{D}_2 = \{ y_0 = c < y_1 < \dots < y_k = d \}$ E STUDIAMO

$$s(G,\mathcal{D}_2) = \sum_{j=1}^{k} (y_j - y_{j-1}) \inf_{\xi_j} G(y)$$

$$S(G,\mathcal{D}_2) = \sum_{j=1}^{k} (y_j - y_{j-1}) \sup_{\xi_j} G(y)$$

DOVE $\xi_j = [y_{j-1}, y_j]$. COSTRUIAMO UNA STIMA PER DIFETTO DI $\inf_{\xi_j} G(y)$. ESSENDO $G(y)$ UN INTEGRALE, PER OGNI DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_1 = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ RISULTA

$$G(y) \geq s_y(f,\mathcal{D}_1) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]\times\{y\}} f$$



$$\geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{R_{ij}} f$$

$$[x_{i-1},x_i]\times\{y\} \subset R_{ij}$$

SICCOME $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{R_{ij}} f$ NON DIPENDE DA $y \in [y_{j-1}, y_j]$ ED È UN MINORANTE DI $G(y)$, SI DEDUCE CHE

$$\inf_{y_j} G(y) \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{R_{ij}} f$$

MOLTIPLICANDO PER $y_j - y_{j-1}$ E SOMMANDO SU j LA DISUGUAGLIANZA SI CONSERVA:

$$s(G, \mathcal{D}_2) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \inf_{R_{ij}} f =$$

$$= s(f, \mathcal{D}) \quad \text{DOVE } \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2.$$

PER L'ARBITRARIETÀ DI $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ LA DISUGUAGLIANZA PASSA AGLI ESTREMI SUPERIORI:

$$\sup_{\mathcal{D}_2} s(G, \mathcal{D}_2) \geq \sup_{\mathcal{D}} s(f, \mathcal{D}) = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE

$$\inf_{\mathcal{D}_2} S(G, \mathcal{D}_2) \leq \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

DUNQUE

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy \leq \sup_{\mathcal{D}_2} s(G, \mathcal{D}_2) \leq$$

$$\leq \inf_{\mathcal{D}_2} S(G, \mathcal{D}_2) \leq \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

E LA TESI SEGUE.

ESTENSIONE AGLI INTEGRALI TRIPLI

ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA CHE SE $f : Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$ È INTEGRABILE, ALLORA

(I) SE PER OGNI $z \in [a_3, b_3]$ LA FUNZIONE $(x,y) \longmapsto f(x,y,z)$ È INTEGRABILE SUL RETTANGOLO $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, RESTA DEFINITA LA FUNZIONE $G(z) = \iint_R f(x,y,z)\, dx\, dy$

E SI DIMOSTRA CHE

1) $G(z)$ È INTEGRABILE SU $[a_3, b_3]$

2) $$\iiint_Q f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_3}^{b_3} G(z)\, dz$$

$$= \int_{a_3}^{b_3} dz \iint_R f(x,y,z)\, dx\, dy.$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE «PER STRATI»

(II) SE PER OGNI $(x,y) \in R$ LA FUNZIONE $z \longmapsto f(x,y,z)$ È INTEGRABILE SU $[a_3, b_3]$ RESTA DEFINITA $H(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dz$

E SI DIMOSTRA CHE:

1) H È INTEGRABILE SU R;

2) $$\iiint_Q f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_R H(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_R dx\, dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dz$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE «PER FILI»

NON C'È BISOGNO DI DIRE CHE IL RUOLO DELLE VARIABILI È INTERSCAMBIABILE

ESEMPIO. PER L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE TRIPLO, IL VOLUME DEL CONO

$$F = \left\{ (x,y,z) : (x,y) \in \overline{B}_R(0,0),\ z \in \left[0,\ h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right] \right\}$$

È $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \iiint_F dx\,dy\,dz$. PER CONFRONTO, SVOLGIAMO L'INTEGRALE CON LE FORMULE DI RIDUZIONE. LA $f(x,y,z) = \chi_F(x,y,z)$ È INTEGRABILE SU $Q = [-R,R]\times[-R,R]\times[0,h]$

PERCHÉ IL CONO F È UN DOMINIO SEMPLICE, QUINDI χ_F È GENERALMENTE CONTINUA.

INOLTRE PER OGNI $z \in [0,h]$ LA FUNZIONE

$$(x,y) \longmapsto \chi_F(x,y,z) \text{ È INTEGRABILE}$$

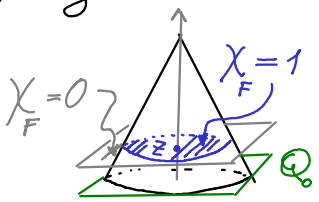
SUL QUADRATO $Q_0 = [-R,R]\times[-R,R]$

IN QUANTO GENERALMENTE CONTINUA ESSENDO IL CERCHIO $\overline{B}_R(0,0) \subset Q_0$ DOMINIO SEMPLICE.

DUNQUE

$$\iiint_F dx\,dy\,dz = \iiint_Q \chi_F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^h dz \iint_{Q_0} \chi_F(x,y,z)\,dx\,dy =$$



$$= \int_0^h dz \iint_{\overline{B}_{R-\frac{R}{h}z}(0,0)} dx\,dy =$$

$$= \int_0^h \pi\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2 dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

ESSENDO $z \le h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ PER I PUNTI $(x,y,z) \in F$

$$\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{R}{h}(h-z) = R - \frac{R}{h}z$$