

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

APPUNTI DI TEORIA DEI GIOCHI

ANTONIO IANNIZZOTTO

Indice

Notazioni 2
Introduzione 3
1. Giochi, soluzioni ed equilibri 4
1.1. Formalizzazione 4
1.2. Equilibri e ottimi 7
2. Multifunzioni 9
2.1. Proprietà insiemistiche delle multifunzioni 9
2.2. Proprietà topologiche delle multifunzioni 10
2.3. Selezioni continue 16
2.4. Punti fissi 18
2.5. Il teorema KKM 23
3. Giochi non-cooperativi 26
3.1. Strategie miste e teorema di Nash 26
3.2. Applicazioni 31
3.3. Equilibri approssimati 38
4. Giochi a somma nulla e teoria del minimax 41
4.1. Giochi a somma nulla 41
4.2. Alcuni teoremi di minimax 44
5. Giochi cooperativi 50
5.1. Imputazioni e nucleo 53
5.2. Valore di Shapley 56
5.3. Esempi 61
6. Cenni sui giochi dinamici 64
6.1. Grafi 64
6.2. Equilibrio nei sotto-giochi 65
6.3. Esempi 70
Riferimenti bibliografici 73

Versione del 11 novembre 2026

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italy
antonio.iannizzotto@unica.it

Notazioni

Introduciamo qui alcuni simboli e notazioni che saranno usati nel seguito.

Per ogni insieme X, $|X|$ denota la sua cardinalità. Se X, Y sono insiemi, denotiamo Y^X l'insieme delle funzioni $f : X \to Y$, in particolare 2^X è l'insieme delle parti di X. Per ogni $S \subset X \times Y$ poniamo

$$S_x = \big\{y' \in Y : (x, y') \in S\big\},\ S^y = \big\{x' \in X : (x', y) \in S\big\},$$
$$S^\top = \big\{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in S\big\}.$$

Per ogni $f : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ poniamo

$$f^c = \big\{x \in X : f(x) < c\big\},\ \overline{f}^c = \big\{x \in X : f(x) \leqslant c\big\},$$
$$f_c = \big\{x \in X : f(x) > c\big\},\ \overline{f}_c = \big\{x \in X : f(x) \geqslant c\big\}.$$

Per ogni $X \subset \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\mathrm{span}(X) = n\Big\{\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k : k \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{R},\ x_1, \dots x_p \in X\Big\},$$
$$\mathrm{aff}(X) = \Big\{\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k : k \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1,\ x_1, \dots x_p \in X\Big\},$$
$$\mathrm{conv}(X) = \Big\{\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k : k \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots \lambda_p \in [0,1],\ \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1,\ x_1, \dots x_p \in X\Big\}.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ introduciamo la norma euclidea

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

e la metrica corrispondente $d(x, y) = \|x - y\|$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ poniamo

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\big\},\ \overline{B}_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leqslant r\big\},\ \partial B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = r\big\}.$$

Se $X \subset \mathbb{R}^n$, su X adottiamo sempre la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^n$. Per semplicità indicheremo con $B_r(x)$ l'insieme $B_r(x) \cap X$. Poniamo inoltre per ogni $y \in X$

$$d(y, X) = \inf_{x \in X} \|x - y\|,$$

e per ogni $r > 0$

$$B_r(X) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : d(y, X) < r\big\}.$$

Per ogni $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ introduciamo la distanza di Hausdorff

$$d_H(X, Y) = \max\Big\{\sup_{x \in X} d(x, Y),\ \sup_{y \in Y} d(y, X)\Big\}.$$

Introduzione

Chi in cento battaglie riporta cento vittorie, non è il più abile in assoluto; al contrario, chi non dà nemmeno battaglia, e sottomette le truppe dell'avversario, è il più abile in assoluto.

Sun Tzu

La matematica si è sempre interessata ai giochi, attratta dai loro aspetti logici e probabilistici (ved. [3, 46]). Tuttavia, solo nel XX secolo il concetto matematico di *gioco strategico* è stato debitamente formalizzato e analizzato, principalmente ad opera di von Neumann (ved. [18,31,44]). Nasce così una teoria matematica dei giochi che è anche una teoria del comportamento razionale, con ampie applicazioni all'economia, alla scienza militare, e alla tecnologia (ved. [1,6,12,16,25,26,30]). Scopo di questa disciplina è descrivere le interazioni tra soggetti che, in competizione o collaborazione tra loro, effettuano decisioni razionali cercando di ottenere il massimo vantaggio. Lo studio ha finalità predittive: determinare, se possibile, la soluzione o le situazioni di equilibrio di un'interazione *prima* che essa abbia luogo.

Un punto di svolta è rappresentato dal lavoro di Nash [34], che introduce il fondamentale concetto di *equilibrio* e ne dimostra l'esistenza sfruttando la teoria, allora recente, delle multifunzioni (ved. [2,34]). Un caso particolare di notevole interesse è rappresentato dai giochi a somma nulla, che conduce al problema matematico del *min-max* (ved. [37]). In seguito, la teoria dei giochi si è sviluppata come una branca indipendente della matematica applicata, che combina metodi di analisi, topologia, calcolo combinatorio, probabilità, ricerca operativa, e teoria dei grafi (ved. [7,32,39]).

In questi appunti, introduciamo le nozioni fondamentali di gioco, equilibrio e soluzione (Capitolo 1); richiamiamo le basi dell'analisi multivoca (Capitolo 2); studiamo i giochi non-cooperativi e il teorema di Nash (Capitolo 3); i giochi a somma nulla e la teoria del min-max (Capitolo 4); quindi forniamo una rapida introduzione ai giochi cooperativi (Capitolo 5) e ai giochi dinamici (Capitolo 6). Ogni capitolo è corredato da esempi e applicazioni, principalmente riferiti alle scienze sociali.

Queste note, redatte per l'insegnamento *Introduzione alla Teoria dei Giochi* del Corso di Laurea in Matematica dell'Università degli Studi di Cagliari, hanno finalità didattiche e nessuna pretesa di originalità o completezza.

Desideriamo ringraziare la Prof.ssa Ornella Naselli, dell'Università degli Studi di Catania, per averci introdotto a questa affascinante disciplina e averci fornito preziosi chiarimenti e spunti di riflessione.

1. Giochi, soluzioni ed equilibri

I tratti essenziali di ogni gioco: la simmetria, le leggi arbitrarie, il tedio.
J.L. Borges

In questo capitolo forniamo le nozioni basilari della teoria matematica dei giochi. Il punto di vista adottato è quello della massima astrazione e generalità, in cui il fenomeno del gioco viene preso ad esempio di una interazione in cui i soggetti coinvolti perseguono un fine ben definito, senza alcun coinvolgimento emotivo o comportamento irrazionale.

1.1. **Formalizzazione.** Cominciamo a formalizzare i concetti di 'gioco' e 'giocatore' per ridurli a elementi di un problema logico:

Definizione 1.1.1. *Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto*

(*i*) *razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti (ved. Definizione 1.1.2);*
(*ii*) *intelligente se persegue la massima soddisfazione senza commettere errori.*

Un gioco *statico* rappresenta una situazione in cui tutti i giocatori effettuano le loro scelte nello stesso momento, mentre in un gioco *dinamico* i giocatori scelgono secondo un certo ordine temporale, adattando la strategia alle mosse degli altri giocatori. In un gioco *deterministico* i giocatori scelgono in condizioni di certezza, ovvero sanno che un determinato insieme di strategie conduce invariabilmente a un certo esito, mentre in un gioco *stocastico*, dato un insieme di strategie, vi sono diversi esiti ciascuno con la sua probabilità. In un gioco *non-cooperativo* i giocatori non possono stringere accordi vincolanti tra loro, mentre in un gioco *cooperativo* possono.
Un gioco statico deterministico non-cooperativo tra un insieme finito di giocatori $P_1, \dots P_n$ $(n \geqslant 2)$ è rappresentato dal sistema

$$\Gamma = (X_1, \dots X_n, E, h), \tag{1.1}$$

dove X_i è l'insieme delle strategie del giocatore P_i $(i = 1, \dots n)$, E è l'insieme degli esiti, e

$$h : \prod_{i=1}^{n} X_i \to E$$

è la funzione del gioco, che associa a ogni n-upla di strategie l'esito corrispondente.
Per compiere le proprie scelte, i giocatori hanno bisogno di un criterio:

Definizione 1.1.2. *Una preferenza $\preceq$ è una relazione binaria su un insieme E con le seguenti proprietà:*

(*i*) *$e \preceq e$ per ogni $e \in E$ (riflessiva);*
(*ii*) *se $e_1 \preceq e_2$ e $e_2 \preceq e_3$ allora $e_1 \preceq e_3$ per ogni $e_1, e_2, e_3 \in E$ (transitiva);*
(*iii*) *$e_1 \preceq e_2$ o $e_2 \preceq e_1$ per ogni $e_1, e_2 \in E$ (completa);*
(*iv*) *se E è uno spazio topologico, allora l'insieme $\{e \in E : e \preceq \overline{e}\}$ è chiuso per ogni $\overline{e} \in E$ (continua).*

Se $e_1 \preceq e_2$ e non $e_2 \preceq e_1$, si scrive $e_1 \prec e_2$. Se $e_1 \preceq e_2$ e $e_2 \preceq e_1$, allora e_1, e_2 sono detti equivalenti e si scrive $e_1 \sim e_2$.[1]

L'ipotesi di razionalità (Definizione 1.1.1 (*i*)) implica che il giocatore P_i dispone di una preferenza $\preceq_i$ su E. In molti casi (come nelle scommesse), tale preferenza può essere quantificata.

[1] Una preferenza non è un ordinamento: manca la proprietà antisimmetrica!

Definizione 1.1.3. *Sia E un insieme dotato di una preferenza $\preceq$. Un'utilità su E è una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $e_1, e_2 \in E$, se $e_1 \preceq e_2$, allora $u(e_1) \leqslant u(e_2)$;
(ii) per ogni $e_1, e_2 \in E$, se $e_1 \prec e_2$, allora $u(e_1) < u(e_2)$.

L'esistenza di una funzione di utilità non è ovvia. Vale in merito il seguente Teorema di rappresentazione:

Teorema 1.1.4. (Kreps [24]) *Siano E un insieme non vuoto, $\preceq$ una preferenza su E:*

(i) se E è numerabile, allora esiste un'utilità $u : E \to \mathbb{R}$;
(ii) se Eè uno spazio topologico con cardinalità non superiore al continuo e $\preceq$ è continua, allora esiste un'utilità $u : E \to \mathbb{R}$ continua.

Assumeremo sempre l'esistenza di un'utilità per ogni giocatore. Dunque il gioco (1.1) si riformula come segue:

$$\Gamma = (X_1, \dots X_n, f_1, \dots f_n), \tag{1.2}$$

dove per ogni $i = 1, \dots n$ la funzione

$$f_i = u_i \circ h : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$$

è detta *pay-off* del giocatore P_i. Nel caso $n = 2$, usualmente denoteremo P, Q i giocatori e $\Gamma = (X, Y, f, g)$ il gioco, e rappresenteremo i possibili risultati del gioco in una (bi)matrice. Questa rappresentazione è detta *in forma strategica* (ved. Borel [3]).

Esempio 1.1.5. (pari o dispari) Due giocatori P, Q dichiarano un numero intero ciascuno, se la somma è pari vince P, se è dispari vince Q. Poiché la somma di due numeri pari (o dispari) è pari, e la somma di un numero pari e uno dispari è dispari, possiamo semplificare il gioco definendo per entrambi i giocatori l'insieme di strategie $X = Y = \{p, d\}$, e due esiti $E = \{\text{vince } P, \text{ vince } Q\}$. Ogni giocatore punta 1, quindi misura le proprie utilità in base alla vincita (1) o perdita (-1). Il gioco è rappresentato dalla tabella simmetrica:

$P \backslash Q$	p	d
p	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
d	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Esempio 1.1.6. (carta, pietra e forbice) Il gioco prevede due giocatori P, Q con lo stesso insieme di strategie $X = Y = \{c, p, f\}$, con la regola che c batte p, p batte f, e f batte c. Gli esiti sono

$$E = \big\{\text{vince } P, \text{ vince } Q, \text{ pareggio}\big\}.$$

Per ogni giocatore, la vittoria vale 1, il pareggio 0 e la sconfitta -1. Il gioco è dunque rappresentato dalla tabella simmetrica:

$P \backslash Q$	c	p	f
c	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
p	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
f	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

In casi semplici, possiamo risolvere un gioco (ovvero, determinare come andranno effettivamente le cose) usando la tabella dei pay-off e il seguente concetto di *dominazione*:

Definizione 1.1.7. *Nel gioco (1.2), siano $x_i, y_i \in X_i$ due strategie, $i \in \{1, \dots n\}$. Si dice che*

(i) x_i domina fortemente y_i se per ogni $(z_1, \dots z_n) \in \Pi_{j \neq i} X_j$ si ha

$$f_i(z_1, \dots x_i, \dots z_n) > f_i(z_1, \dots y_i, \dots z_n);$$

(*ii*) x_i *domina strettamente* y_i *se per ogni* $(z_1, \dots z_n) \in \Pi_{j\neq i} X_j$ *si ha*

$$f_i(z_1, \dots x_i, \dots z_n) \geqslant f_i(z_1, \dots y_i, \dots z_n),$$

ed esiste $(\bar{z}_1, \dots \bar{z}_n) \in \Pi_{j\neq i} X_j$ *t.c.*

$$f_i(\bar{z}_1, \dots x_i, \dots \bar{z}_n) > f_i(\bar{z}_1, \dots y_i, \dots \bar{z}_n);$$

(*iii*) x_i *domina debolmente* y_i *se per ogni* $(z_1, \dots z_n) \in \Pi_{j\neq i} X_j$ *si ha*

$$f_i(z_1, \dots x_i, \dots z_n) \geqslant f_i(z_1, \dots y_i, \dots z_n).$$

Inoltre, x_i *è detta fortemente (strettamente, debolmente) dominante se domina fortemente (strettamente, debolmente) ogni altra strategia di* X_i*.*

Si procede con il metodo delle *eliminazioni iterate*: ogni giocatore che abbia una strategia fortemente (o strettamente) dominata la elimina, e ciò che resta è la soluzione. In particolare, se P, Q hanno ciascuno una strategia fortemente dominante x, y, una soluzione del gioco sarà la coppia (x, y)[2]. Nei giochi considerati negli Esempi 1.1.5, 1.1.6 nessun giocatore ha strategie dominanti. Seguono alcuni esempi (astratti) di soluzione per eliminazioni iterate di giochi con due giocatori:

Esempio 1.1.8. Consideriamo il seguente gioco:

$P\backslash Q$	y_1	y_2
x_1	$(1, 2)$	$(0, 1)$
x_2	$(0, 2)$	$(2, 1)$

Sia P il primo a giocare: egli osserva che y_1 è per Q una strategia fortemente dominante, quindi deduce che, qualunque scelta faccia, la contro-mossa di Q sarà y_1; allora P sceglie x_1 (che gli permette la massima utilità); la soluzione del gioco è pertanto (x_1, y_1). La stessa soluzione è raggiunta se Q gioca per primo.

Esempio 1.1.9. Consideriamo il seguente gioco:

$P\backslash Q$	y_1	y_2
x_1	$(3, 5)$	$(2, 5)$
x_2	$(3, 0)$	$(0, 2)$
x_3	$(0, 2)$	$(2, 0)$

Osserviamo che in questo gioco non esistono strategie fortemente dominanti. Sia P il primo a giocare: x_1 domina strettamente x_2 e x_3; se P elimina x_2, osserva che nel nuovo gioco (ridotto) y_1 domina strettamente y_2, dunque sceglie x_1 e la soluzione è (x_1, y_1); se invece elimina x_3, un ragionamento analogo porta alla soluzione (x_1, y_2). Se Q gioca per primo, si perviene alle stesse soluzioni.

Esercizio 1.1.10. Risolvere, per eliminazione iterata, il seguente gioco:

$P\backslash Q$	y_1	y_2
x_1	$(3, 3)$	$(2, 2)$
x_2	$(0, 2)$	$(1, 1)$
x_3	$(1, 2)$	$(0, 1)$

[2]Osserviamo che la soluzione non è necessariamente unica.

1.2. **Equilibri e ottimi.** Per risolvere le ambiguità osservate nella Sezione 1.1 introduciamo un concetto di *equilibrio*, analogo a quello in uso in meccanica:

Definizione 1.2.1. (Nash [34]) *Nel gioco* (1.2)*, la n-upla* $(x_1, \dots x_n) \in \Pi_{i=1}^n X_i$ *è un equilibrio di Nash se per ogni* $i \in \{1, \dots n\}$ *si ha per ogni* $x_i' \in X_i$

$$f_i(x_1, \dots x_n) \geqslant f_i(x_1, \dots x_i', \dots x_n).$$

L'insieme degli equilibri di Nash di Γ *si denota* $\mathrm{Ne}(\Gamma)$.

Consideriamo il caso $n = 2$. Nella tabella dei pay-off, un equilibrio di Nash corrisponde a una casella in cui la prima componente è massima tra quelle della stessa colonna e la seconda è massima tra quelle della stessa riga. I giochi degli Esempi 1.1.5, 1.1.6 non presentano equilibri di Nash. L'unico equilibrio di Nash nell'Esempio 1.1.8 è (x_1, y_1). Nell'Esempio 1.1.9 ve ne sono due: (x_1, y_1) e (x_1, y_2). Ne deduciamo che

- un gioco può non avere alcun equilibrio di Nash;
- un gioco può avere più di un equilibrio di Nash;
- una strategia fortemente dominata non può essere componente di un equilibrio di Nash;
- una strategia debolmente dominata può essere componente di un equilibrio di Nash.

Dunque, la risoluzione di un gioco per eliminazione delle strategie fortemente dominate preserva gli equilibri di Nash (se ve ne sono), mentre la risoluzione per eliminazione delle strategie debolmente dominate può sopprimerne alcuni.

Una nozione alternativa di soluzione di un gioco proviene dalla teoria economica:

Definizione 1.2.2. *Nel gioco* (1.2)*, la n-upla* $(x_1, \dots x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ *è un ottimo di Pareto se non esiste un'altra n-upla* $(x_1', \dots x_n')$ *t.c.*

(*i*) $f_i(x_1', \dots x_n') \geqslant f_i(x_1, \dots x_n)$ *per ogni* $i \in \{1, \dots n\}$*;*
(*ii*) *esiste* $h \in \{1, \dots n\}$ *t.c.* $f_h(x_1', \dots x_n') > f_h(x_1, \dots x_n)$.

L'insieme degli ottimi di Pareto di Γ *si denota* $\mathrm{Po}(\Gamma)$.

La differenza tra le Definizioni 1.2.1 e 1.2.2 può essere così descritta: l'equilibrio di Nash rappresenta una soluzione individuale in cui ogni giocatore valuta solo in base alla propria utilità, mentre l'ottimo di Pareto è una soluzione di tipo collettivo che tiene conto delle utilità di tutti i giocatori. I due approcci possono condurre a soluzioni diverse, come dimostra il seguente celebre problema:

Esempio 1.2.3. (dilemma del prigioniero) Due individui vengono arrestati con l'accusa di omicidio e rinchiusi in celle separate. Il commissario fa a ogni prigioniero la seguente proposta: 'Se confessi (accusando il tuo complice) vi incriminerò entrambi e sarete condannati a 10 anni di prigione, ma tu sarai liberato subito per aver collaborato; se confessate entrambi avrete uno sconto di pena e sarete liberi in 5 anni; se nessuno di voi confessa, resterete in galera solo per il tempo del processo, cioè 1 anno.' Ogni prigioniero sa che la stessa offerta è stata fatta anche all'altro, e deve decidere cercando di ridurre al minimo gli anni che deve passare in cella. Denotati P, Q i prigionieri, $X = Y = \{c, t\}$ le strategie (confessare e tacere) ed eguagliati i pay-off agli opposti delle durate delle condanne, si ottiene la seguente tabella:

$P \backslash Q$	c	t
c	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
t	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Si vede che $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(c, c)\}$, mentre $\mathrm{Po}(\Gamma) = \{(t, t)\}$. Non potendo comunicare, i due prigionieri sceglieranno di confessare, raggiungendo così un equilibrio inefficiente. Questo esito è tipico dei giochi non-cooperativi, nei quali la competizione esasperata preclude la possibilità di accordi.

Vediamo un altro esempio:

Esempio 1.2.4. (battaglia dei sessi) Una coppia deve decidere se andare allo stadio (s) o a teatro (t); l'uomo (P) preferisce andare allo stadio in compagnia (utilità 10) che a teatro in compagnia (5), ma questo è pur sempre meglio che andare allo stadio da solo (0); la donna (Q) ha preferenze opposte. Il gioco è rappresentato dalla seguente tabella:

$P\backslash Q$	s	t
s	$(10,5)$	$(0,0)$
t	$(0,0)$	$(5,10)$

Non vi sono strategie dominanti. Dalla tabella deduciamo che gli equilibri di Nash sono (s,s) e (t,t)[3]. Non vi sono invece ottimi.

Il problema dell'esistenza (e, in subordine, dell'unicità) dell'equilibrio di Nash richiede, per essere risolto, un armamentario matematico alquanto avanzato, che presenteremo in forma leggermente semplificata nel Capitolo 2.

Altri equilibri si possono determinare cambiando paradigma, cioè consentendo a ciascun giocatore di ripartire la sua scelta tra le varie strategie (come uno speculatore che investe parti del suo capitale su diversi titoli, variando gli investimenti secondo le sue aspettative): questa è la teoria delle *strategie miste*, su cui torneremo nel Capitolo 3.

Esercizio 1.2.5. Determinare le strategie dominanti e gli equilibri di Nash degli Esempi 1.1.8, 1.1.9.

Esercizio 1.2.6. Determinare gli equilibri di Nash nel gioco dell'Esercizio 1.1.10.

Esercizio 1.2.7. Determinare (se ve ne sono) gli equilibri di Nash del gioco rappresentato dalle seguente tabella:

$P\backslash Q$	y_1	y_2	y_3
x_1	$(1,2)$	$(2,2)$	$(2,1)$
x_2	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$

[3]L'esperienza insegna, tuttavia, che la coppia andrà a teatro.

2. Multifunzioni

Who needs set-valued analysis?
J.P. Aubin & H. Frankowska

L'analisi multivoca estende la tradizionale analisi matematica al caso in cui i valori delle funzioni non sono singoli elementi di un insieme bensì suoi sotto-insiemi: questa scelta corrisponde all'esigenza di studiare con i mezzi dell'analisi matematica fenomeni caratterizzati da un alto grado di *incertezza* (come nella teoria dei controlli). Un altro contesto in cui le multifunzioni risultano utili è lo studio di problemi differenziali con discontinuità (ved. [9, 11, 15]), con applicazioni in meccanica.

2.1. Proprietà insiemistiche delle multifunzioni.

In questa sezione introduciamo le definizioni di base dell'analisi multivoca e alcuni teoremi di selezione e di punto fisso. Per approfondimenti rimandiamo ai testi [2, 23].

Definizione 2.1.1. *Siano X, Y insiemi non vuoti. Una multifunzione $F : X \to 2^Y$ è una funzione i cui valori sono sotto-insiemi di Y:*

(i) il dominio di F è
$$\mathrm{dom}(F) = \big\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\big\};$$
(ii) per ogni $X' \subseteq X$, l'immagine di X' è
$$F(X') = \bigcup_{x \in X'} F(x);$$
(iii) per ogni $Y' \subseteq Y$, le contro-immagini inferiore e superiore di Y' sono
$$F^-(Y') = \big\{x \in X : F(x) \cap Y' \neq \emptyset\big\},\ F^+(Y') = \big\{x \in X : F(x) \subseteq Y'\big\};$$
(iv) il grafico di F è
$$\mathrm{gr}(F) = \big\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\big\};$$
(v) la multifunzione inversa di F è $I_F : Y \to 2^X$, definita per ogni $y \in Y$ da
$$I_F(y) = \big\{x \in X : y \in F(x)\big\}.$$

Chiaramente, ogni funzione (univoca) $f : X \to Y$ si identifica con la multifunzione $F : X \to 2^Y$ definita per ogni $x \in X$ da $F(x) = \{f(x)\}$.

Osservazione 2.1.2. Il concetto di multifunzione è, a rigore, identico a quello di *relazione binaria*. A differenza da quanto avviene per le funzioni (univoche), ogni sotto-insieme di $X \times Y$ è il grafico di una multifunzione. Spesso, tuttavia, si restringe lo studio alle multifunzioni a valori non vuoti ($\mathrm{dom}(F) = X$), come faremo spesso nel seguito.

Alcune proprietà insiemistiche delle multifunzioni:

Lemma 2.1.3. *Se $F : X \to 2^Y$ è una multifunzione, allora:*

(i) per ogni $Y' \subseteq Y$
$$F^-(Y \setminus Y') = X \setminus F^+(Y'),\ F^+(Y \setminus Y') = X \setminus F^-(Y');$$
(ii) per ogni $Y_1, \dots Y_n \subseteq Y$
$$F^-\Big(\bigcup_{i=1}^n Y_i\Big) = \bigcup_{i=1}^n F^-(Y_i),\ F^+\Big(\bigcap_{i=1}^n Y_i\Big) = \bigcap_{i=1}^n F^+(y_i);$$
(iii) per ogni $y \in Y$, $I_F(y) = F^-(\{y\})$.

Dimostrazione. Proviamo (*i*). Sia $x \in F^-(Y \setminus Y')$, allora esiste $y \in F(x)$ t.c. $y \notin Y'$, ovvero $F(x)$ non è contenuto in Y', pertanto $x \notin F^+(Y')$. Viceversa, per ogni $x \in X \setminus F^+(Y')$ esiste $y \in F(x)$ t.c. $y \notin Y'$, da cui $x \in F^-(Y \setminus Y')$. Questo dimostra la prima eguaglianza.
Per la seconda, sia $x \in F^+(Y \setminus Y')$, allora $F(x) \cap Y = \emptyset$, ovvero $x \notin F^-(Y')$. Viceversa, per ogni $x \in X \setminus F^-(Y')$ si ha $F(x) \subseteq Y \setminus Y'$, da cui $x \in F^+(Y \setminus Y')$. Similmente si dimostrano (*ii*), (*iii*). □

Esercizio 2.1.4. Completare la dimostrazione del Lemma 2.1.3.

Esercizio 2.1.5. Siano X, Y insiemi, $S \subset X \times Y$. Determinare una multifunzione $F : X \to 2^Y$ t.c. $\mathrm{gr}(F) = S$.

