# Teoria Matematica dei Giochi

Antonio Iannizzotto

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Cagliari

Reading Course 2026/27



# Sommario

*Chi in cento battaglie riporta cento vittorie, non è il più abile in assoluto.*
*Al contrario, chi non dà nemmeno battaglia, e sottomette le truppe dell'avversario,*
*è il più abile in assoluto.*

**Sun Tzu**

- Introduzione: giochi, soluzioni ed equilibri
- Multifunzioni
- Teorema di Nash e applicazioni
- Giochi a somma nulla e Teoria del mimimax

# Introduzione: giochi, soluzioni ed equilibri

Un po' di storia:

- Le origini **[Zermelo 1913] [Borel 1921] [von Neumann 1928]**
- Il boom: **[Nash 1951] [Morgenstern, von Neumann 1953] [Kuhn, Tucker 1953]** (Shapley)
- Analisi multivoca **[Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz 1926] [Kakutani 1941] [Michael 1956] [Browder 1967] [Cellina 1969] [Aubin, Frankowska 2008]**
- Teoria del minimax **[von Neumann 1928] [Fan 1966] [König 1992] [Ricceri 1993]**
- Teoria dei giochi e PDE **[Rossi 2011] [Caffarelli 2012]**

## Definizione

Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto

- razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti
- intelligente se persegue senza commettere errori la massima soddisfazione

Classificazione dei giochi:

- statico/dinamico
- non cooperativo/cooperativo
- deterministico/stocastico

Rappresentazione: $P_1, \dots P_n$ giocatori, $X_1, \dots X_n$ insiemi delle strategie, $E$ insieme degli esiti, $h : \prod_{i=1}^{n} X_i \to E$ funzione del gioco

$$\Gamma = (X_1, \dots X_n, E, h)$$

## Definizione

Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto

- razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti
- intelligente se persegue senza commettere errori la massima soddisfazione

Classificazione dei giochi:

- statico/dinamico
- non cooperativo/cooperativo
- deterministico/stocastico

Rappresentazione: $P_1, \dots P_n$ giocatori, $X_1, \dots X_n$ insiemi delle strategie, $E$ insieme degli esiti, $h : \prod_{i=1}^{n} X_i \to E$ funzione del gioco

$$\Gamma = (X_1, \dots X_n, E, h)$$

## Definizione

Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto

- razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti
- intelligente se persegue senza commettere errori la massima soddisfazione

Classificazione dei giochi:

- statico/dinamico
- non cooperativo/cooperativo
- deterministico/stocastico

Rappresentazione: $P_1, \dots P_n$ giocatori, $X_1, \dots X_n$ insiemi delle strategie, $E$ insieme degli esiti, $h : \prod_{i=1}^{n} X_i \to E$ funzione del gioco

$$\Gamma = (X_1, \dots X_n, E, h)$$

## Definizione

Una preferenza $\preceq$ è una relazione binaria su un insieme $E$ con le seguenti proprietà:

- $e \preceq e$ per ogni $e \in E$
- se $e_1 \preceq e_2$ e $e_2 \preceq e_3$ allora $e_1 \preceq e_3$ per ogni $e_1, e_2, e_3 \in E$
- $e_1 \preceq e_2$ o $e_2 \preceq e_1$ per ogni $e_1, e_2 \in E$
- se $E$ è uno spazio topologico, allora l'insieme $\{e \in E : e \preceq \overline{e}\}$ è chiuso per ogni $\overline{e} \in E$

## Definizione

Un'utilità è una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- per ogni $e_1, e_2 \in E$, se $e_1 \preceq e_2$, allora $u(e_1) \leq u(e_2)$
- per ogni $e_1, e_2 \in E$, se $e_1 \prec e_2$, allora $u(e_1) < u(e_2)$

Se $|E| \leq \aleph_0$ (o $|E| \leq 2^{\aleph_0}$ spazio topologico) esiste un'utilità (continua). Allora si riformula

$$\Gamma = (X_1, \ldots X_n, f_1, \ldots f_n) \quad (f_i = u_i \circ h)$$

## Definizione

Una preferenza $\preceq$ è una relazione binaria su un insieme $E$ con le seguenti proprietà:

- $e \preceq e$ per ogni $e \in E$
- se $e_1 \preceq e_2$ e $e_2 \preceq e_3$ allora $e_1 \preceq e_3$ per ogni $e_1, e_2, e_3 \in E$
- $e_1 \preceq e_2$ o $e_2 \preceq e_1$ per ogni $e_1, e_2 \in E$
- se $E$ è uno spazio topologico, allora l'insieme $\{e \in E : e \preceq \overline{e}\}$ è chiuso per ogni $\overline{e} \in E$

## Definizione

Un'utilità è una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- per ogni $e_1, e_2 \in E$, se $e_1 \preceq e_2$, allora $u(e_1) \leq u(e_2)$
- per ogni $e_1, e_2 \in E$, se $e_1 \prec e_2$, allora $u(e_1) < u(e_2)$

Se $|E| \leq \aleph_0$ (o $|E| \leq 2^{\aleph_0}$ spazio topologico) esiste un'utilità (continua). Allora si riformula

$$\Gamma = (X_1, \ldots X_n, f_1, \ldots f_n) \quad (f_i = u_i \circ h)$$

Giochi in forma strategica $\Gamma = (X, Y, f, g)$:

## Pari o dispari

Si ha $X = Y = \{p, d\}$ e due esiti (vince $P$, vince $Q$):

| $P \backslash Q$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|
| $p$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ |
| $d$ | $(-1, 1)$ | $(1, -1)$ |

## Carta, pietra, forbice

Si ha $X = Y = \{c, p, f\}$ e tre esiti (vince $P$, vince $Q$, pareggio):

| $P \backslash Q$ | $c$ | $p$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | $(0, 0)$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ |
| $p$ | $(-1, 1)$ | $(0, 0)$ | $(1, -1)$ |
| $f$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(0, 0)$ |

