Foglio Esercizi 3

1. Usando il pivoting, risolvere il sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 5x_1 + x_2 &= 9. \end{aligned}$$

2. Usando il pivoting, risolvere il sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12. \end{aligned}$$

3. Siano $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ una base di $\mathbb{R}^m$ e sia $\mathbf{a}_q$ un vettore di $\mathbb{R}^m$, con rappresentazione

$$\mathbf{a}_q = \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{iq}\, \mathbf{a}_i$$

in questa base (i coefficienti $\bar{a}_{iq}$ sono quelli della colonna q della tavola in forma canonica). Mostrare che anche i vettori

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{p-1},\ \mathbf{a}_q,\ \mathbf{a}_{p+1}, \ldots, \mathbf{a}_m$$

formano una base di $\mathbb{R}^m$ se e solo se $\bar{a}_{pq} \neq 0$.

4. Si consideri un problema di programmazione lineare in forma standard e una sua soluzione di base ammissibile. Mostrare che, se il costo relativo r_j è strettamente positivo per ogni variabile x_j non di base, allora la soluzione di base è l'unica soluzione ottima del problema.

5. (a) Usando il metodo del simplesso, risolvere

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Rappresentare graficamente il problema nel piano (x_1, x_2) e indicare il cammino seguito dal metodo del simplesso.

(c) Ripetere i punti (a) e (b) per il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

6. Nel metodo del simplesso, invece di scegliere come variabile entrante quella con il costo relativo più negativo, è possibile scegliere la variabile che, una volta portata in base, produce il massimo miglioramento della funzione obiettivo. Mostrare che questo criterio porta a scegliere la variabile x_k corrispondente all'indice k che minimizza

$$\max_{i:\ \bar{a}_{ik} > 0} \ r_k \, \frac{\bar{a}_{i0}}{\bar{a}_{ik}}.$$

7. Usando il metodo del simplesso a due fasi, risolvere i seguenti problemi.

(a)

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20 \\ & x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

8. Trovare una soluzione di base ammissibile del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 9 \\ x_i \geq 0, \quad & i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

9. Le due fasi del metodo a due fasi si possono combinare in un'unica procedura con il *metodo big-M*. Dato il problema in forma standard

$$\min \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{P}$$

si considera il problema approssimante

$$\min \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} + M\sum_{i=1}^{m} u_i \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \tag{P_M}$$

dove $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ è un vettore di variabili artificiali e $M > 0$ è una costante grande: il termine $M \sum_i u_i$ penalizza le u_i non nulle. Supponendo di risolvere (P_M) con il metodo del simplesso, mostrare che:

(a) se si trova una soluzione ottima con $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, la $\mathbf{x}$ corrispondente è una soluzione di base ammissibile ottima di (P);

(b) se per ogni $M > 0$ si trova una soluzione ottima con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, allora (P) non è ammissibile;

(c) se per ogni $M > 0$ il problema (P_M) è illimitato, allora (P) è illimitato oppure non ammissibile;

(d) se (P) ha valore ottimo finito $V(\infty)$ e $V(M)$ indica il valore ottimo di (P_M), allora $V(M) \leq V(\infty)$;

(e) se $M_1 \leq M_2$, allora $V(M_1) \leq V(M_2)$;

(f) esiste M_0 tale che $V(M) = V(\infty)$ per ogni $M \geq M_0$.