2.2. **Proprietà topologiche delle multifunzioni.** Nel seguito studieremo le proprietà delle multifunzioni operanti fra *spazi euclidei*, ovvero della forma $F : X \to 2^Y$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, dotati delle norme euclidee, che indicheremo sempre con $\|\cdot\|$. Denoteremo d tutte le distanze fra punti e insiemi, e adotteremo le topologie indotte da tali distanze (denotando $B_\delta(x)$ la palla aperta centrata in x di raggio $\delta > 0$). Osserviamo che tali topologie sono *relative* a X, Y rispettivamente, per esempio un insieme $A \subset X$ è aperto in X se esiste $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto t.c.

$$A = X \cap U.$$

Questa scelta è dettata dall'esigenza di semplicità, oltre che dalla natura delle applicazioni alla teoria dei giochi classica, che considera insiemi di strategie contenuti in spazi euclidei. Osserviamo tuttavia che la maggior parte dei risultati seguenti è valida più in generale, per multifunzioni operanti fra spazi topologici astratti (ved. [10]).
In topologia generale, la proprietà fondamentale delle funzioni è la *continuità*. Nel caso multivoco, la tale proprietà ha diverse possibili estensioni:

Definizione 2.2.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : X \to 2^Y$ una multifunzione, $x \in X$:*

- (*i*) *F è semi-continua inferiormente (s.c.i.) in x se per ogni $A \subseteq Y$ aperto t.c. $F(x) \cap A \neq \emptyset$ esiste $\delta > 0$ t.c. $F(x') \cap A \neq \emptyset$ per ogni $x' \in B_\delta(x)$*[4]*;*
- (*ii*) *F è semi-continua superiormente (s.c.s.) in x se per ogni $A \subseteq Y$ aperto t.c. $F(x) \subseteq A$ esiste $\delta > 0$ t.c. $F(x') \subseteq A$ per ogni $x' \in B_\delta(x)$;*
- (*iii*) *F è semi-continua in x se per ogni $A \subseteq Y$ aperto t.c. $F(x) \subseteq A$ esiste $\delta > 0$ t.c. $F(x') \cap A \neq \emptyset$ per ogni $x' \in B_\delta(x)$;*
- (*iv*) *F è continua in x se è s.c.i. e s.c.s. in x;*
- (*v*) *F è s.c.i. (s.c.s., semi-continua, continua) in X se è s.c.i. (s.c.s., semi-continua, continua) in ogni punto di X;*
- (*vi*) *F è aperta se $F(A)$ è aperto per ogni $A \subseteq X$ aperto;*
- (*vii*) *F è chiusa se $F(C)$ è chiuso per ogni $C \subseteq X$ chiuso.*

Nel caso univoco, le proprietà (*i*) - (*iii*) sono tutte equivalenti alla continuità. Nel caso multivoco, d'altra parte, nessuna di esse implica l'altra in generale. Solo per le multifunzioni a valori *non vuoti*, (*i*) o (*ii*) implicano (*iii*):

Lemma 2.2.2. *Se $F : X \to 2^Y$ è s.c.i. o s.c.s. e $\mathrm{dom}(F) = X$, allora F è semi-continua.*

Dimostrazione. Supponiamo che F sia s.c.i. (l'altro caso è simile). Per ogni $x \in X$, $A \subset Y$ aperto t.c. $F(x) \subseteq A$, si ha

$$F(x) \cap A = F(x) \neq \emptyset,$$

dunque esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha $F(x') \cap A \neq \emptyset$. □

Ricordiamo alcune caratterizzazioni della semi-continuità inferiore:

[4]Ricordiamo che si intende $x' \in X \cap B_r(x)$.

Lemma 2.2.3. *Sia $F : X \to 2^Y$ una multifunzione. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(*i*) *F è s.c.i.;*
(*ii*) *$F^-(A)$ è aperto per ogni $A \subseteq Y$ aperto;*
(*iii*) *$F^+(C)$ è chiuso per ogni $C \subseteq Y$ chiuso;*
(*iv*) *I_F è aperta.*

Dimostrazione. Proviamo che (*i*) implica (*ii*). Siano $A \subseteq Y$ aperto, $x \in F^-(A)$. Allora si ha $F(x) \cap A \neq \emptyset$, da cui per (*i*) e la Definizione 2.2.1 (*i*) esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha $F(x') \cap A \neq \emptyset$. Dunque $B_\delta(x) \subseteq F^-(A)$, ovvero $F^-(A)$ è aperto in X
Proviamo che (*ii*) implica (*iii*). Sia $C \subseteq Y$ chiuso, allora $Y \setminus C$ è aperto. Per (*ii*) l'insieme $F^-(Y \setminus C)$ è aperto in X, da cui per il Lemma 2.1.3 (*i*) si ha che $F^+(C) = X \setminus F^-(Y \setminus C)$ è chiuso in X.
Proviamo che (*iii*) implica (*iv*). Sia $A \subseteq Y$ aperto, allora usando il Lemma 2.1.3 (*iii*) si vede che

$$I_F(A) = F^-(A) = X \setminus F^+(Y \setminus A),$$

e questo insieme è aperto per (*iii*).
Proviamo infine che (*iv*) implica (*i*). Siano $x \in X$, $A \subseteq Y$ aperto t.c. $F(x) \cap A \neq \emptyset$. Per il Lemma 2.1.3 (*iii*) si ha $x \in I_F(A)$, e per (*iv*) questo insieme è aperto, quindi esiste $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(x) \subseteq F^-(A)$, ovvero per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha $F(x') \cap A \neq \emptyset$. Dunque F è s.c.i. in x. □

Similmente si dimostrano le seguenti caratterizzazioni della semi-continuità superiore:

Lemma 2.2.4. *Sia $F : X \to 2^Y$ una multifunzione. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(*i*) *F è s.c.s.;*
(*ii*) *$F^+(A)$ è aperto per ogni $A \subseteq Y$ aperto;*
(*iii*) *$F^-(C)$ è chiuso per ogni $C \subseteq Y$ chiuso;*
(*iv*) *I_F è chiusa.*

Consideriamo il caso speciale delle multifunzioni $F : X \to 2^{\mathbb{R}}$ i cui valori sono *intervalli* compatti:

$$F(x) = [a(x), b(x)],$$

dove $a, b : X \to \mathbb{R}$, $a(x) \leqslant b(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è detta s.c.i. (s.c.s.) se per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\varphi_c = \big\{x \in X : \varphi(x) > c\big\} \ (\varphi^c = \big\{x \in X : \varphi(x) < c\big\})$$

è aperto. Si ha la seguente caratterizzazione:

Lemma 2.2.5. *Siano $a, b : X \to \mathbb{R}$ funzioni t.c. $a(x) \leqslant b(x)$ per ogni $x \in X$ e $F : X \to 2^{\mathbb{R}}$ definita da $F(x) = [a(x), b(x)]$ per ogni $x \in X$. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(*i*) *F è s.c.i.;*
(*ii*) *a è s.c.s. e b è s.c.i.*

Dimostrazione. Proviamo che (*i*) implica (*ii*). Sia F s.c.i., e fissiamo $c \in \mathbb{R}$, $x \in X$ t.c. $a(x) < c$. Allora si ha

$$F(x) \cap (-\infty, c) \neq \emptyset.$$

Esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha ancora $F(x') \cap (-\infty, c) \neq \emptyset$, da cui $a(x') < c$. Pertanto a è s.c.s. Supponiamo ora $b(x) > c$, ovvero

$$F(x) \cap (c, \infty) \neq \emptyset.$$

Anche in questo caso esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha $F(x') \cap (c, \infty) \neq \emptyset$, da cui $b(x') > c$. Pertanto b è s.c.i.

Proviamo che (*ii*) implica (*i*). Evitando casi banali, supponiamo $a(x) < b(x)$. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto t.c. $F(x) \cap A \neq \emptyset$. Allora esiste $y \in A$ t.c.

$$a(x) < y < b(x).$$

Per le ipotesi su a, b, esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x')$ si ha ancora

$$a(x') < y < b(x'),$$

da cui $F(x') \cap A \neq \emptyset$. Pertanto F è s.c.i. in x. □

Analogamente:

Lemma 2.2.6. *Siano $a, b : X \to \mathbb{R}$ funzioni t.c. $a(x) \leqslant b(x)$ per ogni $x \in X$ e $F : X \to 2^{\mathbb{R}}$ definita da $F(x) = [a(x), b(x)]$ per ogni $x \in X$. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(*i*) *F è s.c.s.;*
(*ii*) *a è s.c.i. e b è s.c.s.*

Alcuni esempi illustrano le differenze tra le varie nozioni di continuità:

Esempio 2.2.7. La multifunzione $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 0 \\ [0,1] & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

è s.c.s. ma non s.c.i. Infatti la funzione $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è s.c.i. ma non s.c.s., mentre $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

è s.c.s. ma non s.c.i. (ved. Lemmi 2.2.5, 2.2.6).

Esempio 2.2.8. La multifunzione $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x < 0 \\ \{1/2\} & \text{se } x = 0 \\ [0,1] & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

è s.c.i. ma non s.c.s. La dimostrazione è analoga alla precedente.

Esempio 2.2.9. Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa. È definito per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ il *sub-differenziale*

$$\partial g(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \, y \cdot (z - x) \leqslant g(z) - g(x) \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

La multifunzione $\partial g : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ è s.c.s. Questa multifunzione, insieme alle sue varianti, è largamente usata nella teoria dell'ottimizzazione per funzioni non derivabili (ved. [11]).

I seguenti risultati estendono al caso multivoco alcune importanti proprietà delle funzioni (univoche) continue: di volta in volta, useremo la 'versione multivoca' più appropriata della continuità, fra quelle proposte dalla Definizione 2.2.1.

Lemma 2.2.10. *Sia $F : X \to 2^Y$:*

(*i*) *se F è s.c.s. a valori chiusi, allora $\mathrm{gr}(F)$ è chiuso;*
(*ii*) *se Y è compatto e $\mathrm{gr}(F)$ è chiuso, allora F è s.c.s.*

Dimostrazione. Proviamo (*i*). Poniamo

$$A = (X \times Y) \setminus \mathrm{gr}(F),$$

e proviamo che A è aperto in $X \times Y$. Infatti, per ogni $(x, y) \in A$ si ha $y \notin F(x)$. Poiché $F(x)$ è chiuso, esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

$$B_\varepsilon(y) \cap F(x) = \emptyset.$$

Poiché F è s.c.s., esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha

$$B_\varepsilon(y) \cap F(x') = \emptyset.$$

Così $B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y)$ è un intorno di (x, y) in $X \times Y$ t.c. per ogni $(x', y') \in B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y)$ si ha $y' \notin F(x')$, ovvero $(x', y') \in A$. Pertanto, A è aperto, ovvero $\mathrm{gr}(F)$ è chiuso.
Proviamo (*ii*). Sia $C \subseteq Y$ chiuso, proviamo che $F^-(C)$ è chiuso in X. Sia (x_k) una successione in $F^-(C)$ t.c. $x_k \to x$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $y_k \in F(x_k) \cap C$. L'insieme C è compatto, quindi, passando se necessario a una sotto-successione, abbiamo $y_k \to y$ per qualche $y \in C$. La successione di coppie

$$(x_k, y_k) \in \mathrm{gr}(F)$$

converge a (x, y). Poiché $\mathrm{gr}(F)$ è chiuso, si ha $(x, y) \in \mathrm{gr}(F)$, ovvero $y \in F(x)$. Dunque $x \in F^-(C)$. Per il Lemma 2.2.4, F è s.c.s. □

Il seguente risultato estende alle multifunzioni il Teorema di Weierstraß:

Teorema 2.2.11. *Siano X compatto, $F : X \to 2^Y$ s.c.s. a valori compatti. Allora $F(X)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $(A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $F(X)$ in Y. Per ogni $x \in X$ si ha

$$F(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i,$$

e $F(x)$ è compatto. Pertanto esiste un sotto-insieme $J_x \subset I$ finito t.c.

$$F(x) \subseteq \bigcup_{i \in J_x} A_i =: B_x.$$

L'insieme B_x è aperto in Y e F è s.c.s., dunque per il Lemma 2.2.4 l'insieme $F^+(B_x)$ è aperto in X. Inoltre

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} F^+(B_x)$$

è compatto, quindi esistono $p \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots x_p \in X$ t.c.

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} F^+(B_{x_k}).$$

Possiamo così estrarre da $(A_i)_{i \in I}$ un sotto-ricoprimento finito di $F(X)$:

$$F(X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B_{x_k} = \bigcup_{k=1}^{p} \bigcup_{i \in J_{x_k}} A_i.$$

Dunque, $F(X)$ è compatto. □

Il prossimo risultato estende invece il Teorema dei valori intermedi:

Teorema 2.2.12. *Siano X connesso, $F : X \to 2^Y$ semi-continua a valori connessi. Allora $F(X)$ è connesso.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: siano $A, B \subset Y$ aperti t.c.

$$F(X) \subseteq A \cup B,\ F(X) \cap A \neq \emptyset,\ F(X) \cap B \neq \emptyset,\ F(X) \cap A \cap B = \emptyset.$$

In particolare, esiste $x \in X$ t.c. $F(x) \cap A \neq \emptyset$, quindi $F^-(A) \neq \emptyset$. Proviamo che $F^-(A)$ è aperto in X. Per ogni $x \in F^-(A)$ l'insieme $F(x)$ è connesso e si ha

$$F(x) \cap A \neq \emptyset,\ A \cap B = \emptyset,$$

dunque $F(x) \subseteq A$. Dalla Definizione 2.2.1 *(iii)* segue che esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha $F(x') \cap A \neq \emptyset$, ovvero $B_\delta(x) \subseteq F^-(A)$.
Similmente si prova che $F^-(B) \neq \emptyset$ è aperto. Dalle relazioni precedenti abbiamo

$$X = F^-(A) \cup F^-(B),\ F^-(A) \cap F^-(B) = \emptyset,$$

contro l'ipotesi che X è connesso. La contraddizione raggiunta prova che $F(X)$ è connesso. □

Dal Lemma 2.2.2 e dal Teorema 2.2.12 segue che, se X è connesso e $F : X \to 2^Y$ è s.c.i. (o s.c.s.) a valori connessi, allora $F(X)$ è connesso.
Nelle prossime pagine vedremo come la regolarità di due multifunzioni F, G sia 'ereditata' da altre multifunzioni ottenute attraverso varie combinazioni da F, G. Date due multifunzioni $F : X \to 2^Y$, $G : X \to 2^Z$, definiamo il loro *prodotto cartesiano* $F \times G : X \to 2^{Y \times Z}$ ponendo per ogni $x \in X$

$$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x).$$

Il prodotto cartesiano preserva le varie forme di continuità:

Lemma 2.2.13. *Siano $F : X \to 2^Y$, $G : X \to 2^Z$ multifunzioni. Allora:*

(i) se F, G sono s.c.i., $F \times G$ è s.c.i.;
(ii) se F, G sono s.c.s. a valori compatti, $F \times G$ è s.c.s.;
(iii) se F, G sono semi-continue a valori compatti, $F \times G$ è semi-continua.

Dimostrazione. Proviamo *(i)*. Sia $A \subset Y \times Z$ un insieme aperto, e sia $x \in (F \times G)^-(A)$. Allora esistono $y \in F(x)$, $z \in G(x)$ t.c. $(y, z) \in A$. Poiché A è aperto, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ t.c.

$$B_\varepsilon(y) \times B_\varepsilon(z) \subseteq A.$$

Poiché F, G sono s.c.i., esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x' \in B_\delta(x)$ si ha

$$F(x') \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset,\ G(x') \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset.$$

Ne segue $(F(x') \times G(x')) \cap A \neq \emptyset$, ovvero $x' \in (F \times G)^-(A)$. Pertanto $(F \times G)^-(A)$ è aperto. Per il Lemma 2.2.3, $F \times G$ è s.c.i.
Similmente si provano *(ii)*, *(iii)*. □

Evidenziamo due conseguenze del Lemma 2.2.13:

Corollario 2.2.14. *Siano X connesso, $F : X \to 2^Y$ s.c.i. a valori connessi. Allora* $\mathrm{gr}(F)$ *è connesso.*

Dimostrazione. Definiamo $G : X \to 2^{X \times Y}$ ponendo per ogni $x \in X$

$$G(x) = \{x\} \times F(x).$$

Per il Lemma 2.2.13 *(i)*, G è s.c.i. Inoltre, ovviamente si ha

$$G(X) = \mathrm{gr}(F),$$

dunque per il Teorema 2.2.12 $\mathrm{gr}(F) \subset X \times Y$ è connesso. □

La seguente è una riformulazione del Corollario 2.2.14 (basta trovare una multifunzione F t.c. $\mathrm{gr}(F) = S$):

Corollario 2.2.15. *Siano X, Y, e $S \subseteq X \times Y$ verificanti una delle seguenti condizioni:*

(i) X è connesso, $S_x \neq \emptyset$ è connesso per ogni $x \in X$, S^y è aperto per ogni $y \in Y$;
(ii) Y è connesso, $S^y \neq \emptyset$ è connesso per ogni $y \in Y$, S_x è aperto per ogni $x \in X$.

Allora S è connesso.

Consideriamo ora due multifunzioni $F, G : X \to 2^Y$ e definiamo la loro *unione* e la loro *intersezione* ponendo per ogni $x \in X$

$$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x), \ (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x).$$

In generale, la regolarità di F, G non si trasmette automaticamente a $F \cup G$, $F \cap G$. Tuttavia, abbiamo il seguente risultato, di cui faremo uso in seguito:

Lemma 2.2.16. *Siano $F, G : X \to 2^Y$ s.c.i. a valori non vuoti, $r > 0$ e per ogni $x \in X$*

$$B_r(G(x)) = \big\{y \in Y : \ d_Y(y, G(x)) < r\big\}, \ H(x) = F(x) \cap B_r(G(x)).$$

Allora, la multifunzione $H : X \to 2^Y$ è s.c.i.

Dimostrazione. Sia $A \subseteq Y$ aperto. Poniamo

$$U = \big\{(y, z) \in Y \times Y : \ y \in A, \ \|y - z\| < r\big\},$$

e proviamo che U è aperto in $Y \times Y$. Si ha

$$H^-(A) = (F \times G)^-(U). \tag{2.1}$$

Infatti, per ogni $x \in H^-(A)$ esiste $y \in F(x) \cap A$ t.c. $d(y, G(x)) < r$, quindi esiste $z \in G(x)$ t.c. $\|y - z\| < r$. Allora si ha

$$(y, z) \in (F(x) \times G(x)) \cap U,$$

così che $x \in (F \times G)^-(U)$. E viceversa.
Per il Lemma 2.2.13 *(i)*, la multifunzione $F \times G$ è s.c.i., dunque $(F \times G)^-(U)$ è aperto in X (Lemma 2.2.3). Da (2.1) segue allora che $H^-(A)$ è aperto in X. Ancora per il Lemma 2.2.3, H è s.c.i. □

Ci soffermiamo su una forma 'metrica' di continuità:

Definizione 2.2.17. *Una multifunzione $F : X \to 2^Y$ è lipschitziana se esiste $L > 0$ t.c. per ogni $x, x' \in X$*

$$d_H(F(x), F(x')) \leqslant L\|x - x'\|.$$

Se $L = 1$, F è detta non-espansiva. Se $L < 1$, F è detta contrazione multivoca.

La distanza di Hausdorff d_H stabilisce una metrica su (un conveniente sotto-insieme di) 2^Y, così che la Definizione 2.2.17 introduce una specie di continuità di F come funzione (univoca) fra X e 2^Y. Questa nozione, estremamente delicata, ha con la semi-continuità inferiore la seguente relazione:

Lemma 2.2.18. *Sia $F : X \to 2^Y$ lipschitziana. Allora, F è s.c.i.*

Dimostrazione. Siano $L > 0$ una costante di Lipschitz per F, $A \subseteq Y$ aperto, $x \in F^-(A)$. Esistono $y \in F(x) \cap A$ e $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(y) \subseteq A$. Dunque, posto $\delta = \varepsilon/L > 0$, per ogni $x' \in B_\delta(x)$ abbiamo

$$d_H(F(x), F(x')) \leqslant L\|x - x'\| < r,$$

da cui $d(y, F(x')) < r$, che implica $F(x') \cap A \neq \emptyset$. Pertanto, $B_\delta(x) \subseteq F^-(A)$ e F risulta s.c.i. (Lemma 2.2.3). □

Esercizio 2.2.19. Dimostrare il Lemma 2.2.4.

Esercizio 2.2.20. Dimostrare il Lemma 2.2.6.

Esercizio 2.2.21. Disegnare i grafici delle multifunzioni degli Esempi 2.2.7, 2.2.8.

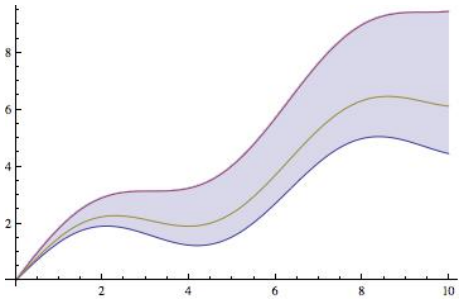

FIGURA 1. La curva evidenziata è il grafico di una selezione continua della multifunzione.

Esercizio 2.2.22. Sia $g(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Determinare la multifunzione $\partial g : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, definita come nell'Esempio 2.2.9.

Esercizio 2.2.23. Sia $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ da $F(x) = [x + 1, e^x]$. Provare che per ogni $X \subset \mathbb{R}$ compatto, $F(X)$ è compatto.

Esercizio 2.2.24. Completare la dimostrazione del Lemma 2.2.13.

Esercizio 2.2.25. Completare la dimostrazione del Corollario 2.2.15.

2.3. **Selezioni continue.** Il legame tra analisi multivoca e univoca è dato dalla seguente nozione:

Definizione 2.3.1. *Siano $F : X \to 2^Y$, $f : X \to Y$. La funzione f è una selezione di F se $f(x) \in F(x)$ per ogni $x \in X$.*

Equivalentemente, f è una selezione di F se $\mathrm{gr}(f) \subseteq \mathrm{gr}(F)$ (fig. 1). Ovviamente ogni multifunzione a valori non vuoti ammette almeno una selezione. Tuttavia, queste possono in generale essere irregolari: per esempio, la multifunzione dell'Esempio 2.2.7 non ha alcuna selezione continua.

Il problema dell'esistenza di selezioni continue per una multifunzione $F : X \to 2^Y$ è stato affrontato in [27–29], sotto ipotesi molto generali. Dimostriamo una versione semplificata di questi risultati, cominciando con un lemma di approssimazione:

Lemma 2.3.2. *Sia $F : X \to 2^Y$ una multifunzione s.c.i. a valori convessi. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f_\varepsilon : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$*

$$d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$ poniamo $A_y = F^-(B_\varepsilon(y))$. La famiglia $(A_y)_{y\in Y}$ è un ricoprimento aperto di X, che è uno spazio para-compatto (ved. [10, p. 157]). Pertanto esiste un raffinamento di $(A_y)_{y\in Y}$ *localmente finito*, ovvero un altro ricoprimento aperto $(E_y)_{y\in Y}$ di X t.c. per ogni $y \in Y$ si ha $E_y \subseteq A_y$, e inoltre per ogni $x \in X$ esistono $\rho > 0$, $y_1, \dots y_p \in Y$ ($p \in \mathbb{N}$) t.c. per ogni $y \in Y$, $y \neq y_1, \dots y_p$ si ha

$$B_\rho(x) \cap E_y = \emptyset.$$

Al ricoprimento $(E_y)_{y\in Y}$, a sua volta, è subordinata una *partizione continua dell'unità* (ved. [10, p. 223]), ovvero esistono una famiglia $(\varphi_y)_{y\in Y}$ di funzioni continue $\varphi_y : X \to [0, 1]$ e una famiglia $(C_y)_{y\in Y}$ di sotto-insiemi chiusi di X t.c. per ogni $y \in Y$ si ha $C_y \subset E_y$, $\varphi_y(x) = 0$ per ogni $x \in X \setminus C_y$, e per ogni $x \in X$

$$\sum_{y\in Y} \varphi_y(x) = 1$$

(la somma è finita, a meno di addendi nulli). Per ogni $x \in X$ poniamo

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{y\in Y} \varphi_y(x) y.$$

Proviamo che la funzione $f_\varepsilon : X \to Y$ è continua. Per ogni $x \in X$ siano $\rho > 0$, $y_1, \dots y_p \in Y$ come sopra. Dunque, per ogni $x' \in B_\rho(x)$ abbiamo $\varphi_y(x') = 0$ per ogni $y \neq y_1, \dots y_p$, da cui

$$f_\varepsilon(x') = \sum_{k=1}^{p} \varphi_{y_k}(x') y_k$$

Come combinazione di un numero finito di funzioni continue, f_ε è continua in x. Proviamo infine la formula metrica. Procedendo come sopra, assumiamo che per ogni $k \in \{1, \dots p\}$ sia $\varphi_{y_k}(x) > 0$, da cui $x \in A_{y_k}$, pertanto esiste $w_k \in F(x)$ t.c. $\|w_k - y_k\| < \varepsilon$. Poniamo

$$w = \sum_{k=1}^{p} \varphi_{y_k}(x) w_k.$$

Poiché $F(x)$ è convesso, abbiamo $w \in F(x)$ e anche

$$\|f_\varepsilon(x) - w\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \varphi_{y_k}(x) \|w_k - y_k\| < \varepsilon,$$

da cui $d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$. □

Nel teorema di selezione si aggiunge l'ipotesi che i valori di F siano *chiusi*:

Teorema 2.3.3. (Michael [27]) *Sia $F : X \to 2^Y$ una multifunzione s.c.i. a valori convessi e chiusi. Allora, F ha una selezione continua.*

Dimostrazione. Costruiamo una successione (f_k) di funzioni continue $f_k : X \to Y$ t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$

$$d(f_k(x), F(x)) < \frac{1}{2^k}, \ \|f_k(x) - f_{k+1}(x)\| < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{2.2}$$

Procediamo per induzione:

- Per $k = 1$, applichiamo il Lemma 2.3.2 con $\varepsilon = 1/2$ e troviamo $f_1 : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$
$$d(f_1(x), F(x)) < \frac{1}{2}.$$
- Fissato $k \in \mathbb{N}$, assumiamo che esistano $f_1, \dots f_k$ verificanti (2.2). Poniamo per ogni $x \in X$
$$F_k(x) = F(x) \cap B_{1/2^k}(f_k(x)),$$
così che $F_k : X \to 2^Y$ è s.c.i. (Lemma 2.2.16). Inoltre, per ogni $x \in X$ l'insieme $F_k(x)$ è non vuoto per (2.2) e convesso. Applichiamo ancora il Lemma 2.3.2 con $\varepsilon = 1/2^{k+1}$, per cui esiste $f_{k+1} : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$
$$d(f_{k+1}(x), F_k(x)) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$
Dunque, per ogni $x \in X$ esiste $y_x \in F_k(x)$ t.c. $\|f_{k+1}(x) - y_k\| < 1/2^{k+1}$, da cui
$$\|f_{k+1}(x) - f_k(x)\| \leqslant \|f_{k+1}(x) - y_x\| + \|y_x - f_k(x)\| < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}},$$
pertanto f_{k+1} verifica (2.2).

Per (2.2), la successione (f_k) è di Cauchy uniformemente in X. Pertanto, esiste $f : X \to Y$ continua t.c. $f_k \to f$ uniformemente in X. Passando al limite in (2.2) per $k \to \infty$, abbiamo per ogni $x \in X$

$$d(f(x), F(x)) = 0.$$

Poiché $F(x)$ è chiuso, ne segue $f(x) \in F(x)$. Dunque f è una selezione continua di F. □

Una conseguenza importante è il seguente risultato di selezione-estensione:

Corollario 2.3.4. *Siano $F : X \to 2^Y$ s.c.i. a valori convessi e chiusi, $C \subset X$ chiuso, $g : C \to Y$ continua t.c. $g(x) \in F(x)$ per ogni $x \in C$. Allora esiste una selezione continua $f : X \to Y$ di F, t.c. $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in C$.*

Dimostrazione. Poniamo per ogni $x \in X$

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \{g(x)\} & \text{se } x \in C \\ F(x) & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

Chiaramente, $\tilde{F} : X \to 2^Y$ ha valori chiusi e convessi. Inoltre $\tilde{F}$ è s.c.i. Infatti, per ogni $A \subseteq Y$ aperto, $x \in \tilde{F}^-(A)$, distinguiamo due casi:

- Se $x \in C$, allora $g(x) \in A$. Poiché g è continua, esiste $\delta > 0$ t.c. $g(x') \in A$ per ogni $x' \in B_\delta(x)$. Inoltre $F(x) \cap A \neq \emptyset$. Poiché F è s.c.i., scegliendo $\delta > 0$ più piccolo se necessario, abbiamo $F(x') \cap A \neq \emptyset$ per ogni $x' \in B_\delta(x)$. Ne segue che per ogni $x' \in B_\delta(x)$
$$\tilde{F}(x') \cap A \neq \emptyset.$$
- Se $x \notin C$, la tesi segue dalla semi-continuità inferiore di F.

