# Foglio Esercizi 3 – Laboratorio

Risolvere i problemi seguenti con la classe `ProblemaPL` costruita a lezione. Quando il testo è descritto a parole, scrivere prima la formulazione matematica su carta e solo dopo i dati $A$, $b$, $c$.

**1.**

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Confrontare la soluzione e il valore ottimo con quelli ottenuti a mano nell'Esercizio 5(a) del Foglio Esercizi 3. Quali vincoli sono soddisfatti con l'uguaglianza nella soluzione ottima?

**2.**

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Risolvere il problema anche a mano con il metodo del simplesso e confrontare la soluzione e il valore ottimo con quelli restituiti da Gurobi.

**3.**

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Confrontare la soluzione e il valore ottimo con quelli ottenuti a mano nell'Esercizio 7(a) del Foglio Esercizi 3, e verificare a mano che la soluzione trovata soddisfa tutti i vincoli.

**4.**

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20 \\ & x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Confrontare la soluzione e il valore ottimo con quelli ottenuti a mano nell'Esercizio 7(b) del Foglio Esercizi 3.

**5. Il mangime.** Un allevatore prepara un mangime mescolando due alimenti. L'alimento 1 costa 2 euro al kg, l'alimento 2 costa 3 euro al kg. Il contenuto di nutrienti per kg di alimento è:

| | Proteine | Fibre | Energia |
|---|---|---|---|
| Alimento 1 | 4 | 1 | 2 |
| Alimento 2 | 2 | 3 | 2 |
| Fabbisogno minimo | 8 | 6 | 5 |

Quanti kg di ciascun alimento bisogna usare per soddisfare il fabbisogno spendendo il meno possibile? Calcolare quante unità di ciascun nutriente contiene la miscela ottima: quali fabbisogni sono soddisfatti esattamente e quale invece viene superato? Che cosa succede al costo minimo se il fabbisogno di energia passa da 5 a 5.5? E se passa a 6? Come si spiega la differenza fra i due casi?

**6. I pezzi di ricambio.** Una piccola azienda produce cinque tipi di pezzi di ricambio. Ogni pezzo passa per la fonderia e poi per il reparto di finitura. Le ore di lavoro necessarie per produrre 100 pezzi e il profitto ottenuto sono:

| Pezzo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Fonderia (ore) | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| Finitura (ore) | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| Profitto (euro) | 30 | 20 | 40 | 25 | 10 |

Nel mese sono disponibili 700 ore di fonderia e 1000 ore di finitura. Quanto conviene produrre di ciascun pezzo per massimizzare il profitto? Risolvere di nuovo il problema con 701 ore di fonderia: di quanto aumenta il profitto massimo? E se invece si dispone di 1001 ore di finitura (e 700 di fonderia)? Quale dei due reparti conviene potenziare?

**7.**

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Disegnare la regione ammissibile. Quante sono le soluzioni ottime? Quale soluzione trova Gurobi? Quale soluzione si ottiene cambiando di pochissimo il vettore dei costi, ad esempio $c = (-1, -1.01)$?

**8.**

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Interpretare il risultato aiutandosi con il disegno della regione ammissibile. Trovare a mano punti ammissibili in cui $x_1 + x_2$ è grande quanto si vuole.

**9.**

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Interpretare il risultato. Riscrivere poi il problema usando solo vincoli di tipo $\leq$ e verificare che il risultato non cambia.

**10. Il trasporto.** Tre magazzini hanno a disposizione rispettivamente 25, 25 e 50 unità di merce; quattro clienti ne richiedono rispettivamente 15, 20, 30 e 35. Il costo per spedire un'unità dal magazzino $i$ al cliente $j$ è l'elemento $c_{ij}$ della matrice

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ogni magazzino deve spedire tutta la sua merce e ogni cliente deve ricevere esattamente la quantità richiesta. Determinare il piano di spedizioni di costo minimo e stamparlo come tabella magazzini × clienti.

*Suggerimento:* ordinare le variabili come $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, \ldots, x_{34}$ e costruire la matrice $A$ partendo da `np.zeros((7, 12))`.