Giochi in forma strategica $\Gamma = (X, Y, f, g)$:

## Pari o dispari

Si ha $X = Y = \{p, d\}$ e due esiti (vince $P$, vince $Q$):

| $P \backslash Q$ | $p$ | $d$ |
|---|---|---|
| $p$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ |
| $d$ | $(-1, 1)$ | $(1, -1)$ |

## Carta, pietra, forbice

Si ha $X = Y = \{c, p, f\}$ e tre esiti (vince $P$, vince $Q$, pareggio):

| $P \backslash Q$ | $c$ | $p$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | $(0, 0)$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ |
| $p$ | $(-1, 1)$ | $(0, 0)$ | $(1, -1)$ |
| $f$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(0, 0)$ |

Dominazioni e soluzione di un gioco per eliminazioni iterate:

## Definizione

Nel gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$ siano $x_1, x_2 \in X$:

- $x_1$ domina fortemente $x_2$ se $f(x_1, y) > f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$
- $x_1$ domina strettamente $x_2$ se $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$, ed esiste $\bar{y} \in Y$ t.c. $f(x_1, \bar{y}) > f(x_2, \bar{y})$
- $x_1$ domina debolmente $x_2$ se $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$

## Esempio 1

Consideriamo il gioco

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $(1, 2)$ | $(0, 1)$ |
| $x_2$ | $(0, 2)$ | $(2, 1)$ |

$y_1$ domina fortemente $y_2$, la soluzione del gioco è $(x_1, y_1)$

Dominazioni e soluzione di un gioco per eliminazioni iterate:

## Definizione

Nel gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$ siano $x_1, x_2 \in X$:

- $x_1$ domina fortemente $x_2$ se $f(x_1, y) > f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$
- $x_1$ domina strettamente $x_2$ se $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$, ed esiste $\bar{y} \in Y$ t.c. $f(x_1, \bar{y}) > f(x_2, \bar{y})$
- $x_1$ domina debolmente $x_2$ se $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$

## Esempio 1

Consideriamo il gioco

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $(1, 2)$ | $(0, 1)$ |
| $x_2$ | $(0, 2)$ | $(2, 1)$ |

$y_1$ domina fortemente $y_2$, la soluzione del gioco è $(x_1, y_1)$

## Esempio 2

Consideriamo il gioco

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $(3,3)$ | $(2,2)$ |
| $x_2$ | $(0,2)$ | $(1,1)$ |
| $x_3$ | $(1,2)$ | $(0,1)$ |

$y_1$ domina fortemente $y_2$, la soluzione del gioco è $(x_1, y_1)$

## Esempio 3

Consideriamo il gioco

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $(3,5)$ | $(2,5)$ |
| $x_2$ | $(3,0)$ | $(0,2)$ |
| $x_3$ | $(0,2)$ | $(2,0)$ |

$x_1$ domina strettamente $x_2$ e $x_3$, le possibili soluzioni del gioco sono $(x_1, y_1)$ e $(x_1, y_2)$.

## Esempio 2

Consideriamo il gioco

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $(3,3)$ | $(2,2)$ |
| $x_2$ | $(0,2)$ | $(1,1)$ |
| $x_3$ | $(1,2)$ | $(0,1)$ |

$y_1$ domina fortemente $y_2$, la soluzione del gioco è $(x_1, y_1)$

## Esempio 3

Consideriamo il gioco

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $(3,5)$ | $(2,5)$ |
| $x_2$ | $(3,0)$ | $(0,2)$ |
| $x_3$ | $(0,2)$ | $(2,0)$ |

$x_1$ domina strettamente $x_2$ e $x_3$, le possibili soluzioni del gioco sono $(x_1, y_1)$ e $(x_1, y_2)$.

Quando le dominazioni non bastano...

## Definizione

La coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio di Nash di $\Gamma$ se

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ per ogni $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ per ogni $y \in Y$

L'insieme degli equilibri di $\Gamma$ è $Ne(\Gamma)$

Nei casi precedenti

- Pari o dispari, $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Carta, pietra, forbice, $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Esempio 1, $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 2, $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 3, $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2)\}$

Quando le dominazioni non bastano...

## Definizione

La coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio di Nash di $\Gamma$ se

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ per ogni $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ per ogni $y \in Y$

L'insieme degli equilibri di $\Gamma$ è $Ne(\Gamma)$

Nei casi precedenti

- Pari o dispari, $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Carta, pietra, forbice, $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Esempio 1, $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 2, $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 3, $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2)\}$

## Dilemma del prigioniero

Due uomini vengono arrestati e devono scegliere se confessare $(c)$ o tacere $(t)$:

| $P \backslash Q$ | $c$ | $t$ |
|---|---|---|
| $c$ | $(-5,-5)$ | $(0,-10)$ |
| $t$ | $(-10,0)$ | $(-1,-1)$ |

Si ha $Ne(\Gamma) = \{(c,c)\}$ (ma sarebbe meglio $(t,t)$!)

## Guerra dei sessi

Una coppia decide se andare allo stadio $(s)$ o a teatro $(t)$:

| $P \backslash Q$ | $s$ | $t$ |
|---|---|---|
| $s$ | $(10,5)$ | $(0,0)$ |
| $t$ | $(0,0)$ | $(5,10)$ |

Non vi sono strategie dominanti, ma $Ne(\Gamma) = \{(s,s),(t,t)\}$

## Dilemma del prigioniero

Due uomini vengono arrestati e devono scegliere se confessare $(c)$ o tacere $(t)$:

| $P \backslash Q$ | $c$ | $t$ |
|---|---|---|
| $c$ | $(-5,-5)$ | $(0,-10)$ |
| $t$ | $(-10,0)$ | $(-1,-1)$ |

Si ha $Ne(\Gamma) = \{(c,c)\}$ (ma sarebbe meglio $(t,t)$!)