Per il Teorema 2.3.3, esiste una selezione continua $f : X \to Y$ di $\tilde{F}$, che verifica la tesi. □

Osservazione 2.3.5. Il Teorema 2.3.3 e le sue conseguenze sono validi sotto le seguenti ipotesi generali: X è uno spazio topologico *para-compatto* (ved. [10, p. 157]), Y uno spazio di Banach, e F è s.c.i. a valori chiusi e convessi. Osserviamo che ogni spazio metrico è para-compatto.

Esercizio 2.3.6. Usando il Corollario 2.3.4, dimostrare il Teorema di estensione di Tietze (ved. [10]).

Esercizio 2.3.7. Sia $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare. Usando il Teorema 2.3.3, dimostrare che esiste una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua t.c. $\phi(f(y)) = y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (si applica il Teorema della mappa aperta, ved. [40]).

2.4. **Punti fissi.** Molti problemi in analisi si possono scrivere nella forma

$$f(x) = x,$$

dove $f : X \to X$ è una funzione da un insieme X in se stesso. Secondo le proprietà di f e di X, si dimostra l'esistenza di soluzioni della precedente equazione sotto varie ipotesi. Quesi risultati prendono il nome di *teoremi di punto fisso*, fra i quali distinguiamo i risultati di tipo *metrico* basati sulle proprietà delle contrazioni (Banach-Caccioppoli), e quelli di tipo *topologico* in cui si usa la convessità del dominio X (Brouwer, Schauder, Cauty etc.). Per questa teoria ved. [19].

Nel caso multivoco, la nozione fondamentale di questa teoria si estende come segue:

Definizione 2.4.1. *Siano X un insieme non vuoto, $F : X \to 2^X$, $x \in X$: x è un punto fisso di F se $x \in F(x)$. L'insieme dei punti fissi di F è denotato* $\mathrm{fix}(F)$.

Il seguente teorema di punto fisso per le contrazioni multivoche (ved. Definizione 2.2.17) estende il classico Teorema di Banach-Caccioppoli, ma si perde in generale l'*unicità* del punto fisso:

Teorema 2.4.2. (Nadler [33]) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, $F : X \to 2^X$ una contrazione multivoca a valori chiusi, allora* $\mathrm{fix}(F) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Siano $L \in (0, 1)$ una costante di Lipschitz per F, $\beta > 1$, e $x_0 \in X$. Scartando casi banali, supponiamo $x_0 \notin F(x_0)$, da cui $\delta := d(x_0, F(x_0)) > 0$. Costruiamo una successione (x_k) in X t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$x_k \in F(x_{k-1}),\ \|x_k - x_{k-1}\| < \beta\delta L^{k-1}. \tag{2.3}$$

Procediamo per induzione:

- Per $k = 1$, poiché $\beta > 1$, esiste $x_1 \in F(x_0)$ t.c.
$$\|x_1 - x_0\| < \beta\delta.$$
- Per $k > 1$, assumiamo l'esistenza di $x_1, \dots x_k \in X$ verificanti (2.3). Ne segue
$$\begin{aligned} d(x_k, F(x_k)) &\leqslant d_H(F(x_{k-1}), F(x_k)) \\ &\leqslant L\|x_{k-1} - x_k\| < \beta\delta L^k, \end{aligned}$$
da cui esiste $x_{k+1} \in F(x_k)$ t.c.
$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \beta\delta L^k.$$

Proviamo che (x_k) è una successione di Cauchy in X. Per ogni $h, k \in \mathbb{N}$, $h < k$, da (2.3) abbiamo
$$\|x_k - x_h\| \leqslant \sum_{i=h+1}^{k} \|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \beta\delta \sum_{i=h+1}^{k} L^{i-1}.$$
Per il Criterio di Cauchy per le serie numeriche segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $\nu < h < k$
$$\sum_{i=h+1}^{k} L^{i-1} < \frac{\varepsilon}{\beta\delta},$$
da cui $\|x_k - x_h\| < \varepsilon$. Poiché X è completo, abbiamo esiste $\bar{x} \in X$ t.c. $x_k \to \bar{x}$. Ancora per (2.3), si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$
$$d(x_k, F(\bar{x})) \leqslant d_H(F(x_{k-1}), F(\bar{x})) \leqslant L\|x_{k-1} - \bar{x}\|,$$
da cui, passando al limite per $k \to \infty$, si ha $d(\bar{x}, F(\bar{x})) = 0$. Poiché $F(\bar{x})$ è chiuso, abbiamo $\bar{x} \in F(\bar{x})$, ovvero $\bar{x} \in \mathrm{fix}(F)$. □

Passando ai teoremi di punto fisso topologici, ricordiamo il seguente risultato per il caso univoco (ved. [19, p. 119]):

Teorema 2.4.3. (Schauder) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto convesso, $f : X \to X$ continua. Allora esiste $\bar{x} \in X$ t.c. $\bar{x} = f(\bar{x})$.*

Nel caso multivoco, la difficoltà principale dell'estensione di tale risultato consiste nell'ambiguità del concetto di 'continuità' per le multifunzioni. Il caso più semplice è quello di una multifunzione s.c.i.:

Teorema 2.4.4. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.i. a valori chiusi e convessi. Allora,* $\mathrm{fix}(F) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Per il Teorema 2.3.3, F ha una selezione continua $f : X \to X$. Per il Teorema 2.4.3 esiste $\bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Dunque $\bar{x} \in F(\bar{x})$. □

Il caso di una multifunzione s.c.s. (fondamentale per le applicazioni in teoria dei giochi) è più complesso, a causa della generale mancanza di selezioni continue. Occorre procedere per approssimazione, mediante il seguente lemma tecnico:

Lemma 2.4.5. (Cellina [8]) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ s.c.s. a valori convessi. Allora, per ogni $r > 0$ esiste $g_r : X \to \mathbb{R}^n$ continua t.c. per ogni $x \in X$*
$$d((x, g_r(x)), \mathrm{gr}(F)) \leqslant r^{5}.$$

[5] Qui denotiamo con d la distanza in $X \times \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Fissiamo $r > 0$, e per ogni $x \in X$ denotiamo

$$B_{r/2}(F(x)) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : \, d(y, F(x)) < \frac{r}{2} \Big\},$$

che è un insieme aperto. Per il Lemma 2.2.4 *(ii)*, l'insieme $F^+(B_{r/2}(F(x)))$ è a sua volta aperto, quindi esiste $\rho > 0$ t.c.

$$F(B_\rho(x)) \subseteq B_{r/2}(F(x)). \tag{2.4}$$

Poniamo allora

$$\rho(x) = \; sup \Big\{ \rho \in \Big(0, \frac{r}{2}\Big] : \, F(B_\rho(x)) \subseteq B_{r/2}(F(x')) \text{ per qualche } x' \in B_\rho(x) \Big\},$$

e proviamo che

$$\inf_{x \in X} \rho(x) =: \rho_0 > 0. \tag{2.5}$$

Procediamo per assurdo, supponendo $\rho_0 = 0$. Allora esiste una successione (x_k) in X t.c. $\rho(x_k) = \rho_k \to 0$. Poiché X è compatto, passando se necessario a una sotto-successione abbiamo $x_k \to \bar{x}$ in X. Per (2.4), esiste $\bar{\rho} > 0$ t.c.

$$F(B_{\bar{\rho}}(\bar{x})) \subseteq B_{r/2}(F(\bar{x})).$$

Per $k \in \mathbb{N}$ abbastanza grande si ha

$$\max \big\{ \rho_k, \|x_k - \bar{x}\| \big\} < \frac{\bar{\rho}}{3}.$$

Ne segue che $\bar{x} \in B_{\bar{\rho}/3}(x_k)$, da cui

$$F(B_{\bar{\rho}/3}(x_k)) \subseteq F(B_{\bar{\rho}}(\bar{x})) \subseteq B_{r/2}(F(\bar{x})).$$

Per definizione di ρ_k abbiamo allora $\bar{\rho}/3 \leqslant \rho_k$, assurdo. La contraddizione raggiunta prova (2.5). Poniamo per ogni $x \in X$

$$G(x) = F(B_{\rho_0/2}(x)).$$

Proviamo che $G^-(y)$ è aperto in X per ogni $y \in F(X)$. Infatti, per ogni $x \in G^-(y)$ esiste $x' \in B_{\rho_0/2}(x)$ t.c. $y \in F(x')$. Poniamo

$$\delta = \frac{\rho_0}{4} - \frac{\|x - x'\|}{2} > 0,$$

Per ogni $x'' \in B_\delta(x)$ si ha

$$\begin{aligned} \|x'' - x'\| &\leqslant \|x'' - x\| + \|x - x'\| \\ &< \Big(\frac{\rho_0}{4} - \frac{\|x - x'\|}{2} \Big) + \|x - x'\| < \frac{\rho_0}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$y \in F(x') \subset F(B_{\rho_0/2}(x'')),$$

ovvero $x'' \in G^-(y)$. Così abbiamo $B_{\rho_0/2}(x) \subseteq G^-(y)$. Pertanto $G^-(y)$ è aperto.
Abbiamo così costruito un ricoprimento aperto $(G^-(y))_{y \in F(X)}$ di X, che per ipotesi è compatto. Da esso possiamo estrarre un sotto-ricoprimento finito, ovvero esistono $y_1, \dots y_p \in F(X)$ t.c.

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} G^-(y_k).$$

Come nel Lemma 2.3.2, definiamo una partizione continua dell'unità subordinata a tale ricoprimento, ovvero una famiglia (φ_k) di funzioni continue $\varphi_k : X \to [0,1]$ t.c. per ogni $k \in \{1, \dots p\}$, $x \in X \setminus G^-(y_k)$ si ha $\varphi_k(x) = 0$ e per ogni $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x) = 1.$$

Possiamo ora definire la funzione continua $g_r : X \to \mathbb{R}^n$ richiesta ponendo per ogni $x \in X$

$$g_r(x) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x) y_k.$$

Dimostriamo ora la proprietà di approssimazione. Fissiamo $x \in X$. Per (2.5), esistono $\rho > 0$, $x' \in B_\rho(x)$ t.c.

$$\frac{\rho_0}{2} < \rho \leqslant \frac{r}{2},\ F(B_\rho(x)) \subseteq B_{r/2}(F(x)).$$

Si ha allora

$$G(x) \subseteq B_{r/2}(F(x')).$$

D'altra parte, ovviamente abbiamo

$$G(x) \subseteq F(X) \subseteq \operatorname{conv}(F(X)).$$

Posto

$$C = B_{r/2}(F(x')) \cap \operatorname{conv}(F(X)),$$

vediamo subito che C è convesso (perché $F(x')$ è convesso) e $G(x) \subseteq C$. A meno di riordinamenti, supponiamo che per un opportuno $q \in \{1, \dots p\}$ si abbia

$$\varphi_k(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } k = 1, \dots q \\ = 0 & \text{per } k = q+1, \dots p. \end{cases}$$

Per ogni $k \in \{1, \dots q\}$ abbiamo $x \in G^-(y_k)$, ovvero $y_k \in G(x)$. In particolare, $y_k \in C$, da cui per convessità

$$g_r(x) = \sum_{k=1}^{q} \varphi_k(x) y_k \in C.$$

Dalle relazioni precedenti segue

$$\begin{aligned} d((x, g_r(x)), \operatorname{gr}(F)) &\leqslant d((x, g_r(x)), (x', g_r(x))) + d((x', g_r(x)), \operatorname{gr}(F)) \\ &\leqslant \|x - x'\| + d(g_r(x), F(x')) \\ &\leqslant \rho + \frac{r}{2} \leqslant r, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Siamo ora in grado di dimostrare il più noto teorema di punto fisso per multifunzioni:

Teorema 2.4.6. (Kakutani [20]) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.s. a valori chiusi convessi. Allora,* $\operatorname{fix}(F) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.4.5, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una funzione continua $g_k : X \to X$ t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_k(x)),\ \operatorname{gr}(F)) < \frac{1}{k}.$$

Per il già citato Teorema 2.4.3 esiste $x_k \in X$ t.c. $g_k(x_k) = x_k$. Poiché X è compatto, passando a una sotto-successione abbiamo $x_k \to \bar{x}$ in X. Per la relazione precedente, si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$d((x_k, x_k), \operatorname{gr}(F)) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ ricaviamo

$$d((\bar{x}, \bar{x}), \operatorname{gr}(F)) = 0.$$

Poiché $\operatorname{gr}(F)$ è chiuso in $X \times X$ (Lemma 2.2.10 *(i)*), abbiamo $(\bar{x}, \bar{x}) \in \operatorname{gr}(F)$, ovvero $\bar{x} \in F(\bar{x})$, il che conclude la dimostrazione. □

Il seguente esempio illustra il senso degli ultimi due risultati:

Esempio 2.4.7. Poniamo per ogni $x \in [-1, 1]$

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{se } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Applicando i Lemmi 2.2.5, 2.2.6, si vede facilmente che $F : [-1, 1] \to 2^{[-1,1]}$ è s.c.s. ma non s.c.i. In effetti, F non ha selezioni continue, e per dimostrare l'esistenza di un punto fisso di F non si può applicare il Teorema 2.4.4. Tuttavia, ponendo per ogni $k \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in [-1, 1]$

$$g_k(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(kx),$$

definiamo una successione (g_k) di funzioni continue il cui grafico approssima quello di F (Lemma 2.4.5). Per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo ovviamente $g_k(0) = 0$, da cui segue

$$0 \in \operatorname{fix}(F).$$

In mancanza di punti fissi *esatti*, può essere talvolta utile individuare dei punti fissi *approssimati* per una multifunzione. Questa nozione, introdotta in [4], è definita come segue:

Definizione 2.4.8. *Siano $F : X \to 2^X$, $\varepsilon > 0$, $x \in X$: x è un ε-punto fisso di F se $d(x, F(x)) \leqslant \varepsilon$. L'insieme degli ε-punti fissi di F è denotato* $\operatorname{fix}^\varepsilon(F)$.

Vale in merito il seguente risultato (senza ipotesi di compattezza):

Teorema 2.4.9. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ limitato, convesso, t.c.* $\operatorname{int}(X) \neq \emptyset$, *$F : X \to 2^X$ a valori convessi, t.c.* $\operatorname{gr}(F)$ *è chiuso. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha* $\operatorname{fix}^\varepsilon(F) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $X = B_1(0)$ (il caso generale si tratta in maniera simile) e $0 < \varepsilon < 1$. Poniamo

$$\tilde{X} = (1 - \varepsilon)\overline{X} = \overline{B}_{1-\varepsilon}(0).$$

Ovviamente $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$ è convesso e compatto. Definiamo $G : \tilde{X} \to 2^{\tilde{X}}$ ponendo per ogni $x \in \tilde{X}$

$$G(x) = (1 - \varepsilon)\overline{F(x)}.$$

La multifunzione G ha valori convessi e compatti, inoltre si dimostra che $\operatorname{gr}(G)$ è chiuso. Per il Lemma 2.2.10 *(ii)*, G è s.c.s. Possiamo allora applicare il Teorema 2.4.6, per cui esiste $\bar{x} \in \tilde{X}$ t.c. $\bar{x} \in G(\bar{x})$. Ovvero, esiste $\bar{y} \in \overline{F(\bar{x})}$ t.c.

$$\bar{x} = (1 - \varepsilon)\bar{y}.$$

Poiché $\bar{y} \in \tilde{X}$, abbiamo in particolare $\|\bar{y}\| < 1$. Inoltre, poiché $\bar{y} \in \overline{F(\bar{x})}$ abbiamo

$$d(\bar{x}, F(\bar{x})) \leqslant \|\bar{x} - \bar{y}\| = \varepsilon\|\bar{y}\| < \varepsilon,$$

da cui $\bar{x} \in \operatorname{fix}^\varepsilon(F)$. □

Osservazione 2.4.10. Anche i risultati di questa sotto-sezione valgono in contesti molto più generali. Il Teorema 2.4.2 vale se X è uno spazio metrico completo [33]. Il Teorema 2.4.4 vale se X è un sotto-insieme compatto e convesso di uno spazio di Banach, anche di dimensione infinita: questo pone un problema, in quanto la *compattezza* è un'ipotesi molto restrittiva per i sotto-insiemi di uno spazio di Banach di dimensione infinita (ved. [13] per una introduzione generale alla teoria degli spazi di Banach). Versioni alternative del Teorema 2.4.4, in cui X è un sotto-insieme compatto e convesso di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, sono state dimostrate in [17] per una multifunzione a valori chiusi convessi e a grafico chiuso, e in [5] per una multifunzione F a valori convessi t.c. $F^-(y)$ è aperto per ogni $y \in X$ (questi risultati consentono applicazioni in cui X è un sotto-insieme *debolmente compatto* di uno spazio di Banach riflessivo di dimensione infinita). Infine, il Teorema 2.4.9 vale se X è un sotto-insieme limitato convesso di uno spazio di Banach riflessivo t.c. $\text{int}(X) \neq \emptyset$ (ipotesi alternativa a quella del Teorema 2.4.4, in quanto in ogni spazio di Banach di dimensione infinita, qualsiasi insieme compatto ha interno vuoto) e F ha valori convessi e grafico debolmente chiuso.

Esercizio 2.4.11. Siano $X = [0, \infty)$ e $F : X \to 2^X$ definita da

$$F(x) = \left[0, \frac{x}{2}\right].$$

Quali sono i punti fissi di F?

Esercizio 2.4.12. Poniamo

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

e $F : X \to 2^X$ la multifunzione che associa a ogni punto di X di modulo $r \in [0, 1]$ il cerchio chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio $r/2$. Quali sono i punti fissi di F?

Esercizio 2.4.13. Poniamo

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

e $F : X \to 2^X$ la multifunzione che associa a ogni punto $(x, y) \in X$ il segmento congiungente il punto $(-x, -y)$ con la circonferenza esterna di X, ortogonale ad essa. Si ha $\text{fix}(F) = \emptyset$. Quale ipotesi del Teorema 2.4.6 non è soddisfatta?

2.5. **Il teorema KKM.** Concludiamo questa sezione con un celebre *teorema di coincidenza* dovuto a Knaster, Kuratowski & Mazurkiewicz [21], in base al quale la famiglia dei valori di una multifunzione (soggetta a una peculiare ipotesi geometrica) ha la proprietà dell'intersezione finita (ved. anche [19, p. 37]).

Definizione 2.5.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$. Diciamo che F soddisfa la condizione (KKM) se, per ogni $p \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots x_p \in X$, si ha*

$$\text{conv}(x_1, \dots x_p) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} F(x_k).$$

Chiaramente, se F soddisfa (KKM) allora $\text{fix}(F) = X$. Inoltre, l'unione di due valori $F(x_1)$ e $F(x_2)$ contiene il segmento congiungente x_1 e x_2, e così via.

Teorema 2.5.2. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ una multifunzione soddisfacente (KKM) a valori chiusi. Allora, per ogni $p \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots x_p \in X$ si ha*

$$\bigcap_{k=1}^{p} F(x_k) \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che esistano $x_1, \dots x_p \in X$ t.c.

$$\bigcap_{k=1}^{p} F(x_k) = \emptyset. \tag{2.6}$$

Poniamo $C = \mathrm{conv}(x_1, \dots x_p)$, insieme compatto e convesso in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $k \in \{1, \dots p\}$ definiamo una funzione continua $\lambda_k : C \to \mathbb{R}$ ponendo per ogni $x \in C$

$$\lambda_k(x) = d(x, F(x_k)).$$

Essendo F a valori chiusi, abbiamo $\lambda_k(x) = 0$ se e solo se $x \in F(x_k)$. Dimostriamo che per ogni $x \in C$ esiste almeno un indice $k \in \{1, \dots p\}$ t.c.

$$\lambda_k(x) > 0.$$

Infatti, se $\lambda_k(x) = 0$ per ogni k, abbiamo $x \in F(x_k)$ per ogni $k \in \{1, \dots p\}$, contro (2.6). Pertanto, per ogni $x \in C$ possiamo porre

$$f(x) = \frac{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(x) x_k}{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(x)}.$$

Osserviamo che $f(x)$ è una combinazione convessa dei punti $x_1, \dots x_p$, pertanto $f : C \to C$. Inoltre, f è ovviamente una funzione continua. Per il Teorema 2.4.3, esiste $\bar{x} \in C$ t.c. $\bar{x} = f(\bar{x})$. Per semplicità supponiamo che si abbia $\lambda_k(\bar{x}) > 0$ per $k = 1, \dots q$ e $\lambda_k(\bar{x}) = 0$ per $k = q+1, \dots p$. Allora, applicando la condizione (KKM) otteniamo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k(\bar{x}) x_k}{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k(\bar{x})} \in \mathrm{conv}\,(x_1, \dots x_q) \subset \bigcup_{k=1}^{q} F(x_k).$$

Dunque esiste $k \in \{1, \dots q\}$ t.c. $\bar{x} \in F(x_k)$, da cui $\lambda_k(\bar{x}) = 0$, assurdo. La contraddizione raggiunta smentisce (2.6) e conclude la dimostrazione. □

Come conseguenza, si può provare che esiste un punto comune a *tutti* i valori della multifunzione:

Corollario 2.5.3. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ una multifunzione soddisfacente (KKM) a valori chiusi, $x_0 \in X$ t.c. $F(x_0)$ è compatto. Allora si ha*

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Osserviamo che F soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 2.5.2, quindi per ogni $x_1, \dots x_p \in X$ si ha

$$\bigcap_{k=1}^{p} F(x_k) \neq \emptyset.$$

Per ogni $x \in X$ poniamo

$$\tilde{F}(x) = F(x) \cap F(x_0).$$

La multifunzione $\tilde{F} : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ ha valori non vuoti e compatti. Inoltre, essi hanno la proprietà dell'intersezione finita: per ogni $x_1, \dots x_p \in X$ si ha infatti

$$\bigcap_{k=1}^{p} \tilde{F}(x_k) = \bigcap_{k=0}^{p} F(x_k) \neq \emptyset.$$

Dunque, $(\tilde{F}(x))_{x \in X}$ è una famiglia di sotto-insiemi chiusi del compatto $F(x_0)$, soddisfacente la proprietà dell'intersezione finita. Pertanto (ved. [10, p. 135]) esiste $\bar{x} \in X$ t.c.

$$\bar{x} \in \bigcap_{x \in X} \tilde{F}(x) = \bigcap_{x \in X} F(x),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 2.5.4. Il Teorema 2.5.2 non ha (quasi) ipotesi topologiche. Esso si estende a un arbitrario spazio vettoriale, sotto l'ipotesi che per ogni $x \in X$ l'insieme $F(x)$ sia *finitamente chiuso* (ovvero, che la sua intersezione con qualsiasi sottospazio di dimensione finita sia chiusa).

Esercizio 2.5.5. Per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ di modulo $r \geqslant 0$ poniamo

$$F_1(x, y) = \overline{B}_r(0, 0), \ F_2(x, y) = \overline{B}_r(x, y).$$

Quale delle due multifunzioni $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}^2}$ soddisfa (KKM)?

3. Giochi non-cooperativi

Ciascuno deve impostare la propria strategia di vita sul presupposto dell'ostilità altrui.
E. Limonov

In questo capitolo riprendiamo il concetto di *equilibrio di Nash*: usando gli strumenti matematici introdotti nelle sezioni precedenti, dimostreremo l'esistenza di (almeno) un equilibrio di Nash per un gioco statico non-cooperativo deterministico con due giocatori (alcune nozioni qui introdotte si possono estendere al caso di più giocatori). Quindi presentiamo alcune applicazioni, e discutiamo brevemente il concetto di equilibrio approssimato. Per approfondimenti rimandiamo ai testi [1,12,16].

3.1. **Strategie miste e teorema di Nash.** Consideriamo un gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$, con due giocatori P, Q, insiemi di strategie X, Y, e funzioni di pay-off $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$. Ricordiamo la Definizione 1.2.1 nella seguente forma semplificata:

Definizione 3.1.1. *Un equilibrio (di Nash) per* Γ *è una coppia* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ *t.c.*

(*i*) $f(\bar{x}, \bar{y}) = \max_X f(\cdot, \bar{y})$;
(*ii*) $g(\bar{x}, \bar{y}) = \max_Y g(\bar{x}, \cdot)$.

L'insieme degli equilibri per Γ *si denota* $\mathrm{Ne}(\Gamma)$.

Ricordiamo anche la versione per 2 giocatori della Definizione 1.2.2:

Definizione 3.1.2. *Nel gioco* $\Gamma = (X, Y, f, g)$*, la coppia* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ *è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia* $(x, y) \in X \times Y$ *verificante una delle seguenti condizioni:*

(*i*) $f(x, y) > f(\bar{x}, y)$, $g(x, y) \geqslant g(x, \bar{y})$;
(*ii*) $f(x, y) \geqslant f(\bar{x}, y)$, $g(x, y) > g(x, \bar{y})$.

L'insieme degli ottimi per Γ *si denota* $\mathrm{Po}(\Gamma)$.

Negli esempi visti finora abbiamo considerato insiemi di strategie finiti, del tipo $X = \{x_1, \dots x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Vediamo ora come tale caso si possa estendere a un modello più generale, basato sul calcolo delle probabilità (ved. [41]):

Definizione 3.1.3. *Nel gioco* Γ*, una strategia mista per il giocatore* P *è una distribuzione di probablilità sull'insieme delle strategie* X*, ovvero una funzione* $p : X \to [0, 1]$ *t.c.*

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1.$$

Gli elementi di X *sono detti strategie pure, e corrispondono alle distribuzioni definite da* $p_i(x_j) = \delta_{ij}$ *(*$i, j = 1, \dots n$*)*[6]*. Analogamente si definiscono le strategie miste per* Q*.*

L'impiego di strategie miste corrisponde al seguente modello: il giocatore P ha a disposizione un capitale pari a 1, da scommettere su un insieme finito di opzioni X in vista di una vincita; P punta su x_i una somma corrispondente alla probabilità di successo $p(x_i)$ che associa a tale scelta (analogamente, P può essere immaginato come un investitore che alloca un patrimonio su varie attività di cui prevede la redditività).

Forniamo una rappresentazione geometrica della Definizione 3.1.3. Identifichiamo l'elemento $x_i \in X$ con il punto $e_i = (0, \dots 1, \dots 0) \in \mathbb{R}^n$ (che ha la coordinata i-esima 1 e tutte le altre 0), e ogni strategia

[6]Adoperiamo il simbolo di Kronecker δ_{ij}, che vale 1 per $i = j$, 0 per $i \neq j$.

