4 Limiti e Derivate

Esercizio 4.1. Calcola i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{4x+3}{x^2-4}$

2) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{3^x \ln(x)}{2+x}$

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 2^x}{\sqrt{x+4}}$

4) $\lim_{x\to +\infty} (\dfrac{2^x}{\ln x} + \dfrac{2}{x})$

Esercizio 4.2 (Forme Indeterminate)**.** Calcola i seguenti limiti usando l'ordine di infiniti o le loro gerarchie:

1) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^6 - 3x^4}{2x^2 - 2x + 1}$

2) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3 - 4x^2 + 6}{3x^2 - 2x + x^3}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x+1}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$

Esercizio 4.3. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nei punti indicati affianco usando la definizione (limite del rapporto incrementale):

1. $f(x) = x^3 + 4x + 1, \qquad x_0 = 1$
2. $f(x) = 2x - 1, \qquad x_0 = 6$
3. $f(x) = \dfrac{3}{x-1}, \qquad x_0 = 4$
4. $f(x) = e^{x-1}, \qquad x_0 = 1$

Esercizio 4.4. Calcolare la derivata nel generico punto delle seguenti funzioni (si sfruttino le derivate note delle funzioni elementari e le proprietà su somma, prodotto, rapporto e funzioni composte):

1) $f(x) = 4x - 9$
2) $f(x) = 2x^3 - x$
3) $f(x) = 3\ln x$
4) $f(x) = 2\sqrt{x}$
5) $f(x) = -x^2 + 4x$
6) $f(x) = \sin(-x)$
7) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
8) $f(x) = \dfrac{9-x}{x^2-1}$
9) $f(x) = x\cos x$
10) $f(x) = (x-1)e^{-x}$

Bonus) $f(x) = |x|$

Esercizio 4.5. Calcola la derivata destra e la derivata sinistra delle funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & se\ x \leq 3 \\ x^2 - 9 & se\ x > 3 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & se\ x > 0 \\ x^2 + x & se\ x \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 4.6 (Derivate di funzioni composte)**.** Calcola $f'(x)$ nei seguenti casi:

1) $f(x) = 4\sqrt{3x + 2}$

2) $f(x) = 2\ln x - \sqrt[4]{\ln^3 x}$

3) $f(x) = e^{4x} + \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sin^2 x$

Esercizio 4.7. Calcola i seguenti limiti che presentano forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 10x}{\sin 5x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x^3 - x^2}$

4) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x} - 2}{(x - 2)^2}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 2x}$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - x}{2x}$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{2\ln x}$

8) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{cotg} x}{\ln 2x^3}$