## Guerra dei sessi

Una coppia decide se andare allo stadio $(s)$ o a teatro $(t)$:

| $P \backslash Q$ | $s$ | $t$ |
|---|---|---|
| $s$ | $(10,5)$ | $(0,0)$ |
| $t$ | $(0,0)$ | $(5,10)$ |

Non vi sono strategie dominanti, ma $Ne(\Gamma) = \{(s,s),(t,t)\}$

## Definizione

Nel gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$, la coppia $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia $(x, y) \in X \times Y$ verificante una delle seguenti condizioni:

- $f(x, y) > f(\overline{x}, \overline{y})$, $g(x, y) \geq g(\overline{x}, \overline{y})$
- $f(x, y) \geq f(\overline{x}, \overline{y})$, $g(x, y) > g(\overline{x}, \overline{y})$

L'insieme degli ottimi per $\Gamma$ si denota $Po(\Gamma)$

Nel Dilemma del prigioniero $Po(\Gamma) = \{(t, t)\}$, ma questa soluzione *non viene raggiunta* per

- mancanza di informazione
- mancanza di fiducia

Per questo, nello studio dei giochi non cooperativi ci concentriamo sugli equilibri di Nash...

**Problema:** Sotto quali ipotesi $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$?

## Definizione

Nel gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$, la coppia $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia $(x, y) \in X \times Y$ verificante una delle seguenti condizioni:

- $f(x, y) > f(\overline{x}, \overline{y})$, $g(x, y) \geq g(\overline{x}, \overline{y})$
- $f(x, y) \geq f(\overline{x}, \overline{y})$, $g(x, y) > g(\overline{x}, \overline{y})$

L'insieme degli ottimi per $\Gamma$ si denota $Po(\Gamma)$

Nel Dilemma del prigioniero $Po(\Gamma) = \{(t, t)\}$, ma questa soluzione *non viene raggiunta* per

- mancanza di informazione
- mancanza di fiducia

Per questo, nello studio dei giochi non cooperativi ci concentriamo sugli equilibri di Nash...

**Problema:** Sotto quali ipotesi $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$?

## Definizione

Nel gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$, la coppia $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia $(x, y) \in X \times Y$ verificante una delle seguenti condizioni:

- $f(x, y) > f(\overline{x}, \overline{y})$, $g(x, y) \geq g(\overline{x}, \overline{y})$
- $f(x, y) \geq f(\overline{x}, \overline{y})$, $g(x, y) > g(\overline{x}, \overline{y})$

L'insieme degli ottimi per $\Gamma$ si denota $Po(\Gamma)$

Nel Dilemma del prigioniero $Po(\Gamma) = \{(t, t)\}$, ma questa soluzione *non viene raggiunta* per

- mancanza di informazione
- mancanza di fiducia

Per questo, nello studio dei giochi non cooperativi ci concentriamo sugli equilibri di Nash...

**Problema:** Sotto quali ipotesi $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$?

# Multifunzioni

## Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Una multifunzione $F : X \to 2^Y$ è una funzione da $X$ nell'insieme delle parti $2^Y$

Formule insiemistiche:

$$dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) \ (A \subseteq X)$$

$$gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

$$F^{-}(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\} \ (B \subseteq Y)$$

$$F^{+}(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\} \ (B \subseteq Y)$$

**Nota:** $X \setminus F^{\pm}(B) = F^{\mp}(Y \setminus B)$, da ora assumeremo $dom(F) = X$

# Multifunzioni

## Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Una multifunzione $F : X \to 2^Y$ è una funzione da $X$ nell'insieme delle parti $2^Y$

Formule insiemistiche:

$$dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) \ (A \subseteq X)$$

$$gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

$$F^{-}(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\} \ (B \subseteq Y)$$

$$F^{+}(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\} \ (B \subseteq Y)$$

**Nota:** $X \setminus F^{\pm}(B) = F^{\mp}(Y \setminus B)$, da ora assumeremo $dom(F) = X$

Definizioni topologiche:

## Definizione

La multifunzione $F : X \to 2^Y$ è

- semicontinua inferiormente (s.c.i.) in $x$ se per ogni $B \subset Y$ aperto t.c. $F(x) \cap B \neq \emptyset$ esiste $U \subset X$ intorno di $x$ t.c. $F(x') \cap B \neq \emptyset$ per ogni $x' \in U$
- semicontinua superiormente (s.c.s.) in $x$ se per ogni $B \subset Y$ aperto t.c. $F(x) \subseteq B$ esiste $U \subset X$ intorno di $x$ t.c. $F(x') \subseteq B$ per ogni $x' \in U$
- continua in $x$ se è s.c.i. e s.c.s.
- aperta se $F(A)$ è aperto per ogni $A \subset X$ aperto
- chiusa se $F(C)$ è chiuso per ogni $C \subset X$ chiuso

**Caratterizzazione:**

- $F$ s.c.i. $\Leftrightarrow F^-(B)$ aperto per ogni $B \subset Y$ aperto
- $F$ s.c.s. $\Leftrightarrow F^+(B)$ aperto per ogni $B \subset Y$ aperto

Sia $F(x) = [a(x), b(x)]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $(a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \leq b)$, allora

- $F$ è s.c.i. $\Leftrightarrow$ $a$ è s.c.s. e $b$ è s.c.i.
- $F$ è s.c.s. $\Leftrightarrow$ $a$ è s.c.i. e $b$ è s.c.s.

## Esempio

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 0 \\ [0,1] & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x < 0 \\ \{1/2\} & \text{se } x = 0 \\ [0,1] & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora $F$ è s.c.s. ma non s.c.i. mentre $G$ è s.c.i. ma non s.c.s. Inoltre, $gr(F)$ è chiuso, $gr(G)$ no

**Nota:** Multifunzioni come $F$ si usano per 'riempire' i salti delle funzioni univoche discontinue (gradino di Heaviside)

Sia $F(x) = [a(x), b(x)]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $(a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \leq b)$, allora

- $F$ è s.c.i. $\Leftrightarrow$ $a$ è s.c.s. e $b$ è s.c.i.
- $F$ è s.c.s. $\Leftrightarrow$ $a$ è s.c.i. e $b$ è s.c.s.

