LEZIONE 06-11-2026

AVVISO: lezione di MER 11 annullata.

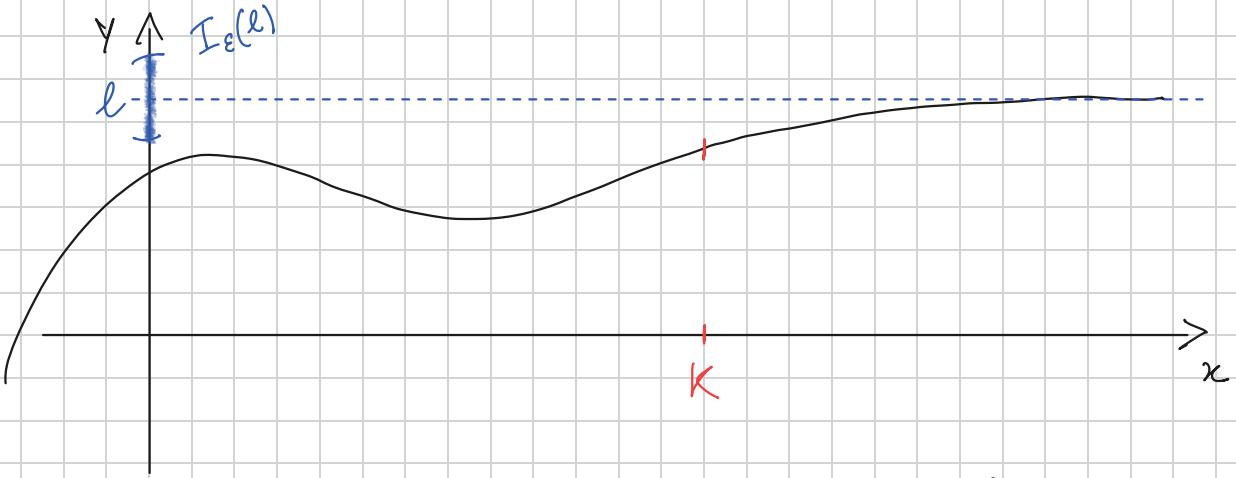
Mercoledì: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Oggi: $\lim_{x\to \infty} f(x) = l$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

DEF: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione; diremo che «f tende al numero $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$», e scriveremo

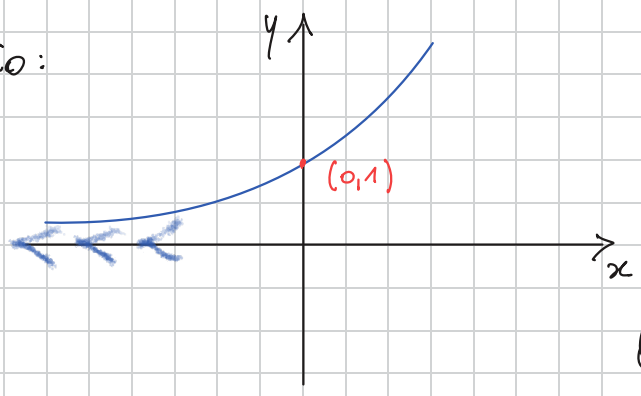
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0$ t.c. $\forall x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ($f(x) \in I_\varepsilon(l)$)



Se accade che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (o il caso con $x \to -\infty$), diremo che la retta $y = l$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per f.

Esempio: $f(x) = e^x$ [$e \approx 2{,}71$]



$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale.

Aritmetica dei limiti: notazione: $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

i) $\lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$

ii) $\left[\lim_{x\to\alpha} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to\alpha} g(x)\right] = \lim_{x\to\alpha} f(x)\cdot g(x)$

iii) Supponiamo che $g(x) \neq 0$, allora

$$\frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esempi:

0) Reminder: se f è continua in x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$f(x) = 3x^2 - 2$ $\quad \lim_{x\to\sqrt{2}} 3x^2 - 2 = 3\cdot(\sqrt{2})^2 - 2 = 4$

1) $f(x) = 7x \qquad g(x) = e^{x+2}$

$$\lim_{x\to -1} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to -1} 7x + e^{x+2} = 7(-1) + e^{-1+2} = -7 + e$$

2) $f(x) = \cos(2x+1) \qquad g(x) = \log_3(x^2+1)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0} \cos(2x+1)\cdot \log_3(x^2+1) =$$

$$= \cos(2\cdot 0+1)\cdot \underbrace{\log_3(0^2+1)}_{0} = \cos(1)\cdot 0 = 0$$

3) $f(x) = 3x^2+2x+1$, $\quad g(x) = x-4$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2+2x+1}{x-4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1}{3 - 4} = -34$$

Notazione: quando calcoliamo limiti di rapporti, useremo le seguenti notazioni:

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$

$$+\infty \pm l = +\infty$$
$$-\infty \pm l = -\infty$$
$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$

Forme indeterminate:

$$+\infty - \infty = ?$$
$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$
$$\frac{0}{0} = ?$$

Esempio: $\lim_{x \to +\infty} x^4 - x^3 = +\infty - \infty$ F.I. Però posso...

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty \cdot \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

Alcuni teoremi sui limiti.