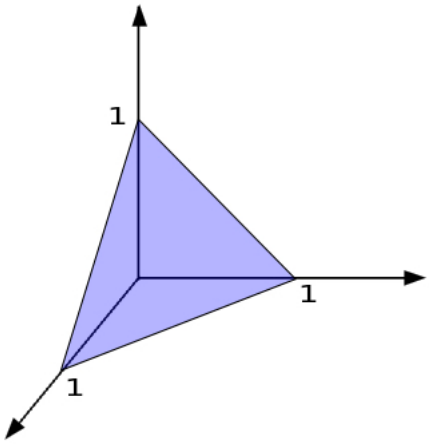

FIGURA 2. Simplesso 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$.

mista p con il punto $(p(x_1), \dots p(x_n))$. L'insieme delle strategie miste di P è allora rappresentato dall'insieme

$$\tilde{X} = \Big\{(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = 1\Big\},$$

detto *simplesso* $(n-1)$-dimensionale di vertici $e_1, \dots e_n$, per $n = 2$ esso è un segmento, per $n = 3$ un triangolo equilatero (fig. 2), etc. Analogamente, l'insieme delle strategie miste di Q è rappresentato dal simplesso $(m-1)$-dimensionale $\tilde{Y}$ in $\mathbb{R}^m$.
La funzione di pay-off $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ viene estesa ponendo per ogni $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{Y}$

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_i \tilde{y}_j f(x_i, y_j),$$

e analogamente si definisce $\tilde{g}$. In questo modo abbiamo definito il gioco esteso $\tilde{\Gamma} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f}, \tilde{g})$. Osserviamo che in $\tilde{\Gamma}$ gli insiemi di strategie sono compatti e convessi, e le funzioni di pay-off sono continue (rispetto alla topologia euclidea). Tali proprietà matematiche sono cruciali nella discussione che segue.

Esempio 3.1.4. Nel gioco considerato nell'Esempio 1.1.5, esteso alle strategie miste, si pone $X = Y = [0, 1]$: ogni punto $(x, y) \in [0, 1]^2$ rappresenta la valutazione da parte di P che l'evento p abbia probabilità x e d invece probabilità $(1 - x)$, mentre Q attribuisce a p probabilità y e a d probabilità $(1 - y)$. I pay-off dei due giocatori sono rispettivamente

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy - x(1 - y) - (1 - x)y + (1 - x)(1 - y) \\ &= 4xy - 2x - 2y + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -xy + x(1 - y) + (1 - x)y - (1 - x)(1 - y) \\ &= -4xy + 2x + 2y - 1 \end{aligned}$$

(si noti che $f(x, y) = -g(x, y)$).

Osservazione 3.1.5. La Definizione 3.1.3 si può estendere al caso in cui X è infinito e dotato di una struttura di spazio misurabile (ved. [40]): allora si definisce $p : X \to [0, 1]$ come una funzione misurabile t.c.

$$\int_X p(x)\, dx = 1.$$

Si deve immaginare il giocatore P come uno scommettitore che associa ad ogni $x \in X$ una probabilità $p(x)$ e punta in ragione di tale previsione.

In accordo con quanto osservato sopra, nel seguito assumiamo che Γ verifichi le proprietà tipiche di un gioco in strategie miste. Ad esse aggiungiamo una ulteriore condizione di tipo geometrico. Ricordiamo che una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$, definita su un insieme X convesso, è detta *quasi-convessa* (*quasi-concava*) se per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\bar{\varphi}^c = \big\{x \in X : \varphi(x) \leqslant c\big\} \ (\bar{\varphi}_c = \big\{x \in X : \varphi(x) \geqslant c\big\})$$

è convesso (se non è vuoto). Possiamo ora dimostrare il più noto risultato della teoria dei giochi:

Teorema 3.1.6. (Nash [34]) *Sia $\Gamma = (X, Y, f, g)$ un gioco con $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) convessi e compatti, $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ continue e soddisfacenti*

(i) $f(\cdot, y)$ è quasi-concava per ogni $y \in Y$;
(ii) $g(x, \cdot)$ è quasi-concava per ogni $x \in X$.

Allora $\mathrm{Ne}(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Il procedimento è basato sulle *multifunzioni di risposta ottimale*, che rappresentano le contro-strategie scelte da ciascun giocatore per massimizzare il proprio pay-off, data una scelta dell'avversario. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$R_Q(x) = \Big\{y \in Y : g(x, y) = \max_Y g(x, \cdot)\Big\}.$$

Similmente, per ogni $y \in Y$

$$R_P(y) = \Big\{x \in X : f(x, y) = \max_X f(\cdot, y)\Big\}.$$

Definiamo inoltre per ogni $(x, y) \in X \times Y$ la risposta ottimale congiunta

$$R(x, y) = R_P(y) \times R_Q(x).$$

La multifunzione $R : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ caratterizza gli equilibri del gioco:

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \mathrm{fix}(R). \tag{3.1}$$

Infatti, per ogni $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Ne}(\Gamma)$, dalla Definizione 3.1.1 si ha $\bar{x} \in R_P(\bar{y})$ e $\bar{y} \in R_Q(\bar{x})$, ovvero

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}),$$

e viceversa. In virtù di (3.1), possiamo riformulare la tesi come segue:

$$\mathrm{fix}(R) \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

Esaminiamo la multifunzione $R_Q : X \to 2^Y$. Fissato $x \in X$, la funzione $g(x, \cdot)$ è continua sul dominio compatto Y, quindi per il Teorema di Weierstraß esiste $y \in Y$ t.c.

$$g(x, y) = \max_Y g(x, \cdot) = c,$$

ovvero $y \in R_Q(x)$. Inoltre, possiamo riformulare tale insieme come

$$R_Q(x) = \big\{y \in Y : g(x, y) \geqslant c\big\}.$$

Tale insieme è chiuso (ancora per continuità di $g(x, \cdot)$) e convesso per (*ii*) (in effetti $R_Q(x)$ è compatto). Proviamo ora che $\mathrm{gr}(R_Q)$ è chiuso in $X \times Y$, per assurdo: sia (x_k, y_k) una successione in $\mathrm{gr}(R_Q)$, convergente a un punto $(x, y) \notin \mathrm{gr}(R_Q)$. Si ha allora

$$g(x, y) < \max_Y g(x, \cdot).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e un punto $y' \in Y$ t.c.

$$g(x,y) + \varepsilon < g(x,y') < \max_Y g(x,\cdot).$$

Per continuità di g, per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbastanza grande si ha

$$|g(x_k,y_k) - g(x,y)|,\ |g(x_k,y') - g(x,y')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ricaviamo allora

$$\begin{aligned} g(x_k,y_k) &< g(x.y) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< g(x,y') - \frac{2}{3}\varepsilon < g(x_k,y'), \end{aligned}$$

contro la massimalità di y_k per la funzione $g(x_k,\cdot)$, assurdo. Poiché $R_Q : X \to 2^Y$ ha grafico chiuso e Y è compatto, dal Lemma 2.2.10 *(ii)* segue che R_Q è s.c.s. Similmente si prova che $R_P : Y \to 2^X$ è s.c.s. a valori compatti e convessi.
Dal Lemma 2.2.13 *(ii)* segue che R è s.c.s., inoltre essa ha valori chiusi e convessi (formalmente, occorre vedere R_Q, R_P come multifunzioni definite in $X \times Y$). Per il Teorema 2.4.6, esiste $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{fix}(R)$. Ciò prova (3.2) e conclude quindi la dimostrazione. □

Osservazione 3.1.7. Usando un'attrezzatura matematica più sofisticata, è possibile provare versioni generalizzate del Teorema 3.1.6, in cui, per esempio, il numero di giocatori è $n > 2$, oppure gli insiemi di strategie sono sotto-insiemi convessi di spazi di Banach di dimensione infinita. Notiamo anche che, nella dimostrazione, abbiamo fatto uso della continuità delle funzioni f, g rispetto a entrambe le variabili, ma solo della quasi-convessità di f rispetto a x e di g rispetto a y.

La caratteristica più importante del Teorema 3.1.6 è che la sua dimostrazione è costruttiva, ovvero fornisce, oltre al risultato di esistenza degli equilibri, anche un algoritmo per determinarli, che chiamiamo *metodo dell'intersezione*. Descriviamo questo algoritmo limitandoci al caso semplice in cui $X = Y = [0,1]$. I grafici delle multifunzioni R_P e R_Q si possono rappresentare come 'curve' inscritte nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$ (in generale, queste 'curve' potranno contenere segmenti verticali). Si ha allora, per il (3.1),

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \mathrm{gr}(R_P)^\top \cap \mathrm{gr}(R_Q). \tag{3.3}$$

Esempio 3.1.8. Riconsideriamo l'Esempio 1.2.3, passando alle strategie miste e denotando Γ il nuovo gioco. Il giocatore P attribuisce probabilità $x \in [0,1]$ alla strategia pura c, $1-x$ a t, e similmente Q attribuisce probabilità $y \in [0,1]$ a c, $1-y$ a t. I pay-off dei giocatori sono due funzioni $f, g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definite ponendo per ogni $(x,y) \in [0,1]^2$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -5xy - 10(1-x)y - (1-x)(1-y) \\ &= 4xy + x - 9y - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= -5xy - 10x(1-y) - (1-x)(1-y) \\ &= -4xy - 9x + y - 1. \end{aligned}$$

L'insieme $X = Y = [0,1]$ è compatto e convesso. Le funzioni f, g sono continue. Inoltre si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4y + 1 > 0,$$

quindi per ogni $y \in [0,1]$ la funzione $f(\cdot,y)$ è monotona crescente, in particolare quasi-concava. Similmente, $g(x,\cdot)$ è quasi-concava per ogni $x \in [0,1]$. Dunque, per il Teorema 3.1.6 esiste almeno

un equilibrio di Γ in $[0,1]$. Per determinarlo procediamo come sopra. Si vede facilmente che per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$R_Q(x) = \{1\},$$

come per ogni $y \in [0,1]$ si ha

$$R_P(y) = \{1\}.$$

Applichiamo (3.3) trovando l'unica intersezione dei grafici di R_P e R_Q, che è $(1,1)$ (fig. 3). Pertanto si ha

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(1,1)\}.$$

Osserviamo che in questo caso il passaggio dalle strategie pure a quelle miste lascia invariato l'insieme degli equilibri, e che l'ottimo $(0,0)$ non viene raggiunto neanche in questo modello esteso.

In generale, sotto le ipotesi del Teorema 3.1.6 possono esistere due o più equilibri. Per ottenere l'unicità occorre fare ipotesi più restrittive. Supponiamo che $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ siano differenziabili, quindi definiamo per ogni coppia di numeri reali $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ e ogni $(x,y) \in X \times Y$

$$\sigma(x,y,\alpha,\beta) = \alpha f(x,y) + \beta g(x,y).$$

Fissati $\alpha, \beta \in [0,+\infty)$, il gradiente della funzione $\sigma(\cdot,\cdot,\alpha,\beta)$ è

$$\rho(x,y,\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha \nabla_x f(x,y) \\ \beta \nabla_y g(x,y) \end{bmatrix}.$$

Diremo che $\sigma(\cdot,\cdot,\alpha,\beta)$ è *diagonalmente strettamente concava* se verifica per ogni $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$

$$\big(\rho(x_2,y_2,\alpha,\beta) - \rho(x_1,y_1,\alpha,\beta)\big) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) < 0. \tag{3.4}$$

In particolare, se $y_1 = y_2 = y$, (3.4) implica

$$\big(\nabla_x f(x_2,y) - \nabla_x f(x_1,y)\big) \cdot (x_2 - x_1) < 0,$$

così che $f(\cdot,y)$ risulta strettamente concava, e similmente $g(x,\cdot)$ è strettamente concava.
Il seguente risultato (che riportiamo senza dimostrazione) fornisce l'unicità dell'equilibrio di Nash:

Teorema 3.1.9. (Rosen [38]) *Se $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) sono convessi e compatti, $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ sono differenziabili ed esistono $\alpha, \beta \geqslant 0$ t.c. $\sigma(\cdot,\cdot,\alpha,\beta)$ soddisfa (3.4), allora esiste un unico equilibrio di Nash per il gioco Γ.*

Esercizio 3.1.10. Applicando il Teorema 3.1.6, stabilire se il gioco dell'Esempio 1.1.6 in strategie miste ammette equilibri.

Esercizio 3.1.11. Determinare gli equilibri del gioco dell'Esempio 3.1.4.

Esercizio 3.1.12. Sia Γ il gioco descritto dalla seguente tabella:

$P \backslash Q$	y_1	y_2
x_1	$(3,1)$	$(2,2)$
x_2	$(2,2)$	$(1,2)$

Estendere Γ in strategie miste, quindi determinare gli eventuali equilibri.

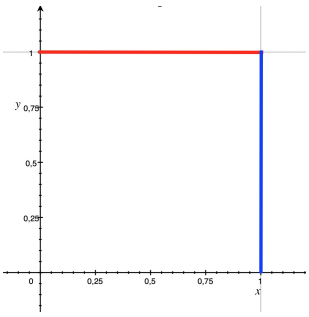

FIGURA 3.

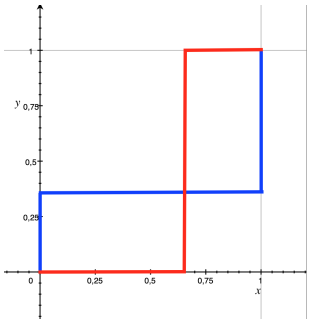

FIGURA 4.

3.2. **Applicazioni.** In questa sezione presentiamo alcuni esempi e applicazioni: alcuni di questi sono veri 'giochi', altri sono esercizi matematici, altri ancora sono modelli realmente usati nelle scienze sociali (in versione convenientemente semplificata). Tutti possono essere risolti utilizzando il Teorema 3.1.6 per provare l'esistenza degli equilibri, e la formula (3.3) per determinarli esplicitamente.

Esempio 3.2.1. (battaglia dei sessi) Riprendiamo l'Esempio 1.2.4, in cui gli equilibri sono (s,s) e (t,t). Passando dalle strategie pure a quelle miste, definiamo $X = Y = [0,1]$ e $f, g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ponendo per ogni $(x,y) \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 10xy + 0x(1-y) + 0(1-x)y + 5(1-x)(1-y) \\ &= 15xy - 5x - 5y + 5 \end{aligned}$$

(si può pensare a x e a $(1-x)$ come al tempo passato allo stadio e a teatro, rispettivamente, da P). Analogamente, per ogni $(x,y) \in [0,1]$ abbiamo

$$g(x,y) = 15xy - 10x - 10y + 10.$$

Il Teorema 3.1.6 garantisce l'esistenza di almeno un equilibrio. In effetti, ve ne sono tre. Semplici calcoli forniscono le multifunzioni di risposta ottimale:

$$R_P(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y \in [0, 1/3) \\ [0,1] & \text{se } y = 1/3 \\ \{1\} & \text{se } y \in (1/3, 1] \end{cases},$$

$$R_Q(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x \in [0, 2/3) \\ [0,1] & \text{se } x = 2/3 \\ \{1\} & \text{se } x \in (2/3, 1] \end{cases}.$$

Gli equilibri si ottengono mediante (3.3) (fig. 4):

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \left\{(0,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (1,1)\right\}.$$

Osserviamo che gli equilibri $(0,0)$ e $(1,1)$ coincidono con quelli già noti dalle strategie pure e dipendono solo dalle preferenze dei giocatori, mentre $(2/3, 1/3)$ appare solo nella versione estesa e dipende dai valori dei pay-off: nel modello del gioco, esso corrisponderebbe alla scelta di passare $1/3$ della serata insieme allo stadio, $1/3$ separati, e $1/3$ insieme a teatro.

Esempio 3.2.2. (caccia al cinghiale) Due cacciatori P, Q devono scegliere se andare a caccia di cinghiale o di lepri ($X = Y = \{c, l\}$), sapendo che per catturare un cinghiale bisogna essere in due,

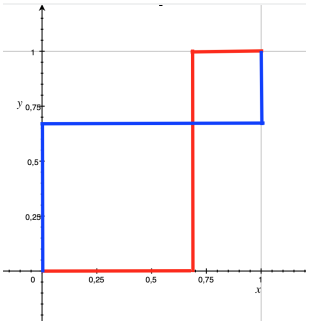

FIGURA 5.

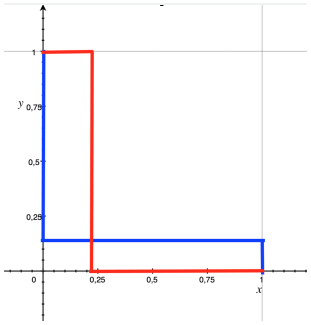

FIGURA 6.

mentre per catturare molte lepri è meglio separarsi. Si ha la seguente tabella dei pay-off:

$P\backslash Q$	c	l
c	$(10,10)$	$(0,8)$
l	$(8,0)$	$(4,4)$

Si ha $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(c,c),(l,l)\}$ (ma $\mathrm{Po}(\Gamma) = \{(c,c)\}$). Passando alle strategie miste, si ricava

$$f(x,y) = 6xy - 4x + 4y + 4,$$

$$g(x,y) = 6xy + 4x - 4y + 4,$$

Intersecando i grafici si trova un terzo equilibrio $(2/3, 2/3)$ (fig. 5). Questo gioco può essere utile per analizzare le situazioni in cui bisogna scegliere se operare insieme per raggiungere un obiettivo più ambizioso, o dividersi per svolgere compiti più modesti.

Esempio 3.2.3. (gioco del pollo) In questo gioco[7] due personaggi P, Q si sfidano a correre in macchina verso un precipizio: perde chi sterza per primo (il 'pollo'). Ogni giocatore dispone di due strategie, sterzare (s) e tirare dritto (d); i pay-off sono, rispettivamente, 10 per la vittoria, 5 per il pareggio, 1 per la sconfitta, e 0 per la morte:

$P\backslash Q$	s	d
s	$(5,5)$	$(1,10)$
d	$(10,1)$	$(0,0)$

Come si vede, $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(s,d),(d,s)\}$ e $\mathrm{Po}(\Gamma) = \emptyset$. Passando alle strategie miste si ricava

$$f(x,y) = -6xy + x + 10y,$$

$$g(x,y) = -6xy + 10x + y.$$

Procedendo come al solito (fig. 6) si trova

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \left\{(0,1), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), (1,0)\right\}.$$

Due di questi equilibri corrispondono a quelli già determinati in strategie pure. Il terzo $(1/6, 1/6)$ corrisponde all'esito in cui i due guidatori sterzano contemporaneamente dopo aver percorso $5/6$ della pista (chiaramente, se si modificano le utilità questo equilibrio si sposta). Il gioco fornisce un modello del fenomeno di *deterrenza*, in cui le scelte dei competitori sono condizionate dal comune timore di un esito catastrofico per entrambi (per esempio, la corsa agli armamenti).

[7] Reso celebre dal film 'Rebel without a cause' di Nicholas Ray (1955).

Esempio 3.2.4. (fumatori) Due fumatori P, Q si trovano in una piccola stanza: entrambi hanno voglia di fumare, ma sono infastiditi dall'aria viziata, pertanto ognuno dei due vorrebbe fumare da solo, ma preferisce comunque fumare (f) insieme all'altro piuttosto che astenersi (a). Si ha la seguente tabella dei pay-off:

$P\backslash Q$	f	a
f	$(1,1)$	$(2,0)$
a	$(0,2)$	$(0,0)$

Studiamo Γ direttamente in strategie miste: poniamo $X = Y = [0,1]$ e ricaviamo per ogni $(x,y) \in [0,1]^2$

$$f(x,y) = -xy + 2x,$$
$$g(x,y) = -xy + 2y.$$

Ne segue che $R_P(y) = R_Q(x) = \{1\}$ per ogni $(x,y) \in [0,1]^2$, così che $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(1,1)\}$, ovvero P e Q scelgono entrambi di fumare (il grafico è identico a quello della fig. 3). Si noti che $\mathrm{Po}(\Gamma) = \emptyset$. Questo gioco esemplifica il cosiddetto *paradosso liberale*, secondo il quale in assenza di divieti ognuno tende a fare come gli pare senza curarsi del bene comune, e la soluzione ottimale non viene raggiunta senza l'intervento di un legislatore.

Esempio 3.2.5. (ragni) Due ragni P e Q competono per il possesso di una ragnatela: ciascun ragno può lottare (l) o arrendersi (a); se entrambi lottano, i pay-off assegnati (che rappresentano le propensioni dei ragni a lottare) sono $p, q \geqslant 0$, in generale la situazione è descritta dalla tabella

$P\backslash Q$	l	a
l	(p,q)	$(10,0)$
a	$(0,10)$	$(5,5)$

Gli equilibri dipendono dai valori dei parametri:

- se $p, q > 0$ si ha $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(l,l)\}$;
- se $p > 0 = q$ si ha $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(l,l),(l,a)\}$;
- se $p = 0 < q$ si ha $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(l,l),(a,l)\}$;
- se $p = q = 0$ si ha $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(l,l),(l,a),(a,l)\}$.

Esempio 3.2.6. (candidati) In una elezione, le proposte programmatiche in vista di un'elezione sono rappresentate dai numeri reali compresi tra 0 (estrema sinistra) e 1 (estrema destra); supponiamo che gli elettori siano uniformemente distribuiti lungo questo intervallo e scelgano il candidato col programma più vicino alle loro idee. Due candidati P e Q devono formulare i loro programmi x, y, col vincolo che quello di P si collochi 'più a sinistra' di quello di Q ($0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$). L'elettorato si divide così in due parti:

$$[0,1] = \left[0, \frac{x+y}{2}\right] \cup \left[\frac{x+y}{2}, 1\right],$$

dove il primo intervallo rappresenta gli elettori che votano per P e il secondo quelli che votano per Q. Ovviamente entrambi i candidati puntano a ottenere la maggioranza dei voti. Il gioco Γ, non rappresentabile in una tabella, è descritto ponendo $X = Y = [0,1]$ e definendo direttamente le multifunzioni di risposta ottimale (fig. 7):

$$R_P(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y < 1/2 \\ [1-y, y] & \text{se } y \geqslant 1/2, \end{cases}$$

e similmente

$$R_Q(x) = \begin{cases} [x, 1-x] & \text{se } x \leqslant 1/2 \\ \emptyset & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

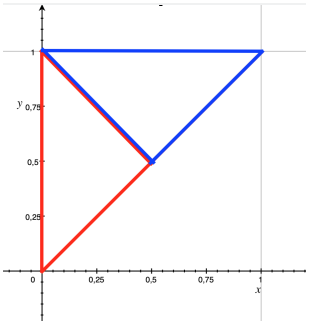

FIGURA 7.

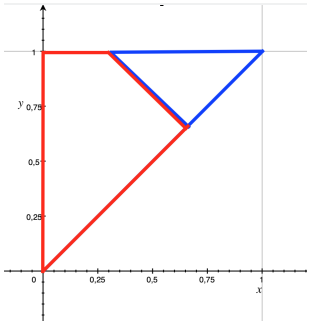

FIGURA 8.

Applicando la formula (3.3), otteniamo

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \Big\{(x, 1-x) : x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big]\Big\}$$

(in questo caso R_P, R_Q hanno infiniti valori non degeneri).

Esempio 3.2.7. Riprendiamo il gioco considerato nell'Esempio 3.2.6, ambientandolo nel caso di un elettorato non neutrale: sia $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ la densità con cui gli elettori si distribuiscono in $[0,1]$, supponiamo φ continua e poniamo per ogni $t \in [0,1]$

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

chiaramente sotto il vincolo $\Phi(1) = 1$. In questo caso, i risultati elettorali ottenuti P, Q mediante le strategie $x, y \in [0,1]$ (sempre sotto il vincolo $x \leqslant y$) sono rispettivamente

$$\Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big),\ 1 - \Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

Le multifunzioni di risposta ottimale saranno quindi (fig. 8)

$$R_P(y) = \Big\{x \in [0,y] : \Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{1}{2}\Big\},$$

$$R_Q(x) = \Big\{y \in [x,1] : \Phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big\}.$$

In particolare, se $\varphi(t) = 2t$ per ogni $t \in [0,1]$ (cioè se l'elettorato è prevalentemente 'di destra'), si ha

$$R_P(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y < 1/\sqrt{2} \\ [\sqrt{2}-y, y] & \text{se } y \geqslant 1/\sqrt{2}, \end{cases}$$

e similmente

$$R_Q(x) = \begin{cases} [x, \sqrt{2}-x] & \text{se } x \leqslant 1/\sqrt{2} \\ \emptyset & \text{se } x > 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

(tutti i valori vanno intersecati con $[0,1]$). Applicando (3.3), ricaviamo

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \big\{(x, \sqrt{2}-x) : x \in [\sqrt{2}-1, 1]\big\}^{8}.$$

[8] Si può concludere che al candidato 'di sinistra' non conviene adottare posizioni estreme.

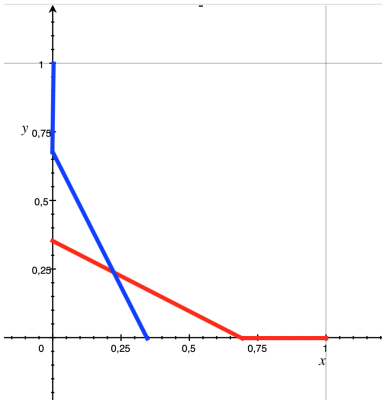

FIGURA 9.

Esempio 3.2.8. (duopolio di Cournot) Consideriamo due produttori P e Q che si contendono il mercato di un bene: i dati sono la soglia di esaurimento del mercato $a > 0$ e il costo unitario di produzione $c > 0$ ($a > c$); le strategie rappresentano le quantità prodotte x, y, variabili nell'intervallo $[0, a]$. Si introduce una funzione di domanda (identificata col prezzo) $p : [0, a]^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$p(x, y) = \begin{cases} a - (x + y) & \text{se } x + y < a \\ 0 & \text{se } x + y \geqslant a \end{cases}$$

Ricaviamo i pay-off, identificati coi profitti di P, Q. Per ogni $(x, y) \in [0, a]^2$, $x + y \leqslant a$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(p(x, y) - c) \\ &(a - c - y)x - 2x^2, \end{aligned}$$

mentre se $x + y > a$ si ha la perdita

$$f(x, y) = -cx.$$

Derivando f rispetto a x, otteniamo due casi:

- se $y \leqslant a - c$, $f(\cdot, y)$ ha un massimo in $x = (a - c - y)/2$ (che ricade in $[0, a - y]$);
- se $y > a - c$, $f(\cdot, y)$ ha un massimo in $x = 0$.