## Esempio

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 0 \\ [0,1] & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x < 0 \\ \{1/2\} & \text{se } x = 0 \\ [0,1] & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora $F$ è s.c.s. ma non s.c.i. mentre $G$ è s.c.i. ma non s.c.s. Inoltre, $gr(F)$ è chiuso, $gr(G)$ no

**Nota:** Multifunzioni come $F$ si usano per 'riempire' i salti delle funzioni univoche discontinue (gradino di Heaviside)

Alcune proprietà topologiche:

## Lemma

Sia $F : X \to 2^Y$:

- $F$ s.c.s. a valori chiusi $\Rightarrow$ $gr(F) \subset X \times Y$ chiuso
- $Y$ compatto, $gr(F)$ chiuso $\Rightarrow$ $F$ s.c.s.
- $X$ compatto, $F$ s.c.s. a valori compatti $\Rightarrow$ $F(X)$ compatto

## Lemma

Siano $F : X \to 2^Y$, $G : X \to 2^Z$:

- $F$, $G$ s.c.i. $\Rightarrow$ $F \times G$ s.c.i.
- $F$, $G$ s.c.s. a valori compatti $\Rightarrow$ $F \times G$ s.c.s.

## Lemma

Siano $F, G : X \to 2^Y$ s.c.i., $r > 0$ e $B_r(G(x)) = \{y \in Y : d(y, G(x)) < r\}$. Allora $x \mapsto F(x) \cap B_r(G(x))$ è s.c.i.

Alcune proprietà topologiche:

## Lemma

Sia $F : X \to 2^Y$:

- $F$ s.c.s. a valori chiusi $\Rightarrow$ $gr(F) \subset X \times Y$ chiuso
- $Y$ compatto, $gr(F)$ chiuso $\Rightarrow$ $F$ s.c.s.
- $X$ compatto, $F$ s.c.s. a valori compatti $\Rightarrow$ $F(X)$ compatto

## Lemma

Siano $F : X \to 2^Y$, $G : X \to 2^Z$:

- $F$, $G$ s.c.i. $\Rightarrow$ $F \times G$ s.c.i.
- $F$, $G$ s.c.s. a valori compatti $\Rightarrow$ $F \times G$ s.c.s.

## Lemma

Siano $F, G : X \to 2^Y$ s.c.i., $r > 0$ e $B_r(G(x)) = \{y \in Y : d(y, G(x)) < r\}$. Allora $x \mapsto F(x) \cap B_r(G(x))$ è s.c.i.

Alcune proprietà topologiche:

## Lemma

Sia $F : X \to 2^Y$:

- $F$ s.c.s. a valori chiusi $\Rightarrow gr(F) \subset X \times Y$ chiuso
- $Y$ compatto, $gr(F)$ chiuso $\Rightarrow F$ s.c.s.
- $X$ compatto, $F$ s.c.s. a valori compatti $\Rightarrow F(X)$ compatto

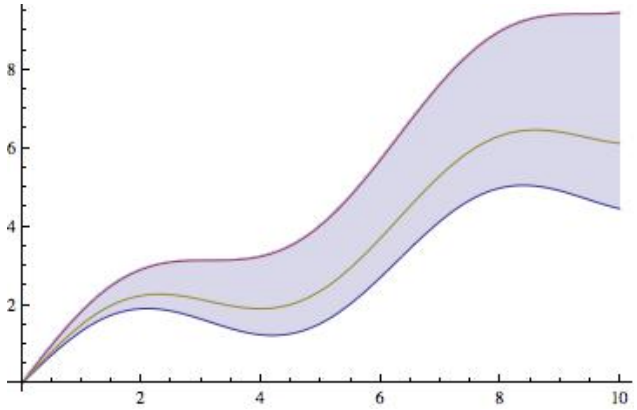
## Lemma

Siano $F : X \to 2^Y$, $G : X \to 2^Z$:

- $F$, $G$ s.c.i. $\Rightarrow F \times G$ s.c.i.
- $F$, $G$ s.c.s. a valori compatti $\Rightarrow F \times G$ s.c.s.

## Lemma

Siano $F, G : X \to 2^Y$ s.c.i., $r > 0$ e $B_r(G(x)) = \{y \in Y : d(y, G(x)) < r\}$. Allora $x \mapsto F(x) \cap B_r(G(x))$ è s.c.i.




Il problema delle selezioni continue:

## Definizione

Sia $F : X \to 2^Y$. Allora $f : X \to Y$ è una selezione di $F$ se per ogni $x \in X$ si ha

$$f(x) \in F(x)$$

Multifunzioni s.c.s. in genere non hanno selezioni continue, mentre quelle s.c.i. sì (ved. $F(x) = [a(x), b(x)]$)

## Teorema di Michael

Sia $F : X \to 2^Y$ s.c.i. a valori chiusi e convessi. Allora $F$ ha una selezione continua

**Dimostrazione.** Si articola in 3 passi:

- Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f_\varepsilon : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$$

(qui non serve che $F(x)$ sia chiuso)

- Esiste una successione $(f_k)$ di funzioni continue da $X$ in $Y$ t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$

$$d(f_k(x), F(x)) < \frac{1}{2^k}, \ |f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

(per induzione)

- $(f_k)$ converge uniformemente a $f : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$f(x) \in F(x) \quad \square$$

## Teorema di Michael

Sia $F : X \to 2^Y$ s.c.i. a valori chiusi e convessi. Allora $F$ ha una selezione continua

**Dimostrazione.** Si articola in 3 passi:

- Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f_\varepsilon : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$$

(qui non serve che $F(x)$ sia chiuso)

- Esiste una successione $(f_k)$ di funzioni continue da $X$ in $Y$ t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$

$$d(f_k(x), F(x)) < \frac{1}{2^k}, \ |f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

(per induzione)

