2 Equazioni e disequazioni polinomiali, fratte, esponenziali e logaritmiche

Esercizio 2.1. Scrivere le condizioni di esistenza e risolvere l'equazione fratta

$$\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 0$$

Esercizio 2.2. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni fratte:

1) $\dfrac{10}{4 - x} = -5$

2) $\dfrac{(x-1)^2 - x^2}{5x + 10} = 0$

3) $\dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{1}{x - 2}$

4) $\dfrac{1}{2x - 2} + \dfrac{1}{3x^2 - 3} = \dfrac{1}{4x + 4}$

5) $-\dfrac{3}{x} \geq 12$

6) $-\dfrac{1}{3 - x} < \dfrac{x}{6 - 2x}$

7) $\dfrac{2x - 8}{4 - 3x} \leq 0$

8) $\dfrac{x^2}{x - 2} > 0$

Esercizio 2.3. Vero o falso?

a. La disequazione $2^x \geq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

b. La disequazione $2^x \leq 0$ è verificata se e solo se $x = 0$

c. La disequazione $e^{-x} \leq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

d. La disequazione $(0,2)^x \geq (0,2)^3$ è verificata per ogni $x \geq 3$

e. La disequazione $e^x \leq \frac{1}{e}$ è verificata per ogni $x \leq -1$

Esercizio 2.4. Dimostrare che se x e y sono numeri reali tali che:

$$e^{2x} - e^{2y} = 0$$

allora $x = y$.

Esercizio 2.5 (Bonus)**.** Risolvi la seguente equazione

$$x^3 \cdot 2^x - 8x^3 - 4x \cdot 2^x + 32x = 0$$

(*Suggerimento*: prima di fare calcoli strani, prova a usare le scomposizioni!)

Esercizio 2.6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Se $3^x = 11$ allora $x = \log_{11} 3$;

(b) Se $\log_9 a = -2$ allora $a = (-2)^9$;

(c) $2^{-\frac{1}{3}} = x$ è equivalente a $\log_2 x = -\frac{1}{3}$;

(d) $\log_{-2}(-8) = 3$ perchè $(-2)^3 = -8$;

(e) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;

(f) la condizione di esistenza dell'equazione $\log_2^2 x - 4 = 0$ è $x < -2 \vee x > 2$.

Esercizio 2.7. Sviluppare le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi:

- $\log_2(\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}})$
- $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{4}}{8\cdot\sqrt{2}}$
- $\log_5 \frac{5}{61\cdot\sqrt[4]{91}}$

Esercizio 2.8. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

- $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$
- $\frac{\log_2(4^{x+1}-2)+2x}{2x+1} = 1$

Esercizio 2.9. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y = \dfrac{(x+2)^2}{\ln(1+x)}$

2) $y = \log_3(1 + e^{\frac{x}{3}})$

3) $y = \dfrac{2x}{\ln(x^2-1)} + \dfrac{3}{\sqrt{x+2}} - 2x$

4) $y = \sqrt{4^{3x-x^2-2}}$