Ricaviamo pertanto la funzione (univoca) di risposta ottimale

$$R_P(y) = \begin{cases} \dfrac{a - c - y}{2} & \text{se } y \leqslant a - c \\ 0 & \text{se } y > a - c. \end{cases}$$

Similmente si ha

$$R_Q(x) = \begin{cases} \dfrac{a - c - x}{2} & \text{se } x \leqslant a - c \\ 0 & \text{se } x > a - c. \end{cases}$$

Intersecando i grafici (fig. 9) vediamo che l'unico equilibrio del gioco è

$$\left(\frac{a - c}{3}, \frac{a - c}{3}\right).$$

Esempio 3.2.9. Consideriamo il gioco astratto Γ rappresentato, in strategie pure, dalla seguente tabella dei pay-off:

$P \backslash Q$	q_1	q_2
p_1	$(1, 0)$	$(1, 2)$
p_2	$(0, 1)$	$(2, 1)$
p_3	$(0, 1)$	$(0, 0)$

Si vede facilmente che l'unico equilibrio è (p_2, q_2). Se passiamo alle strategie miste, l'insieme delle strategie di P diventa un simplesso di dimensione 2, ovvero il triangolo

$$X = \big\{(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) : \, x_1, x_2 \in [0,1], \, x_1 + x_2 \leqslant 1\big\}$$

(i cui punti indicheremo solo mediante le coordinate (x_1, x_2)), mentre l'insieme delle strategie di Q diventa l'intervallo $Y = [0,1]$. Ricaviamo i pay-off, ponendo per ogni $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ t.c. $x_1 + x_2 \leqslant 1$ e ogni $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, y) &= x_1 y + x_1(1-y) + 2x_2(1-y) \\ &= x_1 + 2x_2 - 2x_2 y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, y) &= 2x_1(1-y) + x_2 y + x_2(1-y) + (1 - x_1 - x_2)y \\ &= 2x_1 + x_2 + y - 3x_1 y - x_2 y. \end{aligned}$$

Le ipotesi del Teorema 3.1.6 sono soddisfatte. Ma l'applicazione di (3.3) è un poco più complicata che nei casi precedenti. Cominciamo col determinare la multifunzione $R_Q : X \to 2^Y$, fissando $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ t.c. $x_1 + x_2 \leqslant 1$ e ricercando i punti di massimo di $g(x_1, x_2, \cdot)$ in Y:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_1, x_2, y) = 1 - 3x_1 - x_2$$

è positiva se $3x_1 + x_2 < 1$, da cui

$$R_Q(x_1, x_2) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } 3x_1 + x_2 < 1 \\ [0,1] & \text{se } 3x_1 + x_2 = 1 \\ \{0\} & \text{se } 3x_1 + x_2 > 1. \end{cases}$$

Determiniamo ora $R_P : Y \to 2^X$: fissato $y \in Y$, la funzione $f(\cdot, \cdot, y)$ non ha punti critici in quanto

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, y) = 2, \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, y) = 2 - 2y > 0.$$

D'altra parte, essa è crescente rispetto a x_1, x_2 separatamente, quindi i suoi punti di massimo vanno ricercati sul segmento

$$S = \big\{(x_1, 1 - x_1) : \, x_1 \in [0,1]\big\},$$

dove essa si riformula come

$$f(x_1, 1 - x_2, y) = (2y - 1)x_1 + (2 - 2y).$$

Ora è facile individuare la miglior risposta a ogni $y \in Y$ (sempre omettendo la terza coordinata dei punti di X):

$$R_P(y) = \begin{cases} \{(0,1)\} & \text{se } y < 1/2 \\ S & \text{se } y = 1/2 \\ \{(1,0)\} & \text{se } y > 1/2. \end{cases}$$

A questo punto, piuttosto che applicare il metodo grafico, poniamo $R(x_1, x_2, y) = R_P(y) \times R_Q(x_1, x_2)$ e applichiamo la formula (3.1). Fissiamo $y \in [0,1]$ e distinguiamo tre casi:

- se $y < 1/2$, da $R_P(y) = \{(0,1)\}$ ricaviamo

  $$3x_1 + x_2 = 1,$$

  che restituisce $R_Q(0,1) = [0,1]$, dunque $(0, 1, y) \in \mathrm{fix}(R)$;

- se $y = 1/2$, da $R_P(1/2) = S$ ricaviamo

$$3x_1 + x_2 = 2x_1 + 1,$$

che confrontato con la formula di R_Q fornisce

$$R_Q(x_1, 1 - x_1) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x_1 = 0 \\ \{0\} & \text{se } x_1 > 0, \end{cases}$$

così che per $x_1 > 0$ non si hanno punti fissi, mentre per $x_1 = 0$ troviamo $(0, 1, 1/2) \in \mathrm{fix}(R)$;
- se $y > 1/2$, da $R_P(y) = \{(1, 0)\}$ ricaviamo

$$3x_1 + x_2 = 3,$$

che restituisce $R_Q(1, 0) = \{0\}$, dunque non si hanno punti fissi di R.

Unendo le soluzioni trovate, abbiamo infine

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \left\{(0, 1, y) : \, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Esercizio 3.2.10. Consideriamo la seguente variante dell'Esempio 3.2.3, in cui i giocatori sono meno attratti dal pareggio:

$P\backslash Q$	s	d
s	$(2, 2)$	$(1, 10)$
d	$(10, 1)$	$(0, 0)$

Dimostrare che gli equilibri in strategie pure sono invariati. Come varia l'equilibrio in strategie miste?

Esercizio 3.2.11. Esaminare il gioco dell'Esempio 3.2.5 in strategie miste, con $p = q = 4$ e con $p = 4$, $q = 0$.

Esercizio 3.2.12. Consideriamo il gioco Γ descritto nella tabella

$P\backslash Q$	q_1	q_2
p_1	$(10, 1)$	$(5, 5)$
p_2	$(5, 5)$	$(1, 10)$

Determinarne gli equilibri in strategie pure e miste.

Esercizio 3.2.13. Consideriamo la variante 'progressista' dell'Esempio 3.2.7, con densità

$$\varphi(t) = \frac{\ln(2)^{-1}}{1 + t}.$$

Quali sono gli equilibri?

Esercizio 3.2.14. Consideriamo il gioco con $X = Y = [0, 1]$ e pay-off

$$f(x, y) = 2 - xy, \;\; g(x, y) = 3 - x - y.$$

Determinarne gli equilibri.

3.3. **Equilibri approssimati.** Consideriamo ora il caso di un gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$ in cui gli insiemi delle strategie $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *non* sono compatti. Il Teorema 3.1.6 non si può applicare, e l'esistenza di un equilibrio non è in generale garantita. Per questo si introduce una nozione di *equilibrio approssimato*:

Definizione 3.3.1. *Per ogni $\varepsilon > 0$, un ε-equilibrio di Nash del gioco Γ è una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.*

(*i*) $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \sup_X f(\cdot, \bar{y}) - \varepsilon$;

(*ii*) $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq \sup_Y g(\bar{x}, \cdot) - \varepsilon$.

L'insieme degli ε-equilibri di Nash di Γ si denota $\mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma)$.

Anche in questo caso gli equilibri si possono caratterizzare mediante multifunzioni di risposta ottimale. Poniamo per ogni $x \in X$, $y \in Y$

$$R_P^\varepsilon(y) = \Big\{ x \in X : \ f(x,y) \geq \sup_X f(\cdot, y) - \varepsilon \Big\},$$

$$R_Q^\varepsilon(x) = \Big\{ y \in Y : \ g(x,y) \geq \sup_Y g(x, \cdot) - \varepsilon \Big\},$$

e per ogni $(x, y) \in X \times Y$

$$R^\varepsilon(x,y) = R_P^\varepsilon(y) \times R_Q^\varepsilon(x).$$

L'esistenza di ε-equilibri si può dimostrare sotto ipotesi più blande riguardo X, Y (compensate da condizioni più restrittive su f, g) rispetto a quelle del Teorema 3.1.6. Ricordiamo la nozione di punto fisso approssimato introdotta sopra (Definizione 2.4.8), ed enunciamo il seguente risultato (ved. [4]):

Teorema 3.3.2. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ verificanti le seguenti condizioni:*

(*i*) *f, g sono uniformemente continue in $X \times Y$*[9];

(*ii*) $\mathrm{fix}^\delta(R^\rho) \neq \emptyset$ *per ogni* $\rho, \delta > 0$.

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per (*i*) esiste $\eta > 0$ t.c. per ogni $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ t.c.

$$\|x - x'\| + \|y - y'\| < \eta$$

si ha

$$\max \big\{ \big| f(x,y) - f(x',y') \big|, \big| g(x,y) - g(x',y') \big| \big\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Per (*ii*) esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{fix}^{\eta/2}(R^{\varepsilon/2})$, cioè

$$d((\bar{x}, \bar{y}),\, R^{\varepsilon/2}) < \frac{\eta}{2}.$$

Così possiamo trovare $x' \in R_P^{\varepsilon/2}(\bar{y})$ e $y' \in R_Q^{\varepsilon/2}(\bar{x})$ t.c.

$$\|\bar{x} - x'\| + \|\bar{y} - y'\| < \frac{\eta}{2}.$$

Si ha allora per (3.5)

$$f(\bar{x}, \bar{y}) > f(x', \bar{y}) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sup_X f(\cdot, \bar{y}) - \varepsilon,$$

e similmente

$$g(\bar{x}, \bar{y}) > \sup_Y g(\bar{x}, \cdot) - \varepsilon.$$

Dalla Definizione 3.3.1 abbiamo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma)$. □

[9] Negli spazi euclidei tutte le metriche sono equivalenti.

L'ipotesi (*ii*) è difficile da verificare. Possiamo ricorrere alla teoria dei punti fissi approssimati sviluppata nella Sezione 2.4:

Corollario 3.3.3. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ limitati convessi t.c.* $\mathrm{int}(X), \mathrm{int}(Y) \neq \emptyset$, *$f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ verificanti le seguenti condizioni:*

(*i*) *f, g sono uniformemente continue rispetto alla metrica $d_{X\times Y}$;*
(*ii*) *$R^\rho : X \times Y \to 2^{X\times Y}$ ha valori convessi per ogni $\rho > 0$;*
(*iii*) $\mathrm{gr}(R^\rho)$ *è chiuso per ogni $\rho > 0$.*

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Consideriamo la multifunzione R^ρ, definita come sopra per un arbitrario $\rho > 0$. Il dominio $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ è limitato, convesso e

$$\mathrm{int}(X \times Y) \neq \emptyset.$$

Inoltre i valori di R^ρ sono convessi (*ii*) e $\mathrm{gr}(R^\rho)$ è chiuso (*iii*). Per il Teorema 2.4.9, per ogni $\delta, \rho > 0$ abbiamo

$$\mathrm{fix}^\delta(R^\rho) \neq \emptyset.$$

Rammentando anche (*i*), vediamo che sono verificate tutte le ipotesi del Teorema 3.3.2, dunque $\mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma) \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$. □

Vediamo un'applicazione del Teorema 3.3.2:

Esempio 3.3.4. Poniamo $X = Y = \mathbb{R}^n$ (convesso non compatto), fissiamo $v \in X \setminus \{0\}$, e poniamo per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = -\|x-y\|,\ g(x,y) = -\Big\|x - y - \frac{v}{1+\|x\|}\Big\|.$$

Studiamo il gioco $\Gamma = (X, X, f, g)$. Si vede facilmente che la multifunzione di miglior risposta (congiunta) è data da

$$R(x,y) = \Big\{\Big(y, x - \frac{v}{1+\|x\|}\Big)\Big\}.$$

Pertanto $\mathrm{fix}(R) = \emptyset$, ovvero $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \emptyset$. Cerchiamo dunque equilibri approssimati, applicando il Teorema 3.3.2. Le funzioni $f, g :$ sono lipschitziane (in particolare, uniformemente continue). Per f la cosa è ovvia. Per g, si dimostra come segue: per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\big|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)\big| &\leqslant \Big\|x_1 - y_1 - \frac{v}{1+\|x_1\|} - x_2 + y_2 + \frac{v}{1+\|x_2\|}\Big\| \\
&\leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|v\| \frac{\big|\|x_1\| - \|x_2\|\big|}{(1+\|x_1\|)(1+\|x_2\|)} \\
&\leqslant 2\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

Inoltre, fissato $\delta > 0$, per ogni $x \in X$ t.c. $\|x\| > \|v\|/\delta$ abbiamo

$$d\big((x,x), R(x,x)\big) = \frac{\|v\|}{1+\|x\|} < \delta,$$

da cui $(x, x) \in \mathrm{fix}^\delta(R)$. In particolare, per ogni $\rho, \delta > 0$ abbiamo $\mathrm{fix}^\delta(R^\rho) \neq \emptyset$. Così le ipotesi (*i*) e (*ii*) del Teorema 3.3.2 sono verificate. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma) \neq \emptyset$ (in effetti si dimostra che per ogni $x \in X$ con $\|x\|$ abbastanza grande si ha $(x, x) \in \mathrm{Ne}^\varepsilon(\Gamma)$).

Osservazione 3.3.5. I risultati di questa sotto-sezione si estendono facilmente al caso generale in cui X, Y sono spazi di Banach, anche di dimensione infinita (ved. [4]).

Esercizio 3.3.6. Siano $X = (-\infty, 0)$, $Y = (0, \infty)$, $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x, y) = x + y, \ g(x, y) = x - y.$$

Studiare gli equilibri approssimati del gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$.

4. Giochi a somma nulla e teoria del minimax

Non esistono pasti gratuiti.
M. Friedman

Un modello molto frequente di gioco è quello in cui i giocatori si contendono un capitale fissato, di modo che i guadagni di uno equivalgono alle perdite dell'altro (tale è il gioco del 'pari o dispari' visto nell'Esempio 1.1.5). Questi giochi sono detti *a somma nulla* (o costante) e sono tra i primi studiati in teoria dei giochi (ved. [44]). La loro risoluzione mediante il metodo dell'equilibrio si collega alla *teoria del minimax* (ved. [37]).

4.1. **Giochi a somma nulla.** Definiamo la class di problemi di cui ci occupiamo in questa sezione:

Definizione 4.1.1. *Un gioco* $\Gamma = (X, Y, f, g)$ *è detto a somma nulla se per ogni* $(x, y) \in X \times Y$

$$f(x, y) + g(x, y) = 0.$$

In questo caso il gioco si denota $\Gamma = (X, Y, f)$.

La teoria che qui esporremo è equivalente a quella dei giochi a somma *costante*, cioè verificanti

$$f(x, y) + g(x, y) = c \ (c \in \mathbb{R}).$$

Un gioco a somma nulla Γ si studia prendendo in esame la sola funzione di pay-off $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Ricordando la Definizione 3.1.1, si ha $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Ne}(\Gamma)$ se e solo se

$$\max_X f(\cdot, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \min_Y f(\bar{x}, \cdot).$$

Se rappresentiamo Γ mediante la tabella dei pay-off, possiamo indicare in ogni casella la sola utilità di P: gli equilibri corrispondono alle caselle il cui numero è contemporaneamente massimo sulla colonna, e minimo sulla riga a cui appartiene.

Esempio 4.1.2. Consideriamo il seguente gioco:

$P \backslash Q$	y_1	y_2
x_1	1	2
x_2	0	1
x_3	-1	0

Osservando la tabella (i cui numeri rappresentano i pay-off di P e contemporaneamente gli opposti dei pay-off di Q), si ricava

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \big\{(x_1, y_1)\big\}.$$

In generale, non è detto che le restrizioni di f ammettano minimo o massimo su X, Y, quindi sostituiamo tali nozioni con quelle più generali di estremo inferiore e superiore. Introduciamo alcune definizioni collegate:

Definizione 4.1.3. *Sia* $\Gamma = (X, Y, f)$ *un gioco a somma nulla:*

(*i*) *se*

$$\sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f = \bar{f},$$

diremo che Γ *soddisfa l'eguaglianza del minimax e che il valore di* Γ*;*

(*ii*) *se* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ *verifica*

$$\sup_X f(\cdot, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_Y f(\bar{x}, \cdot),$$

diremo che $(\bar{x}, \bar{y})$ *è un punto di sella di* f*, denotando* $\mathrm{sp}(f)$ *l'insieme di tali punti.*

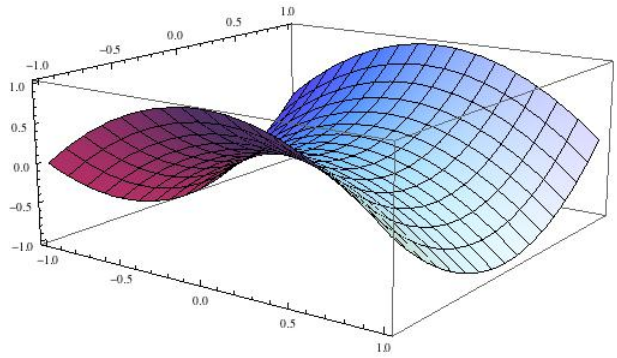

FIGURA 10. $(0,0)$ è un punto di sella per la funzione $f(x,y) = y^2 - x^2$.

La Definizione 4.1.3 *(ii)* è illustrata dalla fig. 10. Chiariamo ora le relazioni fra i concetti introdotti. Per ogni funzione $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ si ha

$$\sup_X \inf_Y f \leqslant \inf_Y \sup_X f.$$

Infatti, fissato $(x,y) \in X \times Y$, abbiamo

$$\inf_Y f(x,\cdot) \leqslant f(x,y) \leqslant \sup_X f(\cdot,y).$$

Passando all'estremo superiore nel primo membro e all'estremo inferiore nel secondo, otteniamo la diseguaglianza desiderata. Allora la condizione *(i)* sopra equivale alla diseguaglianza

$$\inf_Y \sup_X f \leqslant \sup_X \inf_Y f.$$

Osserviamo ora che *(ii)* implica *(i)*. Infatti, se esiste $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{sp}(f)$, allora si ha

$$\begin{aligned} \inf_Y \sup_X f &\leqslant \sup_X f(\cdot,\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}) \\ &= \inf_Y f(\bar{x},\cdot) \leqslant \sup_X \inf_Y f, \end{aligned}$$

da cui (come visto sopra) segue *(i)*. Inoltre, si ha $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{f}$. L'implicazione però non si inverte:

Esempio 4.1.4. Poniamo $X = Y = (0,1)$, e per ogni $(x,y) \in X \times Y$

$$f(x,y) = xy.$$

Si ha allora per ogni $x \in X$

$$\inf_Y f(x,\cdot) = 0,$$

da cui

$$\sup_X \inf_Y f = 0.$$

Analogamente, per ogni $y \in Y$

$$\sup_X f(\cdot,y) = y,$$

da cui

$$\inf_Y \sup_X f = \inf_{y \in Y} y = 0.$$

Pertanto la condizione *(i)* è verificata con $\bar{f} = 0$. Tuttavia, f non ha punti di sella, come proviamo per assurdo. Supponiamo che $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{sp}(f)$, allora

$$\bar{x}\bar{y} = \sup_{0 \leq x \leq 1} x\bar{y} = \bar{y} > 0,$$

mentre

$$\bar{x}\bar{y} = \inf_{0<y\leq 1} \bar{x}y = 0,$$

assurdo. Dunque *(ii)* non è verificata.

Il collegamento tra la Definizione 4.1.3 e gli equilibri è espresso dal seguente risultato:

Teorema 4.1.5. *Sia Γ è un gioco a somma nulla. Allora si ha*

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \mathrm{sp}(f).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ rappresenta i pay-off di P, mentre $g = -f$ rappresenta i pay-off di Q. Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Ne}(\Gamma)$, allora si ha per la Definizione 3.1.1

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_X f(\cdot, \bar{y}),$$

$$-f(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_Y \big(- f(\bar{x}, \cdot)\big),$$

da cui $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{sp}(f)$. E viceversa. □

Dal Teorema 4.1.5 e dalla discussione precedente, deduciamo che l'eguaglianza del minimax rappresenta una forma più debole di equilibrio per il gioco Γ. Per chiarire questo concetto, immaginiamo che le restrizioni di f ammettano massimo e minimo in X, Y rispettivamente (per esempio, ciò avviene se X, Y sono finiti). Se P gioca per primo e sceglie una strategia $x \in X$, Q sceglierà $y \in Y$ t.c.

$$f(x, y) = \min_Y f(x, \cdot).$$

Prevedendo ciò, P sceglie x in modo ottimale e realizza il pay-off

$$\min_Y f(x, \cdot) = \max_X \min_Y f.$$

Se invece Q gioca per primo, similmente P realizza il payoff

$$\min_Y \max_X f$$

(i pay-off di Q sono opposti). Se Γ ammette un equilibrio, come visto nel Capitolo 3 i pay-off sono indipendenti dall'ordine di gioco. Pertanto si ha

$$\min_Y \max_X f = \max_X \min_Y f.$$

Nell'Esempio 4.1.2 si ha questo esito, con $\bar{f} = 1$.

Esercizio 4.1.6. Determinare gli equilibri del gioco a somma nulla Γ rappresentato dalla tabella

$P\backslash Q$	y_1	y_2	y_3
x_1	4	2	3
x_2	0	3	2
x_3	4	3	4

Esercizio 4.1.7. Stabilire se il gioco dell'Esempio 1.1.6 è a somma nulla, quindi se esso verifica l'eguaglianza del minimax, e determinare gli eventuali punti di sella. Ripetere l'esercizio passando a strategie miste (difficile).

Esercizio 4.1.8. Determinare i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y.$$

4.2. **Alcuni teoremi di minimax.** I risultati di questa sotto-sezione sono basati sulle tecniche di analisi multivoca esposte nel Capitolo 2. Il primo di essi, che copre un caso molto semplice, è considerato il primo teorema di minimax:

Teorema 4.2.1. (von Neumann [44]) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) compatti convessi, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ bilineare. Allora,* $\mathrm{sp}(f) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Poniamo per ogni $x \in X$

$$F(x) = \Big\{ y \in Y : \ f(x,y) = \min_Y f(x,\cdot) \Big\}.$$

Poiché $f(x,\cdot)$ è una funzione lineare, $F(x) \neq \emptyset$ è un sottoinsieme compatto e convesso di Y. Proviamo che $\mathrm{gr}(F)$ è chiuso. A tal fine poniamo per ogni $x \in X$

$$\varphi(x) = \min_Y f(x,\cdot).$$

Proviamo che $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è (uniformemente) continua. Ricordiamo che, per il Teorema di Cantor-Heine, f è uniformemente continua in $X \times Y$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $(x,y), (x',y') \in X \times Y$ verificanti

$$\|x - x'\| + \|y - y'\| < \delta$$

si ha

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fissiamo allora $x, x' \in X$ t.c. $\|x - x'\| < \delta$. Per ogni $y \in Y$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leqslant f(x,y) \\ &\leqslant |f(x,y) - f(x',y)| + f(x',y) < \frac{\varepsilon}{2} + f(x',y). \end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore rispetto a y al secondo membro, otteniamo

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(x').$$

Scambiando x con x' abbiamo

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Consideriamo ora una successione (x_k, y_k) in $\mathrm{gr}(F)$, convergente a $(x,y) \in X \times Y$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$f(x_k, y_k) = \varphi(x_k).$$

Per continuità delle funzioni, possiamo passare al limite per $k \to \infty$ ottenendo

$$f(x,y) = \varphi(x),$$

ovvero $(x,y) \in \mathrm{gr}(F)$, che risulta essere chiuso. Per il Lemma 2.2.10 *(ii)*, $F : X \to 2^Y$ è s.c.s. Poniamo ora per ogni $y \in Y$

$$G(y) = \Big\{ x \in X : \ f(x,y) = \max_X f(\cdot,y) \Big\}.$$

Come sopra, $G : Y \to 2^X$ è s.c.s. a valori compatti convessi. Per il Lemma 2.2.13 *(ii)*, la multifunzione $G \times F : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ è s.c.s. a valori compatti e convessi. Applichiamo a quest'ultima il Teorema 2.4.6, trovando $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in G(\bar{y}) \times F(\bar{x}).$$

Dalle definizioni di F, G abbiamo infine $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{sp}(f)$. □

Osservazione 4.2.2. Da un'attenta lettura delle ipotesi, si vede che il Teorema 4.2.1 è in effetti una conseguenza del Teorema 3.1.6. Abbiamo riportato la dimostrazione per motivi di completezza.

Sotto ipotesi più deboli, anche se non è sempre possibile dimostrare l'esistenza di un punto di sella, possiamo provare che f soddisfa l'eguaglianza del minimax (ved. Sezione 4.1):

Teorema 4.2.3. (Fan [14]) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compatti e convessi, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti condizioni:*

(i) $f(\cdot, y)$ è s.c.s. e quasi-concava per ogni $y \in Y$;
(ii) $f(x, \cdot)$ è s.c.i. e quasi-convessa per ogni $x \in X$.

Allora, si ha

$$\sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che il primo membro della tesi è minore o uguale al secondo (Sezione 4.1). Procediamo quindi per assurdo, supponendo che esista $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\sup_X \inf_Y f < c < \inf_Y \sup_X f. \tag{4.1}$$

Per ogni $(x, y) \in X \times Y$ poniamo

$$F(x, y) = \big\{(x', y') \in X \times Y : f(x, y') \leqslant c \text{ o } f(x', y) \geqslant c\big\}.$$

Osserviamo che $X \times Y$ è compatto e convesso, e studiamo le proprietà della multifunzione $F : X \times Y \to 2^{X \times Y}$. Per ogni $x \in X$, da (4.1) segue

$$\inf_Y f(x, \cdot) < c,$$

quindi esiste $y' \in Y$ t.c. $f(x, y') < c$. Pertanto F ha valori non vuoti. Inoltre, per ogni $x \in X$ l'insieme

$$\big\{y' \in Y : f(x, y') \leqslant c\big\}$$

è compatto e convesso per *(ii)*. Ragionando similmente in base a *(i)*, si vede che $F(x, y)$ è compatto per ogni $(x, y) \in X \times Y$. Proviamo ora che F soddisfa la condizione (KKM) (ved. Definizione 2.5.1). Ragioniamo ancora per assurdo: siano $(x_1, y_1), \dots (x_p, y_p) \in X \times Y$, e $(x', y') \in \text{conv}((x_1, y_1), \dots (x_p, y_p))$ t.c.

$$(x', y') \notin \bigcup_{k=1}^{p} F(x_k, y_k),$$

ovvero

$$f(x', y_k) < c < f(x_k, y') \ (k = 1, \dots p).$$

Poiché $x' \in \text{conv}(x_1, \dots x_p)$ e $f(\cdot, y')$ è quasi-concava *(i)*, dalla diseguaglianza precedente segue $f(x', y') > c$. D'altra parte, da *(ii)* abbiamo $f(x', y') > c$, assurdo.
Possiamo allora applicare il Corollario 2.5.3, deducendone l'esistenza di $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y),$$

Equivalentemente, per ogni $(x, y) \in X \times Y$ abbiamo $f(x, \bar{y}) \leqslant c$ oppure $f(\bar{x}, y) \geqslant c$. A questo punto distinguiamo due casi

- se $f(x, \bar{y}) \leqslant c$ per ogni $x \in X$, allora si ha

  $$\sup_X f(\cdot, \bar{y}) \leqslant c,$$

  da cui

  $$\inf_Y \sup_X f \leqslant c;$$

- se esiste $x \in X$ t.c. $f(x, \bar{y}) > c$, allora per ogni $y \in Y$ deve aversi $f(\bar{x}, y) \geqslant c$, da cui
$$\inf_Y f(\bar{x}, \cdot) \geqslant c,$$
che a sua volta implica
$$\sup_X \inf_Y f \geqslant c.$$

In ogni caso, (4.1) viene contraddetta. □

Osservazione 4.2.4. Dalla dimostrazione del Teorema 4.2.3 segue che esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.
$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f.$$
Tuttavia, questo non implica che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia un punto di sella per f. Notiamo inoltre che il Teorema 4.2.3 vale in spazi vettoriali topologici localmente convessi (ved. [14]).

Per studiare il problema del minimax in assenza di una struttura vettoriale, tipicamente si tende a sostituire la *convessità* con la *connessione*: osserviamo che un sotto-insieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è convesso, ma in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ questa equivalenza si perde. Il seguente risultato è tipico di questo approccio:

Teorema 4.2.5. (König [22]) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti condizioni:*

(i) $f(\cdot, y)$ *è s.c.s. per ogni* $y \in Y$*;*

(ii) $f(x, \cdot)$ *è s.c.i. per ogni* $x \in X$*.*

(iii) per ogni $x_1, \dots x_p \in X$ *e per ogni* $c > \sup_Y \inf_X f$*, l'insieme*
$$\bigcap_{k=1}^{p} \big\{y \in Y : f(x_k, y) \leqslant c\big\}$$
è connesso;

(iv) per ogni $Y' \subset X$ *e per ogni* $c < \inf_Y \sup_X f$*, l'insieme*
$$\bigcap_{y \in Y'} \big\{x \in X : f(x, y) > c\big\}$$
è connesso.

Allora si ha
$$\sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f.$$

Osserviamo che l'ipotesi *(iv)* non si può migliorare restringendola agli insiemi Y' finiti come in *(iii)*, in generale (si possono trovare dei contro-esempi in dimensione infinita). Soprattutto, il limite del Teorema 4.2.5 consiste nel fatto che (a differenza dalla convessità) la proprietà di connessione non è stabile rispetto all'intersezione.