- $(f_k)$ converge uniformemente a $f : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$f(x) \in F(x) \quad \square$$

Punti fissi di multifunzioni:

## Definizione

Sia $F : X \to 2^X$. L'insieme dei suoi punti fissi è

$$fix(F) = \{x \in X : x \in F(x)\}$$

## Teorema di Schauder (multivoco)

Siano $X$ compatto, convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.i. a valori chiusi, convessi. Allora $fix(F) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Per il Teorema di Michael esiste una selezione continua $f : X \to X$ di $F$, da cui per il Teorema di Schauder (univoco) esiste $\bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Dunque $\bar{x} \in fix(F)$ □

**Problema:** E se $F$ è s.c.s.?

Punti fissi di multifunzioni:

## Definizione

Sia $F : X \to 2^X$. L'insieme dei suoi punti fissi è

$$fix(F) = \{x \in X : x \in F(x)\}$$

## Teorema di Schauder (multivoco)

Siano $X$ compatto, convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.i. a valori chiusi, convessi. Allora $fix(F) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Per il Teorema di Michael esiste una selezione continua $f : X \to X$ di $F$, da cui per il Teorema di Schauder (univoco) esiste $\bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Dunque $\bar{x} \in fix(F)$ □

**Problema:** E se $F$ è s.c.s.?

## Lemma (Cellina)

Siano $X$ compatto, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ s.c.s. a valori convessi, $r > 0$. Allora esiste $g_r : X \to \mathbb{R}^n$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_r(x)), gr(F)) \leq r$$

## Teorema di Kakutani

Siano $X$ compatto, convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.s. a valori chiusi, convessi. Allora $fix(F) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Applichiamo il Lemma:

- Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $g_k : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_k(x)), gr(F)) < \frac{1}{k}$$

- Per il Teorema di Schauder, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_k \in X$ t.c. $g_k(x_k) = x_k$
- Passando a una sottosuccessione $x_k \to \bar{x}$, da cui

$$d((\bar{x}, \bar{x}), gr(F)) = 0$$

ovvero $\bar{x} \in F(\bar{x})$ □

## Lemma (Cellina)

Siano $X$ compatto, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ s.c.s. a valori convessi, $r > 0$. Allora esiste $g_r : X \to \mathbb{R}^n$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_r(x)), gr(F)) \leq r$$

## Teorema di Kakutani

Siano $X$ compatto, convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.s. a valori chiusi, convessi. Allora $fix(F) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Applichiamo il Lemma:

- Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $g_k : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_k(x)), gr(F)) < \frac{1}{k}$$

- Per il Teorema di Schauder, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_k \in X$ t.c. $g_k(x_k) = x_k$
- Passando a una sottosuccessione $x_k \to \bar{x}$, da cui

$$d((\bar{x}, \bar{x}), gr(F)) = 0$$

ovvero $\bar{x} \in F(\bar{x})$ □

## Lemma (Cellina)

Siano $X$ compatto, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ s.c.s. a valori convessi, $r > 0$. Allora esiste $g_r : X \to \mathbb{R}^n$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_r(x)), gr(F)) \leq r$$

## Teorema di Kakutani

Siano $X$ compatto, convesso, $F : X \to 2^X$ s.c.s. a valori chiusi, convessi. Allora $fix(F) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Applichiamo il Lemma:

- Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $g_k : X \to Y$ continua t.c. per ogni $x \in X$

$$d((x, g_k(x)),\, gr(F)) < \frac{1}{k}$$

- Per il Teorema di Schauder, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_k \in X$ t.c. $g_k(x_k) = x_k$
- Passando a una sottosuccessione $x_k \to \bar{x}$, da cui

$$d((\bar{x}, \bar{x}),\, gr(F)) = 0$$

ovvero $\bar{x} \in F(\bar{x})$ □

# Teorema di Nash e applicazioni

## Teorema di Nash

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ convessi e compatti, $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ continue t.c.

- $f(\cdot, y)$ è quasi-concava per ogni $y \in Y$
- $g(x, \cdot)$ è quasi-concava per ogni $x \in X$

Allora $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$.

**Dimostrazione.** Definiamo le multifunzioni di risposta ottima:

$$R_Q(x) = \left\{ y \in Y : \; g(x, y) = \max_Y g(x, \cdot) \right\}$$

$$R_P(y) = \left\{ x \in X : \; f(x, y) = \max_X f(\cdot, y) \right\}$$

quindi poniamo per ogni $(x, y) \in X \times Y$

$$R(x, y) = R_P(y) \times R_Q(x)$$

## Teorema di Nash

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ convessi e compatti, $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ continue t.c.

- $f(\cdot, y)$ è quasi-concava per ogni $y \in Y$
- $g(x, \cdot)$ è quasi-concava per ogni $x \in X$

Allora $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$.

**Dimostrazione.** Definiamo le multifunzioni di risposta ottima:

$$R_Q(x) = \left\{ y \in Y : \; g(x, y) = \max_Y g(x, \cdot) \right\}$$

$$R_P(y) = \left\{ x \in X : \; f(x, y) = \max_X f(\cdot, y) \right\}$$

quindi poniamo per ogni $(x, y) \in X \times Y$

$$R(x, y) = R_P(y) \times R_Q(x)$$

- Dalla definizione di equilibrio

$$Ne(\Gamma) = fix(R)$$

- La multifunzione $R_Q : X \to 2^Y$ ha valori convessi compatti e $gr(R_Q)$ chiuso, quindi è s.c.s. (analogamente $R_P$)
- $R : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ è s.c.s. a valori compatti convessi, per il Teorema di Kakutani esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}) \quad \square$$

Vale in particolare

$$Ne(\Gamma) = gr(R_P)^T \cap gr(R_Q)$$

con cui si ricavano gli equilibri graficamente

- Dalla definizione di equilibrio

$$Ne(\Gamma) = fix(R)$$

- La multifunzione $R_Q : X \to 2^Y$ ha valori convessi compatti e $gr(R_Q)$ chiuso, quindi è s.c.s. (analogamente $R_P$)
- $R : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ è s.c.s. a valori compatti convessi, per il Teorema di Kakutani esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}) \quad \square$$

Vale in particolare

$$Ne(\Gamma) = gr(R_P)^T \cap gr(R_Q)$$

con cui si ricavano gli equilibri graficamente

## Definizione

Sia $X = \{x_1, \dots x_n\}$. Una strategia mista di $P$ è una funzione $p : X \to [0, 1]$ t.c.