**11. La falegnameria.** Una falegnameria produce tavoli e sedie. Ogni tavolo richiede 3 ore di lavorazione e 2 ore di verniciatura e dà un profitto di 50 euro; ogni sedia richiede 1 ora di lavorazione e 1 ora di verniciatura e dà un profitto di 20 euro. Ogni settimana sono disponibili 120 ore di lavorazione e 90 ore di verniciatura. Per esigenze di vendita, il numero di sedie prodotte deve essere almeno il doppio del numero di tavoli. Quanti tavoli e quante sedie conviene produrre ogni settimana?

Come si scrive il vincolo "sedie almeno il doppio dei tavoli" nella forma $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$? La soluzione trovata ha senso dal punto di vista pratico? Che cosa si potrebbe fare?

**12. La lega.** Un'azienda deve produrre 100 kg di una lega metallica mescolando tre materiali, che hanno i seguenti costi e contenuti di zinco e di rame:

| | Materiale 1 | Materiale 2 | Materiale 3 |
|---|---|---|---|
| Costo (euro/kg) | 4 | 6 | 3 |
| Zinco (%) | 20 | 50 | 10 |
| Rame (%) | 60 | 30 | 70 |

La lega deve contenere almeno il 30% di zinco e al massimo il 55% di rame. Quanti kg di ciascun materiale bisogna usare per produrre la lega al costo minimo?

**13. La produzione su tre mesi.** Un'azienda deve soddisfare la domanda di un prodotto nei prossimi tre mesi. In ogni mese può produrre al massimo 160 unità; quello che produce in più può essere immagazzinato e venduto nei mesi successivi, con un costo di 1 euro per unità per ogni mese di immagazzinamento.

| Mese | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Domanda (unità) | 100 | 150 | 200 |
| Costo di produzione (euro/unità) | 10 | 12 | 11 |

All'inizio non ci sono scorte in magazzino. Come conviene organizzare la produzione per soddisfare la domanda al costo totale minimo?

*Suggerimento:* usare come variabili le quantità prodotte $p_1, p_2, p_3$ e le scorte $s_1, s_2, s_3$ rimaste in magazzino alla fine di ciascun mese. In ogni mese vale il bilancio

$$\text{scorte iniziali} + \text{produzione} - \text{scorte finali} = \text{domanda}.$$

**14. L'assegnamento.** Tre tecnici devono svolgere tre interventi, uno ciascuno. Il tempo (in ore) che il tecnico $i$ impiega per l'intervento $j$ è riportato nella tabella:

| | Intervento 1 | Intervento 2 | Intervento 3 |
|---|---|---|---|
| Tecnico 1 | 8 | 6 | 9 |
| Tecnico 2 | 7 | 9 | 5 |
| Tecnico 3 | 6 | 8 | 7 |

Come vanno assegnati gli interventi per minimizzare il tempo totale?

*Suggerimento:* usare le variabili $x_{ij}$, che valgono 1 se il tecnico $i$ svolge l'intervento $j$, e imporre $0 \leq x_{ij}$ invece di $x_{ij} \in \{0, 1\}$. La soluzione restituita da Gurobi è fatta di 0 e 1? In che cosa questo problema somiglia al problema del trasporto?

**15.** Riprendere il problema dei pezzi di ricambio (Esercizio 6) e risolverlo più volte facendo variare le ore disponibili in fonderia da 300 a 1700, a passi di 100, con un ciclo `for h in range(300, 1800, 100):`. Per ogni valore stampare il profitto massimo e la soluzione ottima.

Come cresce il profitto all'aumentare delle ore? Per quali valori di $h$ ogni 100 ore in più fanno aumentare il profitto sempre della stessa quantità? Confrontare con quanto trovato nell'Esercizio 6.

**16. Vincoli attivi.** Aggiungere alla classe `ProblemaPL` un metodo `vincoli_attivi()` che restituisce la lista dei vincoli soddisfatti con l'uguaglianza nella soluzione ottima, cioè gli indici $i$ per cui $|a_i^T x^* - b_i| < 10^{-6}$. Provarlo sugli Esercizi 1, 5 e 6.

**17. Controllo di ammissibilità.** Aggiungere alla classe `ProblemaPL` un metodo `ammissibile(x)` che riceve un vettore `x` e restituisce `True` se `x` soddisfa tutti i vincoli del problema (tenendo conto del tipo di ciascun vincolo) e le condizioni $x \geq 0$, e `False` altrimenti. Usare una tolleranza di $10^{-6}$ nei confronti. Provarlo sulle soluzioni ottime degli esercizi precedenti e sui punti trovati a mano nell'Esercizio 8.