Esempio 4.2.6. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ siano $X = \overline{B}_1(0)$, $Y = \partial B_1(0)$, e sia $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ definita per ogni $(x, y) \in X \times Y$ da
$$f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$
La funzione f verifica le ipotesi *(i)*, *(ii)* del Teorema 4.2.5. Inoltre, per ogni $c \in \mathbb{R}$ e ogni $(x, y) \in X \times Y$ gli insiemi
$$\big\{y' \in Y : f(x, y) \leqslant c\big\}, \ \big\{x' \in X : f(x', y) > c\big\}$$
sono connessi. Tuttavia, le intersezioni di tali insiemi non sono connesse, quindi *(iii)*, *(iv)* non sono soddisfatte. Infatti si ha
$$\sup_X \inf_Y f = 0 < 1 = \inf_Y \sup_X f.$$

Nel caso particolare in cui Y è un intervallo compatto in $\mathbb{R}$ ($m = 1$), le ipotesi di connessione possono essere alleggerite, riferendole a singoli sotto- e sopra-livelli di f. Lo strumento fondamentale per questo studio è il seguente risultato di *coincidenza* per le multifunzioni:

Lemma 4.2.7. *Siano $Z \subseteq \mathbb{R}^p$ connesso, $a < b$, $F, G : Z \to 2^{[a,b]}$ multifunzioni s.c.i. a valori connessi, t.c. $F(Z) = [a, b]$, allora esiste $\bar{z} \in Z$ t.c.*

$$F(\bar{z}) \cap G(\bar{z}) \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che per ogni $z \in Z$

$$F(z) \cap G(z) = \emptyset.$$

Per il Lemma 2.2.13 (*i*), la multifunzione $H = F \times G$ è s.c.i. a valori connessi. Per il Teorema 2.2.12, $H(Z) \subset [a, b]^2$ è un insieme connesso. Poniamo ora

$$A = \big\{(u, v) \in [a, b]^2 : u < v\big\},\ B = \big\{(u, v) \in [a, b]^2 : u > v\big\}.$$

Gli insiemi A, B sono aperti in $[a, b]^2$ t.c. $A \cap B = \emptyset$. Inoltre, per ogni $z \in Z$, $(u, v) \in H(z)$ si ha $u \neq v$, da cui $(u, v) \in A$ oppure $(u, v) \in B$, quindi

$$H(Z) \subseteq A \cup B.$$

Poiché F è suriettiva, esiste $z \in Z$ t.c. $a \in F(z)$. Scelto qualunque $v \in G(z)$, si ha $a < v$, da cui $(a, v) \in H(z) \cap A$. Similmente si trova una coppia $(u, b) \in H(z) \cap B$ per qualche $z \in Z$, quindi

$$H(Z) \cap A \neq \emptyset,\ H(Z) \cap B \neq \emptyset.$$

Queste informazioni contraddicono la precedente osservazione che $H(Z)$ è connesso. Pertanto, esiste $\bar{z} \in Z$ t.c. $F(\bar{z}) \cap G(\bar{z}) \neq \emptyset$. □

Applicando il Lemma 4.2.7 possiamo provare un teorema di minimax generale sotto ipotesi di connessione:

Teorema 4.2.8. (Ricceri [35]) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a < b$, $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti condizioni:*

(*i*) *$f(\cdot, y)$ è s.c.s. per ogni $y \in [a, b]$;*
(*ii*) *$f(x, \cdot)$ è s.c.i. per ogni $x \in X$;*
(*iii*) *per ogni $y \in [a, b]$, $c < \inf_{[a,b]} \sup_X f$ l'insieme*

$$\big\{x \in X : f(x, y) > c\big\}$$

è connesso;
(*iv*) *per ogni $x \in X$, $c > sup_X \inf_{[a,b]} f$ l'insieme*

$$\big\{x \in X : f(x, y) < c\big\}$$

è connesso.

Allora

$$\sup_X \inf_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} \sup_X f.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\sup_X \inf_{[a,b]} f < c < \inf_{[a,b]} \sup_X f. \tag{4.2}$$

Definiamo l'insieme

$$Z = \big\{(x, y) \in X \times [a, b] : f(x, y) > c\big\},$$

e proviamo che Z è connesso. Infatti, $[a,b]$ è connesso. Per ogni $y \in [a,b]$, da (4.2) segue

$$\sup_X f(\cdot, y) > c,$$

quindi esiste $x \in X$ t.c. $f(x,y) > c$. Pertanto la sezione

$$Z^y = \big\{x \in X : \ f(x,y) > c\big\}$$

è un insieme non vuoto, esso è inoltre connesso per *(iii)*. D'altra parte, per ogni $x \in X$ l'insieme

$$Z_x = \big\{y \in [a,b] : \ f(x,y) > c\big\}$$

è aperto per *(ii)*. Per il Corollario 2.2.15 *(ii)*, Z è connesso. Poniamo ora per ogni $(x,y) \in Z$

$$F(x,y) = \{y\}, \ G(x,y) = \big\{v \in [a,b] : \ f(x,y) < c\big\}.$$

La multifunzione $F : Z \to 2^{[a,b]}$ è ovviamente s.c.i. a valori connessi, inoltre per ogni $y \in [a,b]$ si trova come sopra una coppia $(x,y) \in Z$, da cui $F(Z) = [a,b]$. Studiamo ora la multifunzione $G : Z \to 2^{[a,b]}$. Per ogni $(x,y) \in Z$, da (4.2) segue

$$\inf_{[a,b]} f(x, \cdot) < c,$$

quindi esiste $v \in [a,b]$ t.c. $f(x,v) < c$ ovvero $v \in G(x,y)$. Inoltre, per *(iv)* $G(x,y)$ è connesso. Infine, siano $v \in [a,b]$ e $(x,y) \in G^-(v)$, ovvero si ha

$$f(x,v) < c.$$

Per *(i)* la funzione $f(\cdot, v)$ è s.c.s., quindi esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x \in B_\delta(x)$

$$f(x',v) < c,$$

il che implica per ogni $(x',y') \in B_\delta(x) \times [a,b]$ che $(x',y') \in G^-(v)$. Allora G è una multifunzione a fibre aperte, in particolare s.c.i. Applichiamo allora il Lemma 4.2.7 alle multifunzioni F, G, trovando $(\bar x, \bar y) \in Z$ t.c.

$$F(\bar x, \bar y) \cap G(\bar x, \bar y) \neq \emptyset.$$

Ricordando le definizioni di F, G, ciò equivale a $\bar y \in G(\bar x, \bar y)$, ovvero $f(\bar x, \bar y) < c$, contro $(\bar x, \bar y) \in Z$. La contraddizione raggiunta prova che (4.2) è falsa, e quindi la tesi è ottenuta. □

Osserviamo che nella dimostrazione del Teorema 4.2.8 le multifunzioni F, G dipendono di fatto solo da y e solo da x, rispettivamente. Riportiamo senza dimostrazione la seguente estensione del Teorema 4.2.8 al caso in cui Y non è un intervallo (ved. [36]):

Teorema 4.2.9. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti condizioni:*

(i) $f(\cdot, y)$ è s.c.s. e quasi-concava per ogni $y \in Y$;
(ii) $f(x, \cdot)$ è continua e quasi-convessa per ogni $x \in X$;
(iii) per ogni $y \in Y$, $c < \inf_X \sup_X f$, $y \in Y$ l'insieme

$$\big\{x \in X : \ f(x,y) \geqslant c\big\}$$

è compatto;
(iv) per ogni $y \in Y$ la funzione $f(\cdot, y)$ ha al più un punto di massimo globale in X.

Allora

$$\sup_X \inf_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} \sup_X f.$$

Osservazione 4.2.10. I Teoremi 4.2.8, 4.2.9 valgono più in generale, sotto l'ipotesi che X sia un qualunque spazio topologico e che Y sia un sotto-insieme convesso di uno spazio vettoriale (Teorema 4.2.9). Essi sono stati elaborati principalmente in vista di applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, e hanno pertanto poco a che fare con la teoria dei giochi.

Esercizio 4.2.11. Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \arctan(1 + x^2 - y^2).$$

Stabilire se f soddisfa l'eguaglianza del minimax.

Esercizio 4.2.12. Determinare tutti i punti di sella della funzione

$$f(x, y) = \cos(x) + \cos(y).$$

5. Giochi cooperativi

Hey you, don't tell me there's no hope at all
Together we stand, divided we fall.
R. Waters

In questa sezione introduciamo i *giochi cooperativi*, caratterizzati dalla possibilità che i giocatori si associno in coalizioni per perseguire una maggiore utilità: presupposto fondamentale perché ciò avvenga è che i giocatori possano comunicare tra loro stabilendo degli accordi. Per semplicità esamineremo il caso dei giochi cooperativi statici. Per approfondimenti rimandiamo a Colombo [12], Morgenstern [30].

Definizione 5.0.1. *Siano P un insieme, $v : 2^P \to \mathbb{R}^+$ una funzione verificante le proprietà*

(*i*) $v(\emptyset) = 0$;
(*ii*) *se* $S, T \in 2^P$, $S \cap T = \emptyset$, *allora* $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

La coppia $\Gamma = (P, v)$ è detta gioco (cooperativo); gli elementi di P sono detti giocatori, i sotto-insiemi di P coalizioni, $v(S)$ utilità corrispondente alla coalizione $S \in 2^P$, v funzione caratteristica del gioco.

La proprietà (*ii*) della Definizione 5.0.1 è detta *super-additività* ed esprime il fatto che coalizzarsi 'conviene' ai singoli giocatori (essa non è richiesta in tutte le versioni della teoria dei giochi cooperativi). In particolare, alla *grande coalizione* P corrisponde il valore massimo della funzione caratteristica: questo rappresenta l'utilità totale del gioco, e il problema principale consiste nel trovare una coalizione che distribuisca tale utilità in modo soddisfacente per tutti i giocatori che la formano. Nel seguito, per semplicità, denoteremo $P = \{1, \dots n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, $v(\{i\}) = v(i)$ $(i \in P)$, e simili.

Esempio 5.0.2. Nel *gioco delle pertiche*, tre esploratori devono attraversare un fiume di larghezza $l > 0$ e ognuno di essi possiede una pertica di lunghezza $2l/3$. Si ha $P = \{1, 2, 3\}$ e, posta 1 l'utilità di attraversare il fiume, possiamo enumerare tutti i valori della funzione caratteristica $v : 2^P \to \mathbb{R}$:

$$v(\emptyset) = 0^{10},$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$
$$v(1,2) = v(2,3) = v(2,3) = 1,$$
$$v(1,2,3) = 1.$$

Si vede facilmente che v soddisfa la Definizione 5.0.1.

Segnaliamo ora alcune importanti classi di giochi cooperativi.

Definizione 5.0.3. *Un gioco $\Gamma = (P, v)$ è detto*

(*i*) *essenziale se*
$$v(P) > \sum_{i=1}^{n} v(i);$$
(*ii*) *normale se $v(P) = 1$ e $v(i) = 0$ per ogni $i \in P$;*
(*iii*) *semplice se $v(S) \in \{0, 1\}$ per ogni $S \in 2^P$;*
(*iv*) *a somma costante se $v(S) + v(P \setminus S) = v(P)$ per ogni $S \in 2^P$.*

Chiaramente ogni gioco essenziale e semplice è normale. Il gioco dell'Esempio 5.0.2 soddisfa (*i*) – (*iv*).

Introduciamo una relazione di equivalenza fra i giochi:

[10] Nel seguito ometteremo questo valore della funzione caratteristica.

Definizione 5.0.4. *Due giochi* $\Gamma = (P, v)$, $\Gamma' = (P, v')$ *si dicono strategicamente equivalenti* ($\Gamma \sim \Gamma'$) *se esistono* $r > 0$, $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ *t.c. per ogni* $S \in 2^P$

$$v'(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} a_i.$$

Si dimostra facilmente che l'equivalenza strategica è effettivamente una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica, transitiva) sull'insieme dei giochi con insieme dei giocatori P. Inoltre, ogni gioco essenziale può essere 'normalizzato':

Lemma 5.0.5. *Sia* $\Gamma = (P, v)$ *è un gioco essenziale. Allora esiste un unico gioco normale* $\Gamma' = (P, v')$ *tale che* $\Gamma \sim \Gamma'$.

Dimostrazione. Poniamo per ogni $S \in 2^P$

$$v'(S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} v(i)}{v(P) - \sum_{j=1}^{n} v(j)}.$$

Il gioco $\Gamma' = (P, v')$ è normale. Inoltre, posto

$$r = \Big[v(P) - \sum_{j=1}^{n} v(j) \Big]^{-1}$$

e $a_i = -rv(i)$ per ogni $i \in P$, si ha per ogni $S \in 2^P$

$$v'(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} a_i,$$

ovvero $\Gamma \sim \Gamma'$. L'unicità è provata facilmente. □

Vediamo altri esempi di giochi cooperativi:

Esempio 5.0.6. Nel *gioco della produzione*, tre imprenditori $P = \{1, 2, 3\}$ dispongono di tre materie prime, per esempio ferro, gomma e legno, nelle quantità indicate dalla seguente tabella:

P	f	g	l
1	2	3	3
2	3	0	3
3	1	3	0

Per produrre un'unità di prodotto finito (che si vende al prezzo 1) serve un'unità di ciascuna materia prima. La funzione caratteristica determina il ricavo ottenibile da ciascuna coalizione:

$$v(1) = 2,\ v(2) = v(3) = 0,$$

$$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 3,$$

$$v(1, 2, 3) = 6.$$

Controlliamo le proprietà della Definizione 5.0.3 per il gioco $\Gamma = (P, v)$. Esso è essenziale, ma non è normale, semplice o a somma costante ($v(1) + v(2, 3) = 5$). Il gioco normalizzato $\Gamma' = (P, v')$ si ottiene come nel Lemma 5.0.5, ponendo

$$r = \frac{1}{4},\ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = a_3 = 0.$$

Esempio 5.0.7. Nel *gioco della maggioranza pesata*, i partiti $P = \{1, \dots n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) dispongono ciascuno di s_i seggi in parlamento ($s_i \in \mathbb{N}$ per ogni $i \in \{1, \dots n\}$) e il minimo numero di voti richiesto per approvare una legge è $q \in \mathbb{N}$, ovviamente t.c.

$$q \leqslant \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

La situazione configura un gioco semplice $\Gamma = (P, v)$ con

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} s_i < q \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} s_i \geq q \end{cases}.$$

Il gioco Γ è semplice. Le altre proprietà dipendono dai dati. Per esempio, se $n = 3$, $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = 2$, e $q = 3$ si ha

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$

$$v(1,2) = 0,\ v(1,3) = v(2,3) = 1,$$

$$v(1,2,3) = 1.$$

In questo caso Γ è essenziale, normale, non a somma costante ($v(3) + v(1,2) = 0$).

Introduciamo alcune categorie speciali di giocatori. La prima è formata dai giocatori che forniscono il *minimo* contributo alle coalizioni di cui fanno parte (*dummy player*):

Definizione 5.0.8. *In un gioco $\Gamma = (P, v)$, $i \in P$ è detto giocatore fantoccio se per ogni $S \in 2^P$ si ha*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i).$$

La seconda, relativa ai soli giochi semplici (Definizione 5.0.3 *(iii)*), descrive invece i giocatori 'di cui non si può fare a meno':

Definizione 5.0.9. *Sia $\Gamma = (P, v)$ un gioco semplice. Un giocatore $i \in P$ è detto giocatore di veto se*

$$v(P \setminus \{i\}) = 0.$$

Chiaramente, in un gioco semplice ogni coalizione 'vincente' deve contenere tutti gli eventuali giocatori di veto: se $S \in 2^P$ e $i \notin S$ è un giocatore di veto, si ha $S \subseteq P \setminus \{i\}$, da cui

$$v(S) \leq v(P \setminus \{i\}) = 0.$$

Nel gioco dell'Esempio 5.0.7, 3 è un giocatore di veto, mentre non esistono giocatori fantoccio.

Esercizio 5.0.10. Dimostrare che la relazione $\sim$ (Definizione 5.0.4) è un'equivalenza.

Esercizio 5.0.11. Dimostrare l'unicità di Γ' nel Lemma 5.0.5.

Esercizio 5.0.12. Studiare le proprietà gioco dell'Esempio 5.0.6 con la tabella

P	f	g	l
1	1	2	3
2	2	1	2
3	1	0	3

Esercizio 5.0.13. Si consideri il gioco dell'Esempio 5.0.7 con dati $n = 4$, $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = 2$, $s_3 = 3$, e $q = 4$. Esistono giocatori di veto?

5.1. **Imputazioni e nucleo.** Sviluppiamo ora una teoria utile a fornire una *soluzione* ai giochi cooperativi. La logica che seguiamo è quella di attribuire a ogni giocatore un 'valore' dipendente dalla sua capacità di contribuire al successo di una coalizione. La prima nozione che dobbiamo introdurre è la seguente:

Definizione 5.1.1. *Un'imputazione per il gioco* $\Gamma = (P, v)$ *è un vettore* $x \in \mathbb{R}^n$ *t.c.*

(*i*) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(P)$ *(efficienza);*

(*ii*) $x_i \geq v(i)$ *per ogni* $i \in \{1, \dots n\}$ *(razionalità individuale).*

L'insieme delle imputazioni di Γ *si denota* $\mathrm{i}(\Gamma)$.

Il significato della Definizione 5.1.1 è il seguente: un vettore x è un'imputazione se ogni sua componente x_i è un possibile compenso per il giocatore i, tale da convincerlo a non uscire dal gioco.

Esempio 5.1.2. Sia $\Gamma = (P, v)$ il gioco individuato da $P = \{1, 2, 3\}$ e

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$
$$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = \frac{1}{2},$$
$$v(1,2,3) = 1.$$

L'insieme $\mathrm{i}(\Gamma)$ si può rappresentare graficamente mediante un simplesso $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ (come nella fig. 2), descritto dal sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Osserviamo che $\mathrm{i}(\Gamma)$ non dipende dalle valutazioni delle coalizioni formate da 2 giocatori.

Introduciamo ora la nozione di *nucleo*, che esprime il sotto-insieme di $\mathrm{i}(\Gamma)$ contenente le imputazioni vantaggiose non solo per i singoli giocatori, ma anche per ciascuna coalizione:

Definizione 5.1.3. *Il nucleo del gioco* $\Gamma = (P, v)$ *è l'insieme delle imputazioni* $x \in \mathrm{i}(\Gamma)$ *t.c. per ogni* $S \in 2^P$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Il nucleo di Γ *si denota* $\mathrm{c}(\Gamma)$.

Nell'Esempio 5.1.2, il nucleo $\mathrm{c}(\Gamma)$ è descritto dal sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3 \\ x_i + x_j \geqslant \dfrac{1}{2}, \ i \neq j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0 \leqslant x_i \leqslant \dfrac{1}{2}, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

In alcuni casi, il nucleo si determina facilmente:

Proposizione 5.1.4. *Sia* $\Gamma = (P, v)$ *è un gioco essenziale a somma costante. Allora* $\mathrm{c}(\Gamma) = \emptyset$.

Dimostrazione. Per assurdo: sia $x \in \mathrm{c}(\Gamma)$. Allora, per ogni $j \in \{1, \dots n\}$ si ha

$$v(P) - v(j) = v(P \setminus \{j\}) \leq \sum_{i \neq j} x_i = v(P) - x_j,$$

cioè $x_j = v(j)$, da cui

$$v(P) = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} v(i),$$

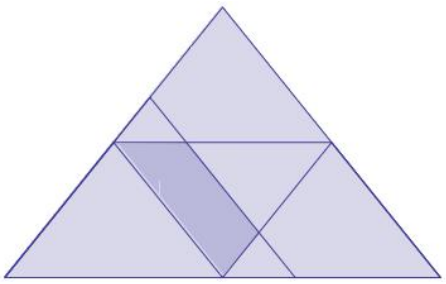

FIGURA 11. La regione più scura rappresenta c(Γ).

assurdo. □

Applicando la Proposizione 5.1.4, nell'Esempio 5.0.2 si ricava facilmente

$$\mathrm{c}(\Gamma) = \emptyset.$$

In generale l'insieme $\mathrm{c}(\Gamma) \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso e convesso. Il problema di determinare il nucleo di Γ rientra nella *programmazione lineare* (una branca dell'ottimizzazione). Poniamo

$$X = \Big\{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ per ogni } S \in 2^P\Big\},$$

e definiamo una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Per il Teorema di Weierstraß e per la definizione di X, esiste $(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \in X$ t.c.

$$f(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = \inf_X f = \bar{f} \geq v(P).$$

A questo punto occorre distinguere due casi:

- se $\bar{f} = v(P)$, allora per le Definizioni 5.1.1, 5.1.3 si ha $(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \in \mathrm{c}(\Gamma)$;
- se $\bar{f} > v(P)$, allora $\mathrm{c}(\Gamma) = \emptyset$.

Nell'Esempio 5.0.6, per determinare c(Γ) occorre risolvere il sistema misto

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 2 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \\ x_i + x_j \geqslant 3, \ i \neq j \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3 \\ 3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_3 = 6 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Per risolvere i sistemi del tipo precedente si può seguire un metodo grafico (fig. 11): rappresentiamo i punti (x_1, x_2, x_3) in un triangolo equilatero i cui vertici sono $(6, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ e $(0, 0, 6)$, e sullo stesso triangolo le equazioni e disequazioni del sistema (tutte lineari) si possono rappresentare mediante segmenti che dividono il triangolo. Una volta eliminati tutti i punti che non soddisfano qualcuno dei vincoli, ciò che resta è c(Γ)[11].

Esempio 5.1.5. Nel *gioco dei musicisti*, tre suonatori $P = \{1, 2, 3\}$ si esibiscono da soli, in duo o in trio percependo i seguenti salari:

$$v(1) = 100, \ v(2) = 150, \ v(3) = 200,$$

[11] 'Eliminato l'impossibile, ciò che resta, per improbabile che sia, deve essere la verità' (A. CONAN DOYLE).

$$v(1,2) = 400,\ v(1,3) = 300,\ v(2,3) = 400,$$
$$v(1,2,3) = 600.$$

Attraverso il procedimento grafico descritto sopra, si ottiene

$$\mathrm{c}(\Gamma) = \big\{(x_1, 400 - x_1, 200) : 100 \leq x_1 \leq 200\big\}.$$

Esempio 5.1.6. Nel *gioco dei guanti*, 10 persone hanno ciascuna un guanto sinistro e 11 persone hanno ciascuna un guanto destro; ovviamente un guanto solo è inservibile, come pure due guanti uguali, mentre un paio di guanti (diversi) vale 1. Il gioco $\Gamma = (P, v)$ ha la seguente struttura: $P = L \cup R$, dove $L = \{1, \dots 10\}$ è l'insieme di persone con un guanto sinistro e $R = \{11, \dots 21\}$ l'insieme di persone con un guanto destro. Per ogni $S \in 2^P$, $v(S)$ corrisponde al numero di paia di guanti che si possono formare con i guanti in possesso ai giocatori di S, quindi si ha

$$v(S) = \min\big\{|S \cap L|, |S \cap R|\big\}.$$

Chiaramente

$$\mathrm{i}(\Gamma) = \Big\{x \in \mathbb{R}^{21} : \sum_{i=1}^{21} x_i = 10,\ x_i \geq 0 \text{ per ogni } i \in \{1, \dots 21\}\Big\}.$$

Detta $\bar{x} \in \mathrm{i}(\Gamma)$ l'imputazione che ha le prime 10 componenti pari a 1 e le altre 11 pari a 0, si ha

$$\mathrm{c}(\Gamma) = \{\bar{x}\}.$$

Prima dimostriamo che $\bar{x} \in \mathrm{c}(\Gamma)$. Per ogni $S \in 2^P$ abbiamo

$$\sum_{i \in S} \bar{x}_i = |S \cap L| \geq v(S).$$

Poi proviamo che $\bar{x}$ è l'unica imputazione di $\mathrm{c}(\Gamma)$, per assurdo: sia $z \in \mathrm{c}(\Gamma) \setminus \{\bar{x}\}$. Distinguiamo due casi:

- se esiste $11 \leq h \leq 21$ t.c. $z_h = a > 0$, allora, posto $S = P \setminus \{h\}$, si ha
$$10 = v(S) \leq \sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \neq h} z_i = 10 - a < 10,$$
assurdo;
- se $z_i = 0$ per ogni $i \in \{11, \dots 21\}$, da $z \neq \bar{x}$ segue che esiste $1 \leq j \leq 10$ t.c. $z_j = b < 1$, da cui, per $T = \{j, 11\}$, si ha
$$1 = v(T) \leq \sum_{i \in T} z_i = z_j + z_{11} = b < 1,$$
assurdo.

Questo esempio suggerisce l'idea di un forte vantaggio per i possessori di guanti sinistri, ovvero del bene più raro.

Colleghiamo infine le Definizioni 5.0.9 e 5.1.3:

Teorema 5.1.7. *Se $\Gamma = (P, v)$ è un gioco semplice, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\mathrm{c}(\Gamma) \neq \emptyset$*;*

(ii) Γ *ha almeno un giocatore di veto.*

Dimostrazione. Proviamo che *(i)* implica *(ii)*, per assurdo: sia $v(P \setminus \{i\}) = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots n\}$ e sia $x \in \mathrm{c}(\Gamma)$. Allora per ogni $j \in \{1, \dots n\}$ si ha

$$0 \leq x_j = 1 - \sum_{i \neq j} x_i \leq 1 - v(P \setminus \{j\}) = 0,$$

contro l'ipotesi che x sia un'imputazione.

Proviamo ora che *(ii)* implica *(i)*: sia S la coalizione formata da tutti i giocatori di veto ($S \neq \emptyset$). Definiamo $x \in \mathbb{R}^n$ ponendo

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin S \\ 1/|S| & \text{se } i \in S. \end{cases}$$

Otteniamo così

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Inoltre, se $T \in 2^P$, distinguiamo due casi:

- se $v(T) = 0$, allora banalmente
$$\sum_{i \in T} x_i \geq v(T);$$
- se $v(T) = 1$, per quanto sopra $S \subseteq T$, da cui
$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1.$$

Dunque, $x \in \mathrm{c}(\Gamma)$. □

Esercizio 5.1.8. Dimostrare che nell'Esempio 5.0.2 si ha $\mathrm{c}(\Gamma) = \emptyset$.

Esercizio 5.1.9. Determinare $\mathrm{i}(\Gamma)$ e $\mathrm{c}(\Gamma)$ per il gioco dell'Esempio 5.0.7.

Esercizio 5.1.10. Determinare $\mathrm{i}(\Gamma)$ e $\mathrm{c}(\Gamma)$ per il gioco Γ definito da $P = \{1, 2, 3\}$ e

$$v(1) = 0,\ v(2) = v(3) = 1,$$
$$v(1, 2) = v(1, 3) = 2,\ v(2, 3) = 3,$$
$$v(1, 2, 3) = 4.$$

5.2. **Valore di Shapley.** In questa sotto-sezione introduciamo un concetto di *soluzione* per i giochi cooperativi, dovuto a Shapley [43] (ved. anche Selten [42]). Come accennato sopra, si tratta di assegnare a ciascun giocatore un 'valore' corrispondente non alla sua utilità come singolo, ma al contributo che fornisce alle coalizioni di cui fa parte.