TEOREMA 1: (Unicità del limite)

Se $f(x)$ tende a l per $x \to x_0$, tale limite l è unico

Quindi $\nexists \tilde{l} \neq l$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \tilde{l}$$

TEOREMA 2: (Permanenza del segno)

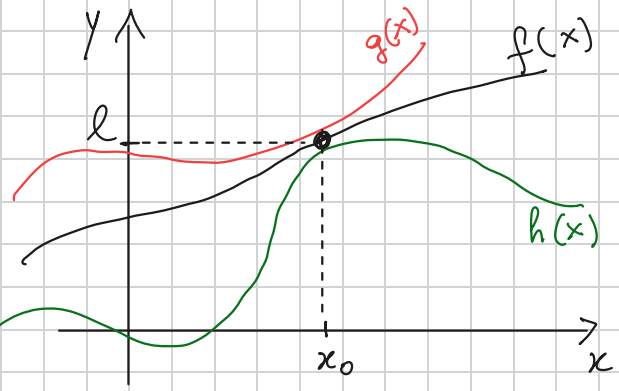
Se $f(x)$ tende ad $l \neq 0$ per $x \to x_0$, allora $\exists I_\delta(x_0)$ in cui $f(x)$ ed l hanno lo stesso segno.

TEOREMA 3: (Dei 2 carabinieri o Del confronto)

Siano f, g, h 3 funzioni e x_0 un punto di accumulazione per il loro dominio (quindi possiamo calcolare il limite per $x \to x_0$ di tutte e 3). Se vale che

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in D$$

e $\lim_{x \to x_0} h(x) = l = \lim_{x \to x_0} g(x)$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.



DIMOSTRAZIONE:

Per ipotesi abbiamo che

$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 :$

$x \in I_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow h(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \to \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 :$

$x \in I_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow g(x) \in I_\varepsilon(l)$

Prendendo δ come il più piccolo tra δ_1 e δ_2, siamo sicuri che entrambe le condizioni siano verificate, ossia

$$x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow \begin{cases} h(x) \in I_\varepsilon(l) \iff l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \ \star \\ g(x) \in I_\varepsilon(l) \iff l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \ \star \end{cases}$$

Noi vogliamo $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, ma ciò è vero perché $\forall x \in I_\delta(x_0)$

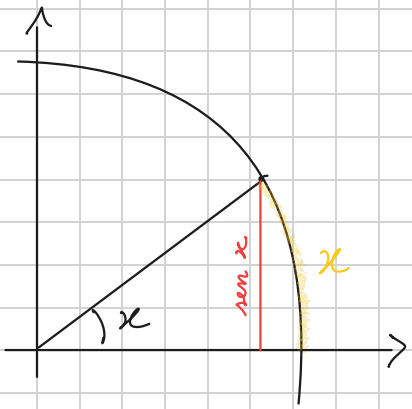
$$l - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$$

ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. □

Esempio:

Calcoliamo $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x$. (Potremmo già calcolarlo

poiché $\sin x$ è una funzione continua, pertanto $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$). Proviamo ad usare il teorema dei 2 carabinieri...



Dico che $\operatorname{sen} x \leq x$ e questo è vero perché geometricamente l'arco sotteso da x (di misura x) è più grande della proiezione verticale ($\operatorname{sen} x$) del punto corrispondente. Supponiamo anche di fare $x \to 0^+$, di conseguenza $\operatorname{sen} x \geq 0$ e abbiamo ottenuto che:

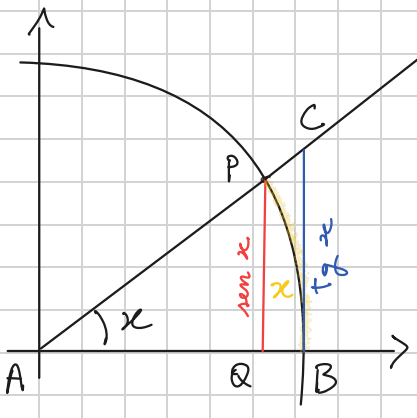
$$0 \leq \operatorname{sen} x \leq x$$

Calcoliamo: $\lim_{x\to 0^+} 0 = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$

Limiti notevoli:

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

DIMOSTRAZIONE: Dico che $\boxed{\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x}$ ☆



$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

$$\overset{\Delta}{APQ} = \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{2}$$

$$\overset{\frown}{ABP} = \frac{1 \cdot x}{2}$$ ← Perché???

Poiché le aree sono rispettivamente nell'ordine

$$\overset{\triangle}{APQ} \leq \overset{\frown}{ABP} \leq \overset{\triangle}{ABC} \implies \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{2} \leq \frac{1 \cdot x}{2} \leq \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

quindi in particolare

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2} \implies x \leq \operatorname{tg} x \text{ , quindi } \star \text{ è vera.}$$

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \text{ ;}$$

$$\left[\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right.$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \text{ ;}$$

$$\left. \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right]$$

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x} \text{ ;}$$

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \implies \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$\cos 0 = 1$ (per $x \to 0$) $\qquad 1$

per i due carabinieri, che in questo caso erano $g(x) = 1$ e $h(x) = \cos x$. □

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2$

[Sfruttiamo la formula:

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \quad]$$

Infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

□