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Ogni $x_i$ è una strategia pura $(p_i(x_j) = \delta_{ij})$

Rappresentiamo $p$ col punto $(p(x_1), \dots p(x_n))$, allora l'insieme delle strategie di $P$ miste è il simplesso $(n-1)$-dimensionale

$$\tilde{X} = \left\{ (\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = 1 \right\}$$

(compatto e convesso) e il pay-off

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_i \tilde{y}_j f(x_i, y_j),$$

(continua, bilineare). Similmente per $Q$, quindi $\tilde{\Gamma} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f}, \tilde{g})$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Nash

## Pari e dispari

Si pone $X = Y = [0, 1]$ e i pay-off sono

$$f(x, y) = 4xy - 2x - 2y + 1$$

$$g(x, y) = -4xy + 2x + 2y - 1$$

dunque $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$

## Carta, pietra, forbice

Si pone

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\right\}$$

$$Y = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_i \geq 0,\ y_1 + y_2 \leq 1\right\}$$

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - x_1 + x_2 + y_1 - y_2$$

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = -3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_1 - x_2 - y_1 + y_2$$

dunque $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$

## Pari e dispari

Si pone $X = Y = [0, 1]$ e i pay-off sono

$$f(x, y) = 4xy - 2x - 2y + 1$$

$$g(x, y) = -4xy + 2x + 2y - 1$$

dunque $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$

## Carta, pietra, forbice

Si pone

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\right\}$$

$$Y = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_i \geq 0,\ y_1 + y_2 \leq 1\right\}$$

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - x_1 + x_2 + y_1 - y_2$$

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = -3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_1 - x_2 - y_1 + y_2$$

dunque $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$

## Dilemma del prigioniero

Si ha $X = Y = [0,1]$ e

$$f(x,y) = 4xy + x - 9y - 1,\ g(x,y) = 4xy - 9x + y - 1$$

Le (multi) funzioni di risposta ottima sono $R_P(y) = \{1\}$, $R_Q(x) = \{1\}$. Dunque $Ne(\Gamma) = \{(1,1)\}$ (già determinato)

## Guerra dei sessi

Si ha $X = Y = [0,1]$ e

$$f(x,y) = 15xy - 5x - 5y + 5,\ g(x,y) = 15xy - 10x - 10y + 10$$

Multifunzioni di risposta ottima:

$$R_P(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y < 1/3 \\ [0,1] & \text{se } y = 1/3 \\ \{1\} & \text{se } y > 1/3 \end{cases}, \quad R_Q(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 2/3 \\ [0,1] & \text{se } x = 2/3 \\ \{1\} & \text{se } x > 2/3 \end{cases}$$

Dunque $Ne(\Gamma) = \{(0,0), (2/3, 1/3), (1,1)\}$

## Dilemma del prigioniero

Si ha $X = Y = [0,1]$ e

$$f(x,y) = 4xy + x - 9y - 1,\ g(x,y) = 4xy - 9x + y - 1$$

Le (multi) funzioni di risposta ottima sono $R_P(y) = \{1\}$, $R_Q(x) = \{1\}$. Dunque $Ne(\Gamma) = \{(1,1)\}$ (già determinato)

## Guerra dei sessi

Si ha $X = Y = [0,1]$ e

$$f(x,y) = 15xy - 5x - 5y + 5,\ g(x,y) = 15xy - 10x - 10y + 10$$

Multifunzioni di risposta ottima:

$$R_P(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y < 1/3 \\ [0,1] & \text{se } y = 1/3 \\ \{1\} & \text{se } y > 1/3 \end{cases}, \quad R_Q(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 2/3 \\ [0,1] & \text{se } x = 2/3 \\ \{1\} & \text{se } x > 2/3 \end{cases}$$

Dunque $Ne(\Gamma) = \{(0,0), (2/3, 1/3), (1,1)\}$

## Gioco del pollo

Due piloti corrono verso un burrone, possono sterzare ($s$) o tirare dritto ($d$). In strategie pure:

| $P \backslash Q$ | $s$ | $d$ |
|---|---|---|
| $s$ | $(5,5)$ | $(1,10)$ |
| $d$ | $(10,1)$ | $(0,0)$ |

da cui $Ne(\Gamma) = \{(s,d),(d,s)\}$. In strategie miste $X = Y = [0,1]$ e

$$f(x,y) = -6xy + x + 10y,\ \ g(x,y) = -6xy + 10x + y,$$

da cui

$$Ne(\Gamma) = \left\{(0,1), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), (1,0)\right\}$$

Il nuovo equilibrio descrive la situazione in cui entrambi i piloti sterzano a $5/6$ del percorso (un esempio di deterrenza)

## Gioco dei candidati

Due candidati $P$ e $Q$ si sfidano alle elezioni e propongono programmi $x, y \in [0,1]$ $(x \leq y)$, ogni elettore vota per il programma a lui più vicino:

$$R_P(y) = \left\{ x \in [0,y] : \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2} \right\}$$

$$R_Q(x) = \left\{ y \in [x,1] : \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Dunque

$$Ne(\Gamma) = \left\{ (x, 1-x) : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}$$

Se l'elettorato non è neutrale, ha densità $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ e funzione di ripartizione

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$$

Per esempio se $\varphi(t) = 2t$ si ottiene

$$Ne(\Gamma) = \left\{ (x, \sqrt{2} - x) : x \in \left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \right\}$$