Sia $\Gamma = (P, v)$ un gioco, con $P = \{1, \dots n\}$. Definiamo l'insieme delle *permutazioni* di P

$$P! = \big\{\sigma : P \to P :\ \sigma \text{ biunivoca}\big\}.$$

Chiaramente $|P!| = n!$. Ogni permutazione $\sigma \in P!$ definisce un ordine fra i giocatori: l'ordinamento naturale è $P = \{1, \dots n\}$, ma diremo che i *precede* j in σ se $\sigma(i) < \sigma(j)$. Per ogni $i \in P$, $\sigma \in P!$ poniamo

$$S(i, \sigma) = \big\{j \in P :\ \sigma(j) < \sigma(i)\big\}.$$

Definiamo il *contributo marginale* di i rispetto a σ (ovvero l'incremento di utilità offerto dal giocatore i alla coalizione $S(i, \sigma)$):

$$M(i, \sigma) = v(S(i, \sigma) \cup \{i\}) - v(S(i, \sigma)).$$

Per la Definizione 5.0.1 *(ii)* si ha per ogni $i \in P$, $\sigma \in P!$

$$M(i, \sigma) \geq v(i). \tag{5.1}$$

Facendo variare $\sigma \in P!$, la media dei contributi marginali di i ne misura il valore:

Definizione 5.2.1. *Per ogni $i \in P$, il valore di Shapley del giocatore i è*

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} M(i, \sigma).$$

Il valore di Shapley di Γ è il vettore $\phi = (\phi_1, \dots \phi_n)$, e si denota $\mathrm{Sv}(\Gamma)$.

L'interpretazione della Definizione 5.2.1 è la seguente: per ogni $i \in P$, ϕ_i rappresenta la ricompensa corrisposta al giocatore i, tanto maggiore quanto più rilevante è il contributo dato da i alle varie coalizioni che si possono formare. Per esempio, se si vuole organizzare un torneo di calcio avendo a disposizione molti bravi attaccanti ma pochi bravi difensori, il 'valore' di questi ultimi (cioè la loro quota del premio in caso di vittoria) sarà maggiore di quello degli attaccanti.

La formula della Definizione 5.2.1 può risultare di difficile computazione ($n!$ addendi). In tal caso si può usare la seguente formula equivalente:

Lemma 5.2.2. *Sia $\Gamma = (P, v)$ un gioco. Allora si ha per ogni $i \in P$*

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{i \notin S} |S|!(n - |S| - 1)!\big(v(S \cup \{i\}) - v(S)\big).$$

Dimostrazione. Per ogni $S \in 2^P$ t.c. $i \notin S$ esiste (almeno) una permutazione $\sigma \in P!$ t.c. $S(i, \sigma) = S$, da cui

$$M(i, \sigma) = v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Denotiamo $\Sigma(i, S) \subset P!$ l'insieme di tali permutazioni. La cardinalità di $\Sigma(i, S)$ è data dal calcolo combinatorio: posto $|S| = k$, il numero delle permutazioni $\sigma \in \Sigma(i, S)$ equivale al numero delle permutazioni dei k elementi di S ($k!$), moltiplicato per il numero delle permutazioni dei restanti giocatori di $P \setminus (S \cup \{i\})$ ($(n - k - 1)!$), cioè

$$|\Sigma(i, S)| = |S|!(n - |S| - 1)!.$$

Si ricava dunque

$$\sum_{\sigma \in P!} M(i, \sigma) = \sum_{i \notin S} |S|!(n - |S| - 1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$

da cui la tesi. □

Nel Lemma 5.2.2, gli addendi sono 2^{n-1} (sotto-insiemi di $P \setminus \{i\}$). La formula é apprezzabile per valori grandi di n, in quanto

$$\lim_n \frac{2^{n-1}}{n!} = 0.$$

Esempio 5.2.3. Sia $\Gamma = (P, v)$ il gioco con $P = \{1, 2, 3\}$ e

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$
$$v(1, 2) = v(1, 3) = 4,\ v(2, 3) = 6,$$
$$v(1, 2, 3) = 20.$$

I contributi marginali possono essere raccolti nella seguente tabella:

$\sigma \backslash i$	1	2	3
123	0	4	16
132	0	16	4
213	4	0	16
231	14	0	6
312	4	16	0
321	14	6	0

(osserviamo che la somma dei valori su ciascuna riga della tabella è $v(P)$). Usando questa tabella, possiamo facilmente calcolare il valore di Shapley del gioco Γ in base alla Definizione 5.2.1 la prima componente è

$$\phi_1 = \frac{1}{3!}(4 + 14 + 4 + 14) = 6,$$

e similmente si calcolano le altre. Dunque si ha $\mathrm{Sv}(\Gamma) = (6, 7, 7)$.

Esempio 5.2.4. Consideriamo un gioco $\Gamma = (P, v)$ con $P = \{1, \dots 5\}$ e $v : 2^P \to \mathbb{R}^+$ definita da

$$v(S) = |S| - 1,$$

ovvero $v(i) = 0$, $v(\{i, j\}) = 1$, etc. Per il calcolo di $\mathrm{Sv}(\Gamma)$ applichiamo il Lemma 5.2.2. Fissiamo $i \in P$ e osserviamo che per ogni $S \in 2^P$ t.c. $i \notin S$ si ha

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1.$$

D'altra parte, il numero delle coalizioni $S \in 2^P$ t.c. $i \notin S$ è quello delle combinazioni dei restanti 4 giocatori di classe k, da cui

$$\phi_i = \frac{1}{5!} \sum_{k=0}^{4} \frac{4!}{k!(n-k)!}(k!(4-k)!) = \frac{5 \cdot 4!}{5!} = 1.$$

Presentiamo ora dei risultati che collegano la Definizione 5.2.1 alla teoria svolta nella Sotto-sezione 5.1:

Proposizione 5.2.5. *Sia $\Gamma = (P, v)$ un gioco. Allora si ha $\mathrm{Sv}(\Gamma) \in \mathrm{i}(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathrm{Sv}(\Gamma) = \phi \in \mathbb{R}^n$. Richiamiamo la Definizione 5.1.1, e dimostriamo prima che ϕ soddisfa (i). Per ogni $\sigma \in P!$ si osserva la seguente relazione 'telescopica':

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M(i, \sigma) &= \sum_{i=1}^{n} (v(S(i, \sigma) \cup \{i\}) - v(S(i, \sigma)) \\ &= v(P) - v(\emptyset) = v(P) \end{aligned}$$

(Definizione 5.0.1 (i)). Ricordando che $|P!| = n!$, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \phi_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} M(i, \sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} \sum_{i=1}^{n} M(i, \sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} v(P) = v(P). \end{aligned}$$

Proviamo ora che ϕ soddisfa (ii). Per ogni $i \in P$, da (5.1) segue

$$\phi_i \geqslant \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} v(i) = v(i).$$

Dunque, $\phi \in \mathrm{i}(\Gamma)$. □

Si ha inoltre:

Proposizione 5.2.6. *Siano $\Gamma = (P, v)$ un gioco, $i \in P$ un giocatore fantoccio, $\mathrm{Sv}(\Gamma) = \phi$. Allora $\phi_i = v(i)$.*

Dimostrazione. Sia $P = \{1, \dots n\}$. Ricordiamo la Definizione 5.0.8: per ogni $S \in 2^P$ t.c. $i \notin S$ si ha

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}\phi_i &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v(S)\big)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!} v(i) = v(i),\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Altre importanti proprietà formali del valore di Shapley sono espresse dal seguente risultato:

Teorema 5.2.7. (Shapley [43]) *Siano* $\Gamma = (P, v)$, $\Gamma' = (P, v')$ *giochi con* $\mathrm{Sv}(\Gamma) = \phi$, $\mathrm{Sv}(\Gamma') = \phi'$*:*

(i) se $\Gamma + \Gamma' = (P, v + v')$*, allora* $\mathrm{Sv}(\Gamma + \Gamma') = \phi + \phi'$ *(additività);*

(ii) se esistono $r > 0$, $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ *t.c. per ogni* $S \in 2^P$

$$v'(S) = rv(S) + \sum_{i\in S} a_i,$$

allora $\phi' = r\phi + (a_1, \dots a_n)$ *(equivarianza per equivalenza strategica);*

(iii) se esiste $\rho \in P!$ *t.c.* $v'(S) = v(\rho(S))$ *per ogni* $S \in 2^P$*, allora* $\phi'_i = \phi_{\rho(i)}$ *(simmetria).*

Dimostrazione. Poniamo $P = \{1, \dots n\}$. Proviamo (i). Per ogni $i \in P$, $\sigma \in P!$ abbiamo

$$\begin{aligned}(v+v')(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - (v+v')(S(i,\sigma)) = &\big(v(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v(S(i,\sigma))\big)\\ &+ \big(v'(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v'(S(i,\sigma))\big),\end{aligned}$$

quindi la i-ma componente di $\mathrm{Sv}(\Gamma + \Gamma')$ è

$$\begin{aligned}\mathrm{Sv}_i(\Gamma+\Gamma') &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big((v+v')(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - (v+v')(S(i,\sigma))\big)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v(S(i,\sigma))\big) + \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v'(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v'(S(i,\sigma))\big)\\ &= \phi_i + \phi'_i.\end{aligned}$$

Proviamo ora (ii). Per ogni $i \in P$, $\sigma \in P!$ abbiamo

$$v'(S(i,\sigma)\cup\{i\}) = rv(S(i,\sigma)\cup\{i\}) + \sum_{j\in S(i,\sigma)} a_j + a_i,$$

$$v'(S(i,\sigma)) = rv(S(i,\sigma)) + \sum_{j\in S(i,\sigma)} a_j,$$

da cui per differenza

$$\begin{aligned}\phi'_i &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v'(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v'(S(i,\sigma))\big)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(rv(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - rv(S(i,\sigma)) + a_i\big)\\ &= \frac{r}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v(S(i,\sigma))\big) + \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!} a_i\\ &= r\phi_i + a_i.\end{aligned}$$

Proviamo infine (*iii*). Fissato $i \in P$, sia $j = \rho(i)$. Per ogni $\sigma \in P!$ abbiamo $\sigma\rho^{-1} \in P!$, da cui

$$\begin{aligned}\rho(S(i,\sigma)) &= \big\{\rho(k) : k \in P,\, \sigma(k) < \sigma(i)\big\} \\ &= \big\{h \in P : \sigma\rho^{-1}(h) < \sigma\rho^{-1}(i)\big\} \\ &= S(j, \sigma\rho^{-1}).\end{aligned}$$

Osservando che la mappa $\sigma \mapsto \sigma\rho^{-1}$ è biunivoca da $P!$ in se stesso, otteniamo

$$\begin{aligned}\phi'_i &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v'(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v(S(i,\sigma))\big) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v(\rho(S(i,\sigma))\cup\{j\}) - v(\rho(S(i,\sigma)))\big) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!}\big(v(S(j,\sigma\rho^{-1})\cup\{j\}) - v(S(j,\sigma\rho^{-1}))\big) \\ &= \phi_j,\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 5.2.8. Le proprietà del valore di Shapley espresse dalla Proposizione 5.2.6 e dal Teorema 5.2.7 sono *caratteristiche*, ovvero altre definizioni di 'soluzione' di un gioco possiedono alcune di queste proprietà, ma non tutte.

Torniamo alla Proposizione 5.2.5: essa non garantisce che $\mathrm{Sv}(\Gamma) \in \mathrm{c}(\Gamma)$ (ved. Definizione 5.1.3), il che infatti non è vero in generale. Questa proprietà è però verificata da una speciale classe di giochi cooperativi:

Definizione 5.2.9. *Un gioco $\Gamma = (P, v)$ è detto convesso se per ogni $S, T \in 2^P$*

$$v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

L'interpretazione della Definizione 5.2.9 è la seguente: siano $A, B, C \in 2^P$ t.c. $A \subseteq B$, $B \cap C = \emptyset$. Posto $S = A \cup C$, $T = B$, si ha

$$v(B \cup C) - v(B) \geq v(A \cup C) - v(A),$$

ovvero il contributo marginale offerto da C a una coalizione è tanto maggiore, quanto più grande è la coalizione stessa. Per i giochi convessi si ha il seguente risultato (che migliora la Proposizione 5.2.5):

Teorema 5.2.10. *Sia $\Gamma = (P, v)$ un gioco convesso. Allora si ha* $\mathrm{Sv}(\Gamma) \in \mathrm{c}(\Gamma)$.

Dimostrazione. Siano $P = \{1, \dots n\}$, $\mathrm{Sv}(\Gamma) = \phi$. Definiamo una funzione $g : P! \to \mathbb{R}^n$ ponendo per ogni $\sigma \in P!$

$$g(\sigma) = (M(1,\sigma), \dots M(n,\sigma)).$$

Osserviamo che $g(\sigma) \in \mathrm{i}(\Gamma)$ (Definizione 5.1.1). Infatti, per somma 'telescopica' si ha

$$\sum_{i=1}^{n} M(i,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\big(v(S(i,\sigma)\cup\{i\}) - v(S(i,\sigma))\big) = v(P),$$

mentre per ogni $i \in P$ da (5.1) segue

$$M(i,\sigma) \geqslant v(i).$$

Proviamo ora che $g(\sigma) \in \mathrm{c}(\Gamma)$ (Definizione 5.1.3). Infatti, per ogni $S \in 2^P$, $i \in S$, dalla Definizione 5.2.9 segue

$$\begin{aligned}M(i,\sigma) &= v(\{j \in P : \sigma(j) \leqslant \sigma(i)\}) - v(\{j \in P : \sigma(j) < \sigma(i)\}) \\ &\geqslant v(\{j \in S : \sigma(j) \leqslant \sigma(i)\}) - v(\{j \in S : \sigma(j) < \sigma(i)\}).\end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} M(i,\sigma) &\geqslant \sum_{i\in S} v(\{j\in S:\ \sigma(j)\leqslant\sigma(i)\}) - \sum_{i\in S} v(\{j\in S:\ \sigma(j)<\sigma(i)\})\\ &= v(S).\end{aligned}$$

Ricordiamo ora che $\mathrm{c}(\Gamma)$ è un insieme convesso, e che

$$\phi = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P!} g(\sigma),$$

dunque $\phi\in\mathrm{c}(\Gamma)$. □

Per il Teorema 5.2.10, ogni gioco convesso ha nucleo non vuoto.

Esercizio 5.2.11. Ricalcolare il valore di Shapley del gioco dell'Esempio 5.2.3, usando il Lemma 5.2.2.

Esercizio 5.2.12. Calcolare il valore di Shapley del gioco dell'Esempio 5.1.5.

Esercizio 5.2.13. Sia $\Gamma=(P,v)$ il gioco definito da $P=\{1,2,3\}$ e

$$v(1)=v(2)=v(3)=1,$$
$$v(1,2)=v(1,3)=2,\ v(2,3)=3,$$
$$v(1,2,3)=7.$$

Determinare il nucleo e il valore di Shapley di Γ. Il gioco Γ è convesso?

Esercizio 5.2.14. Si vuole organizzare un torneo di calcio fra $n=20$ persone, di cui solo 3 portieri. Una squadra S è ammessa a partecipare se è formata da almeno 5 persone e contiene almeno 1 portiere. Definire la funzione caratteristica del gioco, e calcolare il valore di Shapley delle due categorie di giocatori (portieri e non-portieri).

5.3. **Esempi.** Presentiamo qui alcuni esempi di giochi cooperativi, studiati mediante il valore di Shapley.

Esempio 5.3.1. Quattro azionisti possiedono rispettivamente il 10%, 20%, 30%, 40% di un'azienda. In una riunione dell'assemblea degli azionisti, una proposta viene approvata se ottiene i voti dei titolari di più del 50% dell'azienda. Questa situazione si può rappresentare con un gioco semplice $\Gamma=(P,v)$, dove $P=\{1,2,3,4\}$ e

$$v(1)=v(2)=v(3)=v(4)=0,$$
$$v(1,2)=v(1,3)=v(1,4)=v(2,3)=0,\ v(2,4)=v(3,4)=1,$$
$$v(1,2,3)=v(1,2,4)=v(1,3,4)=v(2,3,4)=1,$$
$$v(1,2,3,4)=1.$$

Poiché Γ è semplice e non ha alcun giocatore di veto, si ha $\mathrm{c}(\Gamma)=\emptyset$ (Proposizione 5.1.7). Per calcolare $\mathrm{Sv}(\Gamma)$ usiamo il Lemma 5.2.2:

$$\phi_i = \frac{1}{4!}\sum_{i\notin S} |S|!(3-|S|)!\big(v(S\cup\{i\})-v(S)\big).$$

Per esempio, le coalizioni che non contengono 1 sono $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{2,3,4\}$: il contributo marginale di 1 a tutte queste è 0, fuorché per la coalizione $\{2,3\}$ alla quale 1 offre un contributo marginale pari a 1, da cui

$$\phi_1 = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Similmente si calcolano le altre componenti, concludendo che

$$\phi = \Big(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\Big),$$

con il sorprendente esito che la ricompensa di 2 è uguale a quella di 3, benché quest'ultimo possieda più titoli.

Esempio 5.3.2. Il *Consiglio di Sicurezza dell'ONU* è formato da 5 membri permanenti (con diritto di veto) e da 10 membri transitori (senza diritto di veto). Una proposta al Consiglio viene approvata se ottiene almeno 9 voti favorevoli, tra i quali tutti i voti dei membri permanenti. Nasce un gioco semplice $\Gamma = (P, v)$ con $P = \{1, \dots 15\}$. Denotiamo per semplicità $V = \{1, \dots 5\}$ l'insieme dei giocatori di veto, e definiamo la funzione caratteristica ponendo per ogni $S \in 2^P$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } |S| \geq 9 \text{ e } V \subset S \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo è uno dei casi in cui il Lemma 5.2.2 risulta utile ($15! \sim 1,31 \cdot 10^{12}$, $2^{14} = 16384$). Abbiamo per ogni $i \in P$

$$\phi_i = \frac{1}{15!} \sum_{i \notin S} |S|!(14 - |S|)!\big(v(S \cup \{i\}) - v(S)\big). \tag{5.2}$$

Fissato $i \in P \setminus V$, per ogni $S \in 2^P$, $i \notin S$ esaminiamo tre casi speciali:

- se $|S| \leq 7$ si ha $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$;
- se $|S| \geq 9$ si ha $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$;
- se $V \setminus S \neq \emptyset$ si ha $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

Dunque in (5.2) vanno contate solo le coalizioni $S \subseteq P \setminus \{i\}$ t.c. $|S| = 8$, $V \subset S$: tali coalizioni si possono formare combinando gli altri 9 giocatori di $P \setminus V$ in gruppi di 3, dunque il loro numero è $9!/(3!6!)$. Pertanto

$$\phi_i = \frac{1}{15!} \frac{9!}{3!6!} 8!(14 - 8)! = \frac{4}{2145}.$$

Se invece $i \in V$, osserviamo che

- se $|S| \leq 7$ si ha $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$;
- se $V \setminus (S \cup \{i\}) \neq \emptyset$ si ha $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

Dunque in (5.2) vanno contate solo le coalizioni $S \subseteq P \setminus \{i\}$ t.c. $|S| \geq 8$, $V \setminus \{i\} \subset S$: fissato $k \in \{8, \dots 14\}$, le coalizioni di cardinalità k che non contengono i ma contengono $V \setminus \{i\}$ si possono ottenere come le combinazioni dei restanti 10 giocatori in gruppi di $(k - 4)$, il cui numero è

$$\frac{10!}{(k-4)!(14-k)!},$$

da cui si ricava

$$\phi_i = \frac{1}{15!} \sum_{k=8}^{14} \frac{k!(14-k)!10!}{(k-4)!(14-k)!} = \frac{421}{2145}.$$

Dal confronto tra i due risultati si può dedurre che un membro permanente del Consiglio è *molto* più importante di uno transitorio in virtù del suo diritto di veto[12], indipendentemente dalla durata.

Per concludere, presentiamo un esempio di *gioco subadditivo* (la differenza, rispetto alla Definizione 5.0.1, è che può aversi $v(S \cup T) < v(S) + v(T)$ per una coppia di coalizioni $S, T \in 2^P$, $S \cap T = \emptyset$). Per tali giochi, i concetti di imputazione e di nucleo come sono stati fin qui definiti non hanno senso, mentre è ancora possibile calcolare il valore di Shapley.

[12]Nella storia dell'ONU, il Paese che si è avvalso più spesso del diritto di veto è l'URSS/Russia, probabilmente perché i russi sono ottimi matematici.

Esempio 5.3.3. Nel *gioco dell'aeroporto*, si considera un aeroporto in cui atterrano aerei diversi, che richiedono piste di lunghezza diversa. Il costo di manutenzione di ciascuna pista va ripartito tra gli aerei che ne fanno uso, tenendo conto che ognuno di essi usura una parte diversa della pista. I giocatori (gli aerei) siano $P = \{1, \dots n\}$, raggruppati in k classi

$$P_1 = \{1, \dots m-1\}, \ \dots \ P_k = \{m_{k-1}+1, \dots m_k\} \ (1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k = n)$$

in modo che gli aerei della classe P_j abbiano bisogno di una pista di costo (lunghezza) c_j $(0 < c_1 < \dots < c_k)$. Detta $S \in 2^P$ una coalizione (una compagnia aerea), definiamo $v(S)$ come costo della pista più lunga di cui necessita (si noti che in questo caso la funzione caratteristica misura un *costo*, anziché una ricompensa):

$$v(S) = \max\left\{c_j : \ S \cap P_j \neq \emptyset\right\}.$$

Così è definito un gioco $\Gamma = (P, v)$ (la funzione caratteristica v non è super-additiva). Il valore di Shapley è alquanto difficile da calcolare in base alla Definizione 5.2.1. È più semplice procedere come segue:

- il costo c_1 del primo tratto di pista è diviso tra tutti gli aerei di P;
- il costo $c_2 - c_1$ del secondo tratto è diviso tra gli aerei del sotto-insieme $\cup_{j=2}^{k} P_j$;
- ...
- il costo $c_k - c_{k-1}$ dell'ultimo tratto è diviso tra gli aerei del sotto-insieme P_k.

Si dimostra che la ripartizione di costi così ottenuta corrisponde a ϕ. Per esempio, se $P = \{1, 2, 3\}$ con $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{3\}$ e $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, la tabella dei contributi marginali è la seguente:

$\sigma \backslash i$	1	2	3
123	1	0	3
132	1	0	3
213	0	1	3
231	0	1	3
312	0	0	4
321	0	0	4

Si ricava $\mathrm{Sv}(\Gamma) = (1/3, 1/3, 10/3)$.

Esercizio 5.3.4. Completare i calcoli dell'Esempio 5.3.1.

Esercizio 5.3.5. Ricalcolare il valore di Shapley del gioco dell'Esempio 5.3.2, omettendo il potere di veto.

6. Cenni sui giochi dinamici

Non si può discendere due volte nel medesimo fiume.
Eraclito

In questa sezione esponiamo alcuni elementi di teoria dei *giochi dinamici*, che sono caratterizzati dalla sequenzialità delle scelte dei vari giocatori (ved. Gibbons [16], Morgenstern & von Neumann [31]).

Richiamando la Definizione 1.1.1 e la susseguente discussione, definiamo un *gioco dinamico* (deterministico, non-cooperativo) come l'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti (*giocatori*), che effettuano le loro scelte (*mosse*) in una sequenza temporale prefissata. Ogni giocatore, quando effettua ogni sua mossa, è informato di tutte le mosse precedenti sue e degli altri giocatori e delle loro conseguenze (*informazione completa*). Ai giocatori è vietato stringere accordi vincolanti. Una *strategia*, per un giocatore, è una sequenza di mosse condizionate dalle mosse degli altri giocatori.

Un gioco di questo genere si suole rappresentare in *forma estesa* (ved. Zermelo [46], Kuhn & Tucker [25]):

Definizione 6.0.1. *Un gioco (dinamico) è una coppia $\Gamma = (P, S)$, dove $P = \{P_1, \dots P_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) è l'insieme dei giocatori, $S = \{s_1, \dots s_m\}$ ($m \in \mathbb{N}$) è l'insieme degli stati. Sull'insieme degli stati è definito un ordine parziale $\ll$ (relazione transitiva e antisimmetrica).*

Integriamo la Definizione 6.0.1 con alcune altre nozioni. Uno stato $s \in S$ è detto iniziale se non esiste $t \in S$ t.c. $t \ll s$ (l'insieme degli stati iniziali è denotato S_i) e finale (o *esito*) se non esiste $t \in S$ t.c. $s \ll t$ (l'insieme degli stati finali è denotato S_e), altrimenti è un *turno*.

Ogni giocatore P_i ($1 \leq i \leq n$) dispone di una preferenza sull'insieme S_e (ved. Definizione 1.1.2), e per il Teorema 1.1.4 anche di una funzione di utilità $u_i : S_e \to \mathbb{R}$. Una *mossa* è una coppia ordinata $(s, t) \in S \times S$ t.c.

(i) $s \ll t$;
(ii) non esiste $r \in S$ t.c. $s \ll r \ll t$.

Una *storia* è una sequenza finita di stati $(s_1, \dots s_k)$ ($k \in \mathbb{N}$ è detto *lunghezza*) t.c.

$$s_1 \ll s_2 \ll \dots \ll s_k.$$

Una storia è detta *conclusa* se $s_k \in S_e$. Elenchiamo di seguito gli assiomi che saranno adottati nella presente discussione:

- lo stato iniziale s_0 è unico;
- per ogni stato finale $s \in S_e$ esiste un'unica storia che congiunge s_0 con s (la lunghezza di questa storia è detta *altezza* di s);
- esiste una regola di turno, ovvero una funzione $\tau : S \setminus S_e \to P$ che associa a ogni stato il giocatore a cui spetta muovere.

Per la descrizione e la risoluzione dei giochi dinamici, lo strumento matematico più adatto è la *teoria dei grafi*.

6.1. Grafi.

Richiamiamo alcune definizioni elementari della teoria dei grafi, rimandando per approfondimenti a Wilson [45]:

Definizione 6.1.1. *Un grafo (semplice) è una coppia $\mathcal{G} = (V, E)$ dove $V = \{v_1, \dots v_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) è un insieme finito e*

$$E \subseteq \{e \in 2^V : |e| = 2\}$$

è un insieme di coppie non ordinate di elementi di V. Gli elementi di V sono detti vertici di $\mathcal{G}$, quelli di E sono detti lati. Inoltre:

(*i*) *se* $e = \{v, w\}$ *è un lato,* v *e* w *ne sono gli estremi;*
(*ii*) *se* $e, f \in E$, $e \neq f$, $e \cap f \neq \emptyset$, e *e* f *sono consecutivi;*
(*iii*) *se* $v, w \in V$ *e* $\{v, w\} \in E$, v *e* w *sono adiacenti.*

Integriamo la Definizione 6.1.1 con un breve lessico. Sia $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo:

- per ogni $v \in V$ definiamo il *grado* di v ponendo
$$\deg(v) = \big|\{e \in E : v \in e\}\big|;$$
- $v \in V$ è detto isolato se $\deg(v) = 0$;
- per ogni $v, w \in V$, una *catena* di estremi v, w è un insieme ordinato di lati $C = (e_1, \dots e_p)$ ($p \in \mathbb{N}$) t.c. e_k, e_{k+1} sono consecutivi per ogni $k \in \{1, \dots p-1\}$, v è un estremo di e_1, w è un estremo di e_p;
- un ciclo è una catena con estremi coincidenti, t.c. i vertici intermedi sono distinti a due a due;
- $\mathcal{G}$ è *aciclico* se non contiene cicli;
- $\mathcal{G}$ è *connesso* se per ogni $v, w \in V$ esiste una catena C di estremi v, w;
- un *sotto-grafo* di $\mathcal{G}$ è un grafo $\mathcal{G}' = (V', E')$ t.c. $V' \subseteq V$ e E' è l'insieme dei lati di $\mathcal{G}$ con estremi in V.

Dalla Definizione 6.1.1 si vede che i lati di un grafo non sono orientati. Qualora si stabilisca un orientamento, la nozione di grafo cambia:

Definizione 6.1.2. *Un grafo orientato è una coppia* $\mathcal{G} = (V, E)$ *dove* $V = \{v_1, \dots v_n\}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) è un insieme non vuoto e* $E \subseteq V \times V$.

Anche in questo caso dobbiamo stabilire un minimo di terminologia. Sia $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo orientato:

- per ogni $v, w \in V$, una *catena* di estremi v, w è definita come sopra, ma con v primo estremo del lato e_1 e w secondo estremo del lato e_p;
- su V è definita una relazione d'ordine $\ll$ mediante la legge
$$v \ll w \text{ se esiste una catena } C \text{ di estremi } v \text{ e } w;$$
- $v \in V$ è un vertice iniziale se non esiste $w \in V$ t.c. $w \ll v$;
- $w \in V$ è un vertice finale se non esiste $v \in V$ t.c. $w \ll v$.

Introduciamo infine la classe più studiata (e più utile in teoria dei giochi) di grafi:

Definizione 6.1.3. *Un albero è un grafo orientato, connesso, aciclico.*

La Definizione 6.1.3 è lievemente ambigua: $\mathcal{G}$ è connesso per catene *non-orientate*, ovvero: per ogni $v, w \in V$ esiste $u \in V$ t.c. $u \ll v$, $u \ll w$.
Se $\mathcal{G} = (V, E)$ è un albero, un *sotto-albero* è un sotto-grafo $\mathcal{G}' = (V', E')$, per il quale esiste $v_0 \in V$ t.c.
$$V' = \{v_0\} \cup \{v \in V : v_0 \ll v\}.$$
I vertici iniziali di un albero si chiamano *radici*, i vertici finali *foglie*.

Esercizio 6.1.4. Rappresentare la propria famiglia mediante un grafo orientato, in cui due vertici v, w sono collegati da un lato se w è figlio di v. Dimostrare che il grafo ottenuto è aciclico.

6.2. **Equilibrio nei sotto-giochi.** Confrontando le Definizioni 6.0.1 e 6.1.2, osserviamo quanto segue: se $\Gamma = (P, S)$ è un gioco (dinamico), denotando $E \subset S \times S$ l'insieme delle mosse consentite, possiamo rappresentare Γ mediante il grafo orientato $\mathcal{G} = (S, E)$.
Dagli assiomi introdotti sopra, vediamo che $\mathcal{G}$ soddisfa la Definizione 6.1.3:

Proposizione 6.2.1. *Siano* Γ *un gioco,* $\mathcal{G}$ *il grafo che rappresenta* Γ. *Allora* $\mathcal{G}$ *è un albero.*

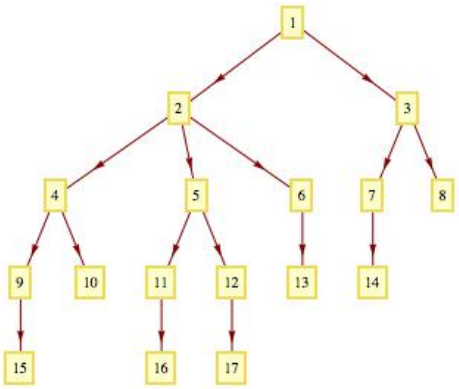

FIGURA 12. Il gioco dei fiammiferi: le foglie 10, 13, 14 rappresentano conclusioni favorevoli a P, mentre 8, 15, 16, 17 rappresentano conclusioni favorevoli a Q.

La rappresentazione mediante grafi permette di seguire le possibili storie di un gioco:

Esempio 6.2.2. Nel *gioco dei fiammiferi* si comincia con due gruppi di 2 fiammiferi ciascuno, posti su un tavolo e detti A, B. I due giocatori P, Q tolgono a turno quanti fiammiferi vogliono da uno dei due gruppi, e vince il primo che lascia il tavolo vuoto. Sia P il primo a muovere. L'albero che rappresenta questo gioco ha 1 radice e 7 foglie, cioè vi sono 7 esiti, 3 dei quali favorevoli a P e 4 a Q, come rappresentato nella fig. 12. Per esempio, la storia rappresentata dalla catena $(1) \to (15)$ è la seguente:

(1) stato iniziale;
(2) P toglie un fiammifero dal gruppo A;
(4) Q toglie l'altro fiammifero da A;
(9) P toglie un fiammifero da B;
(15) Q toglie l'altro fiammifero da B e vince.

Se dopo (4) P decide invece di togliere entrambi i fiammiferi da B, vince lui (10).

Per risolvere un gioco dinamico, dobbiamo estendere il concetto di equilibrio di Nash (Definizione 1.2.1) tenendo conto della regola di turno. Vediamo dapprima due esempi:

Esempio 6.2.3. Riprendiamo in esame il gioco dell'Esempio 1.2.3, introducendo stavolta una regola di turno: per esempio, sia P il primo a giocare, quindi gioca Q, in condizioni di completa informazione. Al secondo turno, le scelte sono le seguenti:

- se P ha scelto c, Q sceglie c;
- se P ha scelto t, Q sceglie c.

Sapendo ciò, al primo turno P sceglie c e si ritorna all'unico equilibrio (c, c). Lo stesso avviene se Q gioca per primo.

Esempio 6.2.4. Il *gioco dell'entrata* è un modello molto generale che abbraccia il seguente caso: un produttore P deve decidere se introdursi (i) oppure no (o) in un mercato monopolizzato da un altro produttore Q. Questi può reagire aggressivamente (a), abbassando i prezzi e infliggendo una perdita a sé oltre che al concorrente, oppure pacificamente (p), dividendo il mercato con P. Assumiamo che il prezzo unitario del prodotto sia 1, il costo unitario di produzione sia $1/2$ e il prezzo ribassato sia $1/3$, inoltre la saturazione del mercato sia raggiunta per 12 unità prodotte. Rappresentando questo gioco Γ in forma strategica, otteniamo la seguente tabella dei pay-off (in cui il pay-off di un

produttore coincide col suo guadagno, o perdita, globale):

$P\backslash Q$	a	p
i	$(-1,-1)$	$(3,3)$
o	$(0,-2)$	$(0,6)$

Per esempio, alla scelta di strategie (i,a) corrisponde la seguente situazione: P entra nel mercato, Q abbassa il prezzo a $1/3$, ogni produttore realizza e vende 6 unità spendendo $6/2=3$ e ricavando $6/3=2$, dunque l'utilità di ciascuno dei giocatori è -1. Si ha $\mathrm{Ne}(\Gamma)=\{(i,p)\}$.
Consideriamo ora il gioco in senso dinamico: chiaramente la prima mossa spetta a P, che sceglie i, inducendo Q a scegliere p.

Il modo più semplice per 'risolvere' un gioco dinamico è quello basato sul *metodo di induzione a ritroso* (o *algoritmo di Zermelo-Kuhn*): si tratta di un procedimento finalizzato a eliminare, in un numero finito di passi, tutte le mosse irrazionali di tutti i giocatori. Quello che resta è l'unione delle storie razionali, che conduce alle soluzioni del gioco[13].
Sia $\Gamma=(P,S)$ un gioco:

- scegliamo uno stato finale s di altezza massima;
- determiniamo lo stato immediatamente precedente $t\in S$ e l'insieme T degli stati immediatamente successivi a t (tra cui s);
- detto P_i $(1\leq i\leq n)$ il giocatore che muove in t, determiniamo $s'\in T$ t.c.
$$u_i(s')=\max_T u_i;$$
- definiamo un nuovo gioco Γ' eliminando tutti gli stati di T e attribuendo a t un'utilità per P_i uguale a $u_i(s')$;
- ripetiamo il procedimento partendo da t (che è uno stato finale di Γ');
- ...
- raggiungiamo lo stato iniziale s_0.

Attraverso questo procedimento si determina una storia soddisfacente la seguente definizione:

Definizione 6.2.5. *Un equilibrio perfetto nei sotto-giochi per il gioco* Γ *è una storia completa* $C=(s_0,s_1,\dots s_p)$ *(*$p\in\mathbb{N}$*) t.c. per ogni* $0\leq j\leq p-1$ *la mossa migliore per il giocatore che gioca in* s_j *è* (s_j,s_{j+1})*. L'insieme degli equilibri perfetti nei sotto-giochi di* Γ *è indicato con* $\mathrm{spe}(\Gamma)$*.*

Il procedimento di induzione a ritroso fornisce una dimostrazione costruttiva del seguente risultato:

Teorema 6.2.6. (Selten [42]) *Se* Γ *è un gioco dinamico a informazione completa con un insieme finito di stati, allora* $\mathrm{spe}(\Gamma)\neq\emptyset$*.*

In generale tale soluzione non è unica, poiché in qualche stato possono darsi due o più mosse ottimali equivalenti per un giocatore. Nel gioco dell'Esempio 6.2.2, vi sono 3 equilibri perfetti nei sotto-giochi, tutti favorevoli a Q. Nel gioco dell'Esempio 6.2.4, si ha $\mathrm{spe}(\Gamma)=\{(i,p)\}$.
I seguenti esempi provano che gli equilibri di Nash e gli equilibri perfetti nei sotto-giochi non sempre coincidono:

Esempio 6.2.7. Sia Γ un gioco con 2 giocatori P, Q, rappresentato dalla seguente tabella dei pay-off:

$P\backslash Q$	y_1	y_2
x_1	$(2,1)$	$(0,0)$
x_2	$(1,1)$	$(1,2)$

[13]Sempre il metodo di A. Conan Doyle.

Si ha

$$\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}.$$

Consideriamo ora la versione dinamica di Γ, supponendo che P giochi per primo e Q per secondo. Applichiamo l'induzione a ritroso:

- partiamo dallo stato finale (x_1, y_1);
- l'ultima mossa è stata quella di Q, che ha scelto y_1 (scelta ottimale);
- la mossa precedente è stata quella di P, che ha scelto x_1 con utilità 2, mentre x_2 avrebbe prodotto utilità 1 (scelta ottimale);
- stato iniziale.

Partendo da qualunque altro stato finale, si perviene alla storia (x_1, y_1), dunque

$$\mathrm{spe}(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}.$$

L'altro equilibrio statico (x_2, y_2) si può interpretare come effetto di una 'minaccia di ritorsione' da parte di Q: esso comporta una scelta, da parte di P, non ottimale (ma solo perché la minaccia gli preclude l'esito migliore). Dal punto di vista della razionalità individuale, questa minaccia non è credibile, in quanto implica la disponibilità da parte di Q a danneggiare se stesso[14].

Esempio 6.2.8. Sia Γ un gioco con 2 giocatori P, Q, rappresentato dalla seguente tabella dei pay-off:

$P \backslash Q$	y_1	y_2
x_1	$(2, 1)$	$(0, 0)$
x_2	$(3, 0)$	$(1, 1)$

Si vede facilmente che $\mathrm{Ne}(\Gamma) = \{(x_2, y_2)\}$. Ma se inseriamo una regola di turno per cui P gioca per primo, otteniamo $\mathrm{spe}(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$.

Concludiamo questa breve presentazione accennando a una possibile estensione della teoria dei giochi dinamici, in cui si rimuove l'ipotesi di informazione completa.

Consideriamo un gioco $\Gamma = (P, S)$, e supponiamo che alcuni stati del gioco $s_1, \dots s_k$ ($k \in \mathbb{N}$), nei quali è di turno sempre lo stesso giocatore P_i ($1 \leq i \leq n$), siano per tale giocatore indistinguibili: si parla allora di *informazione incompleta* e l'insieme $\{s_1, \dots s_k\}$ è detto *insieme informativo*. Coerentemente, le mosse a disposizione di P_i in ognuno degli stati che formano lo stato informativo sono le stesse (esse però conducono a esiti diversi a causa di quelle informazioni che P_i ignora).

Possiamo trattare questo caso introducendo una *distribuzione di probabilità* sull'insieme informativo (ved. Definizione **??**): se la probabilità di s_j secondo P_i è x_j, con $0 \leq x_j \leq 1$ per ogni $j \in \{1, \dots k\}$ e

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1,$$

e se u_j (definita sull'insieme degli stati finali raggiungibili da s_j) è l'utilità per P_i subordinata allo stato s_j, allora P_i fa la sua scelta in modo da massimizzare l'utilità mista

$$u = \sum_{j=1}^{k} x_j u_j.$$

Esempio 6.2.9. Consideriamo un gioco con due giocatori P, Q e la seguente struttura. P gioca per primo scegliendo tra due mosse $\{a, b\}$:

- se sceglie a raggiunge uno stato finale con utilità $(1, 3)$;
- se sceglie b, P deve fare un'altra mossa da scegliere in $\{c, d\}$, ma all'oscuro di Q.

[14] Nella realtà la faccenda è diversa, come provano i piloti *kamikaze* giapponesi e i più recenti terroristi suicidi.

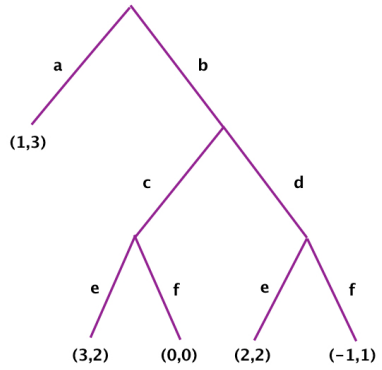

FIGURA 13. Le mosse e, f di Q sono ripetute in quanto conducono ad esiti diversi che Q non può prevedere con certezza.

Quindi gioca Q, che può scegliere in $\{e, f\}$ con la seguente tabella dei pay-off:

$P\backslash Q$	e	f
c	$(3,2)$	$(0,0)$
d	$(2,2)$	$(-1,1)$

Il gioco è rappresentato dalla fig. 13. Sia $0 \leq x \leq 1$ la probabilità, secondo Q, che P abbia scelto c al secondo stadio (dunque $1-x$ è la probabilità che abbia scelto d). Allora Q deve massimizzare l'utilità v data da

$$v(e) = 2x + 2(1-x) = 2,$$

$$v(f) = 0x + 1(1-x) = 1-x.$$

Qualunque sia x, Q sceglie e. Dunque P, alla sua seconda mossa, può attribuire le utilità $u(c) = 3$, $u(d) = 2$ e sceglie c. Risalendo allo stato iniziale del gioco, P sceglie b e i pay-off finali sono $(3, 2)$.

Osservazione 6.2.10. Quando si introducono le probabilità, però, bisogna tenere conto delle valutazioni di *tutti* i giocatori: infatti, in base alla propria intelligenza e alla razionalità degli altri, ogni giocatore modifica le sue valutazioni in base alle mosse che ha osservato. Per studiare questo tipo di giochi si adopera l'*approccio bayesiano*, che è basato sulle *probabilità condizionate* e sul metodo di induzione a ritroso. Tale approccio non sarà qui trattato, ma il seguente Esempio 6.3.7 ne fornisce un assaggio.

Esercizio 6.2.11. Rappresentare il gioco dell'Esempio 6.2.4 mediante un grafo. Determinarne gli equilibri, nel caso in cui il prezzo unitario ribassato sia 3/4 (tutti gli altri dati invariati).

Esercizio 6.2.12. Applicando il metodo dell'induzione a ritroso, determinare gli equilibri dei giochi degli Esempi 6.2.2, 6.2.4.

Esercizio 6.2.13. Determinare gli equilibri del gioco dell'Esempio 6.2.7, supponendo che la prima mossa sia di Q e la seconda di P.

Esercizio 6.2.14. Verificare i risultati dell'Esempio 6.2.8, quindi studiare il caso in cui la prima mossa sia di Q e la seconda di P.

6.3. **Esempi.** Presentiamo infine alcuni esempi di giochi dinamici, sia in regime di informazione completa che di informazione incompleta.

Esempio 6.3.1. Nel *gioco dell'ultimatum*, su un tavolo ci sono 100 monete. Il giocatore P fa una proposta di spartizione al giocatore Q (in cui ognuno riceva almeno una moneta, cioè da 1 a 99):

- se questi accetta (a), si procede secondo la proposta;
- se rifiuta (r), nessuno prende monete.

Si ha $\mathrm{spe}(\Gamma) = \{(99, 1)\}$, il che dimostra come il concetto di equilibrio sia spesso in contrasto con l'esperienza.

Esempio 6.3.2. Nel *gioco dei pirati* (un'estensione più violenta dell'Esempio 6.3.1), 5 pirati $P_1, \dots P_5$ devono dividere un bottino di 1000 dobloni secondo il seguente procedimento: il pirata P_1 fa la sua proposta e la mette ai voti, se ottiene la maggioranza (stretta) il bottino viene diviso secondo la sua proposta, altrimenti P_1 viene ucciso; P_2 fa la sua proposta... Questo enigma si risolve per induzione a ritroso, partendo dall'unico stato finale di altezza 5:

- P_5, rimasto solo, prende i 1000 dobloni per sé;
- P_4 non può garantirsi il voto di P_5 e muore;
- P_3 offre 1 doblone a P_4 e ne conserva 999;
- P_2 offre 2 dobloni a P_4 e 1 a P_5 e ne conserva 997;
- P_1 offre 2 dobloni a P_5 e 1 a P_3 e ne conserva 997.

Inaspettatamente, P_1 può risolvere il problema in modo molto vantaggioso.

Esempio 6.3.3. Il *duopolio di Stackelberg* è un modello economico quasi identico a quello di Cournot (Esempio 3.2.8), la sola differenza essendo che P ha una posizione dominante, cioè 'gioca per primo'. Dunque P sceglie la sua strategia x sapendo che Q risponderà con la strategia condizionata

$$\bar{y}(x) = \frac{a - c - x}{2}.$$

Così P opera in modo tale da massimizzare il proprio pay-off $\bar{f} : [0, a] \to \mathbb{R}$, definito da

$$\bar{f}(x) = f(x, \bar{y}(x)) = \frac{(a - c)x - x^2}{2}.$$

L'equilibrio raggiunto è

$$x = \frac{a - c}{2}, \ y = \frac{a - c}{4}.$$

Osserviamo che la posizione dominante di P distorce il mercato, consentendogli un maggior profitto a danno di Q, ma a vantaggio dei consumatori (il prezzo è più basso).

Esempio 6.3.4. La *corsa agli sportelli* è un modello usato per interpretare le crisi di fiducia che talvolta colpiscono il mercato finanziario. Siano $0 < s < d < r$ numeri reali. Due investitori P, Q hanno depositato in banca ciascuno una somma d, che la banca ha investito in parte:

- al tempo I, la banca dispone di una somma $2s$;
- al tempo II, giunto a maturazione l'investimento, essa dispone di una somma $2r$ (i depositi sono garantiti, quindi il primo che preleva ha accesso all'intera somma depositata d).

Gli investitori possono scegliere se prelevare (p) o lasciare (l) al tempo I, con i seguenti pay-off:

$P \backslash Q$	p	l
p	(s, s)	$(d, 2s - d)$
l	$(2s - d, d)$	(rinvio)

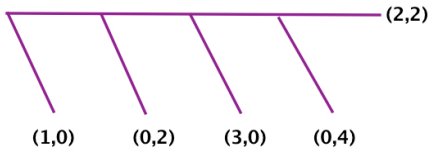

FIGURA 14. Il millepiedi.

oppure al tempo II, con i seguenti pay-off:

$P\backslash Q$	p	l
p	(r,r)	$(2r-d,d)$
l	$(d,2r-d)$	(r,r)

Il gioco al tempo II ha un solo equilibrio di Nash (p,p), quindi al tempo I attribuiamo (r,r) come pay-off della coppia di strategie (l,l) che pertanto diventa anch'essa equilibrio di Nash. Procedendo per induzione a ritroso, si ha lo stesso risultato: l'unico equilibrio perfetto nei sotto-giochi è la storia in cui P e Q lasciano al tempo I e prelevano al tempo II.

Esempio 6.3.5. Nel *gioco del 'prendere o lasciare'* (detto anche *gioco del millepiedi* per la caratteristica forma del grafo associato, fig. 14), due giocatori P, Q scelgono a turno se prendere (p) o lasciare (l) un premio che inizialmente vale 1 e poi cresce di 1 a ogni turno fino a un valore k ($k \in \mathbb{N}$ pari). Se dopo k turni il premio è ancora intatto, viene diviso in parti eguali. Comincia P. L'induzione a ritroso fornisce un unico equilibrio perfetto nei sotto-giochi, corrispondente alla scelta da parte di P di prendere al primo turno. Tuttavia questo equilibrio è lungi dall'essere ottimale. Questo esempio mostra come il metodo dell'induzione a ritroso possa anche condurre a dei paradossi[15].

Esempio 6.3.6. Riprendiamo in esame, ancora una volta, il gioco dell'Esempio 1.2.3, supponendo che P giochi per primo e Q giochi per secondo, ignaro della scelta di P. Sia $0 \leq x \leq 1$ la probabilità che P abbia taciuto secondo Q, allora Q confronta le utilità

$$v(t) = -1x - 10(1-x) = 9x - 10,$$

$$v(c) = 0x - 5(1-x) = 5x - 5$$

e sceglie sempre c in quanto $v(c) > v(t)$ per ogni $x \in [0,1]$. P, al momento di scegliere, lo sa: quindi deduce le proprie utilità che sono $u(t) = -10$, $u(c) = -5$ e sceglie c. Si noti che la soluzione è identica a quella dell'Esempio 1.2.3: infatti, l'incertezza rende irrilevante l'ordine delle mosse.

Esempio 6.3.7. Esaminiamo un semplice gioco di carte con due giocatori P, Q. All'inizio entrambi puntano 1; poi P pesca una carta da un mazzo ordinario e la guarda; P sceglie tra due opzioni, f (fold) e r (raise):

- se sceglie f, mostra la carta e prende il banco se la carta è rossa, mentre se è nera lo prende Q;
- se sceglie r, aggiunge 1 al banco e lascia la carta coperta.

Ora gioca Q, che ha pure due scelte, m (meet) e p (pass):

- se sceglie p rinuncia e P prende il banco;
- se sceglie m punta 1 e scopre la carta, e anche in questo caso il banco va a P se la carta è rossa e a Q se è nera.

[15]Il paradosso è di natura simile a quello dell'Esempio 1.2.3, in cui la soluzione di equilibrio non coincide quella ottimale.

Gli stati che seguono alla scelta r da parte di P formano un insieme informativo per Q, che deve scegliere in condizioni di incertezza.

Secondo Q, la probabilità che la carta coperta sia rossa è $x \in [0,1]$ (quindi la probabilità che sia nera è $1-x$). Allora le utilità ponderate di Q sono date dalla funzione $v : \{m,p\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$v(m) = -2x + 2(1-x) = 2 - 4x,$$

$$v(p) = -x - (1-x) = -1.$$

A questo punto è chiaro che Q sceglie m se $0 \leq x < 3/4$, è indifferente se $x = 3/4$ e sceglie p se $3/4 < x \leq 1$. In particolare, se $x = 1/2$, la scelta di Q è sempre m. In questo caso si può procedere per induzione a ritroso: le utilità di P al momento della sua mossa sono

$$u(r) = 2,\ u(f) = 1 \text{ se la carta è rossa,}$$

$$u(r) = -2,\ u(f) = 1 \text{ se la carta è nera.}$$

Dunque, P sceglie r se la carta è rossa e f se è nera. Si potrebbe osservare che, a questo punto, Q, che gioca dopo P, può dedurre il colore della carta dalla mossa di P: se P sceglie r la carta è rossa e a Q conviene scegliere p; se P sceglie f la carta è nera e a Q conviene scegliere m.

But the game never ends
When your whole world depends
On the turn of a friendly card.

A. Parsons & E. Woolfson

Riferimenti bibliografici

[1] J.P. Aubin, Mathematical methods of game and economic theory, North-Holland (1979).
[2] J.P. Aubin, H. Frankowska, Set-valued analysis, Birkhäuser (2008).
[3] É. Borel, La théorie du jeu et le équations intégrales à noyau symétrique, *C.R. Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences* **173** (1921) 1304-1308.
[4] R. Brânzei, J. Morgan, V. Scalzo, S. Tijs, Approximate fixed point theorems in Banach spaces with applications in game theory, *J. Math. Anal. Appl.* **285** (2003) 619-628.
[5] F. Browder, On a new generalization of the Schauder fixed point theorem, *Math. Ann.* **174** (1967) 285-290.
[6] E. Burger, Introduzione alla teoria dei giochi, Franco Angeli (1967).
[7] L. Caffarelli, Non-local diffusions, drifts and games, in H. Holden, K.H. Karlsen (eds.), Nonlinear partial differential equations, Springer, New York (2012).
[8] A. Cellina, Approximation of set valued functions and fixed point theorems, *Ann. Mat. Pura Appl.* **82** (1969) 17–24.
[9] K.C. Chang, Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **80** (1981) 102-129.
[10] V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, Lezioni di topologia generale, Feltrinelli (1982).
[11] F.H. Clarke, Optimization and nonsmooth analysis, Wiley (1983).
[12] F. Colombo, Introduzione alla teoria dei giochi, Carocci (2008).
[13] M. Fabian, P. Hamala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, Banach space theory, Springer (2011).
[14] K. Fan, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, *Math. Ann.* **163** (1966) 189-203.
[15] A.F. Filippov, A differential equation with discontinuous right hand side, *Math. Sbornik* **54** (1960) 99–128.
[16] R. Gibbons, Teoria dei giochi, Il Mulino (1992).
[17] I.L. Glicksberg, A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with applications to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952) 170-174.
[18] G. Israel, A. Millán Gasca, Il mondo come gioco matematico, Bollati Boringhieri (2008).
[19] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory, Springer (2003).
[20] S. Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.* **8** (1941) 457-459.
[21] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.* **14** (1926).
[22] H. König, A general minimax theorem based on connectedness, *Arch. Math. (Basel)* **59** (1992) 55-64.
[23] E. Krein, A.C. Thompson, Theory of correspondences, Wiley (1984).
[24] D.M. Kreps, Notes on the theory of choice, Westview Press (1988).
[25] H.W. Kuhn, A.W. Tucker (Eds.), Contributions to the theory of games, Princeton University Press (1953).
[26] J.C.C. McKinsey, Introduction to the theory of games, Rand (1952).
[27] E. Michael, Continuous selections I, *Ann. of Math.* **63** (1956) 361–382.
[28] E. Michael, Continuous selections II, *Ann. of Math.* **64** (1956) 562–580.
[29] E. Michael, Continuous selections III, *Ann. of Math.* **65** (1956) 375–390.
[30] O. Morgenstern, Teoria dei giochi, Bollati Boringhieri (1969).
[31] O. Morgenstern, J. von Neumann, Theory of games and economic behavior, Princeton (1953).
[32] G. Moţ, A. Petruşel, G. Petruşel, Topics in nonlinear analysis and applications to mathematical economics, Casa Cărţii de Ştiinţă (2007).
[33] S.B. Nadler, Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.* **30** (1969) 475–488.
[34] J. Nash, Non-cooperative games, *Ann. Math.* **54** (1951) 286–295.
[35] B. Ricceri, Some topological mini-max theorems via an alternative principle for multifunctions, *Arch. Math. (Basel)* **60** (1993) 367–377.
[36] B. Ricceri, On a minimax theorem: an improvement, a new proof and an overview of its applications, *Minimax Theory Appl.* **2** (2017) 99–152.
[37] B. Ricceri, S. Simons (eds.), Minimax theory and applications, Kluwer (1998).
[38] J.B. Rosen, Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N-person games, *Econometrica* **33** (1965) 520–534.
[39] J.D. Rossi, Tug-of-war games and PDEs, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **141** (2011) 319–369.
[40] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill (1991).
[41] R. Scozzafava, Incertezza e probabilità, Zanichelli (2001).
[42] R. Selten, Game theory and economic behaviour, Edward Elgar (1999).
[43] L.S. Shapley, A value for n-person games, in [25].
[44] J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* **100** (1928) 295-320.

[45] R.J. Wilson, Introduzione alla teoria dei grafi, Cremonese (1978).
[46] E. Zermelo, Uber die Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (1913) 501-504.