## Duopolio di Cournot

Consideriamo un mercato con due produttori $P$, $Q$, volume $a > 0$, costo unitario di produzione $c > 0$ e funzione di domanda $p(x, y) = \max\{a - (x + y), 0\}$. I pay-off sono $f, g : [0, a]^2 \to \mathbb{R}$ definiti da

$$f(x, y) = x(p(x, y) - c) = \begin{cases} (a - c - y)x - x^2 & \text{se } x + y < a \\ -cx & \text{se } x + y \geq a, \end{cases}$$

$$g(x, y) = y(p(x, y) - c) = \begin{cases} (a - c - x)y - y^2 & \text{se } x + y < a \\ -cy & \text{se } x + y \geq a. \end{cases}$$

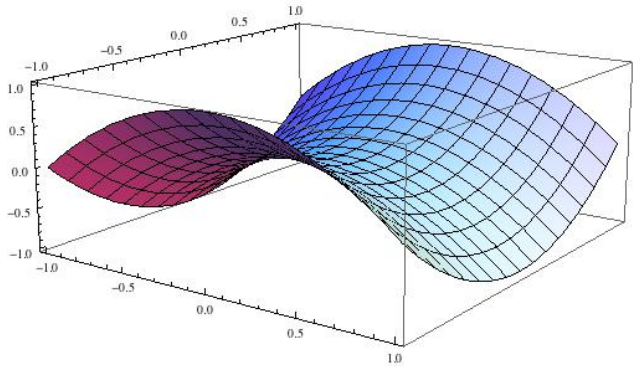
Per il Teorema di Nash $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$. Si ha

$$R_P(y) = \begin{cases} \left\{\frac{a - c - y}{2}\right\} & \text{se } y \leq a - c \\ \{0\} & \text{se } y > a - c \end{cases}, R_Q(x) = \begin{cases} \left\{\frac{a - c - x}{2}\right\} & \text{se } x \leq a - c \\ \{0\} & \text{se } x > a - c. \end{cases}$$

Si ricava

$$Ne(\Gamma) = \left\{\left(\frac{a - c}{3}, \frac{a - c}{3}\right)\right\}.$$

# Giochi a somma nulla e Teoria del mimimax



## Definizione

Un gioco $\Gamma = (X, Y, f, g)$ è detto a somma nulla se per ogni $(x, y) \in X \times Y$

$$f(x, y) + g(x, y) = 0$$

Un gioco a somma nulla si rappresenta come $\Gamma = (X, Y, f)$. Una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio di $\Gamma$ se e solo se

$$\sup_X f(\cdot, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_Y f(\bar{x}, \cdot)$$

In questo caso diciamo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$ (punto di sella). In particolare

$$\text{(MM)} \quad \sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f$$

## Esempio

Sia $\Gamma$ rappresentato dalla tabella ($g = -f$)

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 |
| $x_3$ | $-1$ | 0 |

Si ha $sp(f) = (x_1, y_1)$ e (MM)

## Esempio

Siano $X = Y = (0,1)$, $f(x,y) = xy$. Allora vale (MM):

$$\sup_{x\in(0,1)} \inf_{y\in(0,1)} xy = \sup_{x\in(0,1)} 0 = 0$$

$$\inf_{y\in(0,1)} \sup_{x\in(0,1)} xy = \inf_{y\in(0,1)} y = 0,$$

ma $sp(f) = \emptyset$ in quanto $xy \neq 0$ per ogni $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$

## Esempio

Sia $\Gamma$ rappresentato dalla tabella ($g = -f$)

| $P \backslash Q$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 |
| $x_3$ | $-1$ | 0 |

Si ha $sp(f) = (x_1, y_1)$ e (MM)

## Esempio

Siano $X = Y = (0,1)$, $f(x,y) = xy$. Allora vale (MM):

$$\sup_{x\in(0,1)} \inf_{y\in(0,1)} xy = \sup_{x\in(0,1)} 0 = 0$$

$$\inf_{y\in(0,1)} \sup_{x\in(0,1)} xy = \inf_{y\in(0,1)} y = 0,$$

ma $sp(f) = \emptyset$ in quanto $xy \neq 0$ per ogni $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$

## Teorema di von Neumann

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compatti convessi, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ bilineare. Allora $sp(f) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Per ogni $(x, y) \in X \times Y$ poniamo

$$F(x) = \left\{ y \in Y : \ f(x, y) = \min_{Y} f(x, \cdot) \right\}$$

$$G(y) = \left\{ x \in X : \ f(x, y) = \max_{X} f(x, y) \right\}$$

- $F : X \to 2^Y$ è s.c.s. a valori compatti convessi
- $G : Y \to 2^X$ è s.c.s. a valori compatti convessi
- $G \times F : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ è s.c.s. a valori compatti convessi
- per il Teorema di Kakutani esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in G(\bar{y}) \times F(\bar{x})$$

da cui $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di sella □

## Teorema di von Neumann

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compatti convessi, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ bilineare. Allora $sp(f) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.** Per ogni $(x, y) \in X \times Y$ poniamo

$$F(x) = \left\{ y \in Y : \ f(x, y) = \min_{Y} f(x, \cdot) \right\}$$

$$G(y) = \left\{ x \in X : \ f(x, y) = \max_{X} f(x, y) \right\}$$

- $F : X \to 2^Y$ è s.c.s. a valori compatti convessi
- $G : Y \to 2^X$ è s.c.s. a valori compatti convessi
- $G \times F : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ è s.c.s. a valori compatti convessi
- per il Teorema di Kakutani esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in G(\bar{y}) \times F(\bar{x})$$

da cui $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di sella □

## Esempio

Poniamo $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $Y = [-1, 1]$ e

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1 y - x_2 y$$

Allora si ha $(0, 0, 0) \in sp(f)$, in particolare

$$\sup_X \inf_Y f = 0 = \inf_Y \sup_X f$$

In casi più complessi si dimostra solo (MM), ma questo richiede diverse tecniche di analisi multivoca

## Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ soddisfa (KKM) se per ogni $x_1, \ldots x_k \in X$

$$conv(x_1, \ldots x_k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} F(x_i)$$

## Esempio

Poniamo $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $Y = [-1, 1]$ e

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1 y - x_2 y$$

Allora si ha $(0, 0, 0) \in sp(f)$, in particolare

$$\sup_X \inf_Y f = 0 = \inf_Y \sup_X f$$

In casi più complessi si dimostra solo (MM), ma questo richiede diverse tecniche di analisi multivoca

## Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ soddisfa (KKM) se per ogni $x_1, \ldots x_k \in X$

$$conv(x_1, \ldots x_k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} F(x_i)$$

## Teorema di Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz

Sia $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ a valori chiusi soddisfacente (KKM). Allora per ogni $x_1, \dots x_k \in X$ si ha

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) \neq \emptyset$$

**Dimostrazione.** Per assurdo:

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) = \emptyset$$

- poniamo $\lambda_i(x) = d(x, F(x_i))$ $(i = 1, \dots n)$, continua t.c. $\lambda_i(x) = 0$ se e solo se $x \in F(x_i)$
- sia $C = conv(x_1, \dots x_k)$ compatto convesso, per ogni $x \in C$ esiste almeno un $\lambda_i(x) > 0$ quindi poniamo

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x)}$$

- Per il Teorema di Schauder esiste $\bar{x} \in C$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$, assurdo □

## Teorema di Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz

Sia $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ a valori chiusi soddisfacente (KKM). Allora per ogni $x_1, \dots x_k \in X$ si ha

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) \neq \emptyset$$

**Dimostrazione.** Per assurdo:

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) = \emptyset$$

- poniamo $\lambda_i(x) = d(x, F(x_i))$ $(i = 1, \dots n)$, continua t.c. $\lambda_i(x) = 0$ se e solo se $x \in F(x_i)$
- sia $C = conv(x_1, \dots x_k)$ compatto convesso, per ogni $x \in C$ esiste almeno un $\lambda_i(x) > 0$ quindi poniamo

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x)}$$

- Per il Teorema di Schauder esiste $\bar{x} \in C$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$, assurdo $\square$

## Corollario

Sia $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ a valori chiusi, con almeno un valore compatto, soddisfacente (KKM). Allora

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$$

**Dimostrazione.** Sia $x_0 \in X$ t.c. $F(x_0)$ è compatto. Poniamo

$$G(x) = F(x) \cap F(x_0)$$

così $G : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ ha valori compatti. Per il Teorema KKM (applicato a $F$), per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots x_k \in X$ si ha

$$\bigcap_{i=1}^{k} G(x_i) = \bigcap_{i=0}^{k} F(x_i) \neq \emptyset$$

Per il Teorema di intersezione di Cantor esiste

$$\bar{x} \in \bigcap_{x \in X} G(x) = \bigcap_{x \in X} F(x). \quad \square$$

## Corollario

Sia $F : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ a valori chiusi, con almeno un valore compatto, soddisfacente (KKM). Allora

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$$

**Dimostrazione.** Sia $x_0 \in X$ t.c. $F(x_0)$ è compatto. Poniamo

$$G(x) = F(x) \cap F(x_0)$$

così $G : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ ha valori compatti. Per il Teorema KKM (applicato a $F$), per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots x_k \in X$ si ha

$$\bigcap_{i=1}^{k} G(x_i) = \bigcap_{i=0}^{k} F(x_i) \neq \emptyset$$

Per il Teorema di intersezione di Cantor esiste

$$\bar{x} \in \bigcap_{x \in X} G(x) = \bigcap_{x \in X} F(x). \quad \square$$

## Teorema di Fan

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compatti convessi, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ t.c.

- $f(\cdot, y)$ s.c.s. quasi-concava per ogni $y \in Y$
- $f(x, \cdot)$ s.c.i. quasi-convessa per ogni $x \in X$.

Allora

$$\sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f$$

**Dimostrazione.** Per assurdo, supponiamo

$$\sup_X \inf_Y f < c < \inf_Y \sup_X f$$

Per ogni $(x, y) \in X \times Y$ poniamo

$$F(x, y) = \left\{(x', y') \in X \times Y : f(x, y') \leq c \ \vee \ f(x', y) \geq c\right\}$$

- $F : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ ha valori non vuoti, compatti e soddisfa (KKM)
- per il Corollario esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y)$$

da cui la contraddizione □

## Teorema di Fan

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compatti convessi, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ t.c.

- $f(\cdot, y)$ s.c.s. quasi-concava per ogni $y \in Y$
- $f(x, \cdot)$ s.c.i. quasi-convessa per ogni $x \in X$.

Allora

$$\sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f$$

**Dimostrazione.** Per assurdo, supponiamo

$$\sup_X \inf_Y f < c < \inf_Y \sup_X f$$

Per ogni $(x, y) \in X \times Y$ poniamo

$$F(x, y) = \left\{(x', y') \in X \times Y : f(x, y') \leq c \ \vee \ f(x', y) \geq c\right\}$$

- $F : X \times Y \to 2^{X \times Y}$ ha valori non vuoti, compatti e soddisfa (KKM)
- per il Corollario esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ t.c.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y)$$

da cui la contraddizione □

## Esempio

Passiamo alle strategie miste nel gioco precedente:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 \leq 1\},$$

$$Y = [0, 1],$$

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1 + x_2 - y$$

Le ipotesi del Teorema di Fan sono verificate, un punto di sella è $(1, 0, 1)$.

*But the game never ends*
*When your whole world depends*
*On the turn of a friendly card*

A. Parsons & E. Woolfson

## Esempio

Passiamo alle strategie miste nel gioco precedente:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 \leq 1\},$$

$$Y = [0, 1],$$

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1 + x_2 - y$$

Le ipotesi del Teorema di Fan sono verificate, un punto di sella è $(1, 0, 1)$.

*But the game never ends*
*When your whole world depends*
*On the turn of a friendly card*

A. Parsons & E. Woolfson