LEZIONE 04-11-2026

§ 3. Analisi matematica.

Libri di riferimento: << Matematica per le scienze >>,
Bramanti - Confortola - Salsa
<< Esercizi di Analisi Matematica 1 >>,
Salsa - Squellati.

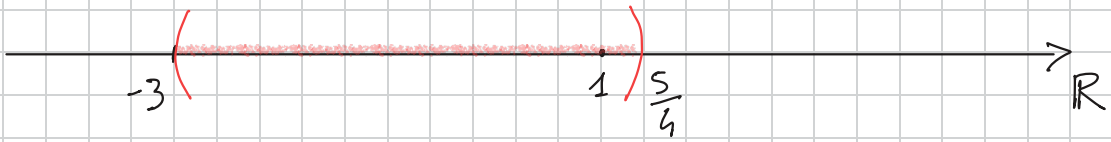
Intervalli e intorni, punti isolati e di accumulazione.

DEF: Un INTERVALLO è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ della forma:

$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \} \leftarrow \text{INTERVALLO APERTO}$$
$$(a,b] = \{ a < x \leq b \}$$
$$[a,b) = \{ a \leq x < b \}$$
$$[a,b] = \{ a \leq x \leq b \} \leftarrow \text{INTERVALLO CHIUSO}$$

Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un suo INTORNO è un intervallo aperto che lo contiene, ossia $(a,b) \ni x_0$

Esempio: $x_0 = 1$, $\left(-3, \frac{5}{4}\right)$ è un suo intorno.



DEF: Un INTORNO CIRCOLARE di $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $r > 0$ è

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, \; x_0 + r)$$

Esempio: $x_0 = 4$, $I_2(4) = (2,6)$



Altri esempi: $I_{\frac{1}{2}}(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $I_1(-1) = (-2, 0)$.

Nota: [intervalli limitati e illimitati]

Se $I = (a, b)$ è un intervallo e a, b sono i suoi estremi, diremo che:

i) I è LIMITATO quando sia a sia b sono numeri finiti;

ii) I è ILLIMITATO quando o $a = -\infty$ o $b = +\infty$.

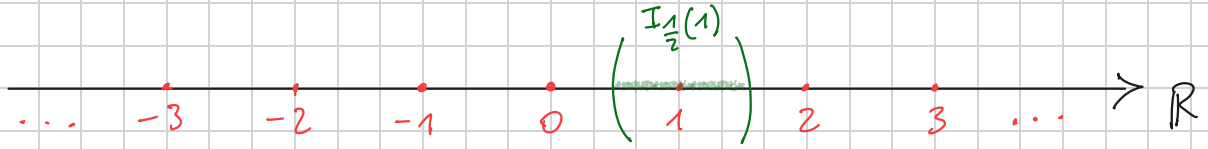
Esempi: $(1, 3]$ limitato, $(-\infty, 5]$ illimitato.

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad \text{(ovvio)}$$

DEF: Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice «ISOLATO per $A \subseteq \mathbb{R}$» se $\exists\, I_r(x_0)$ che non contiene nessun punto di A (tranne x_0 stesso). Invece x_0 è detto «di ACCUMULAZIONE per $A \subseteq \mathbb{R}$» se non è isolato, ossia $\forall I_r(x_0) \quad \exists\, x \in I_r(x_0) \cap A$ (oltre x_0 stesso).

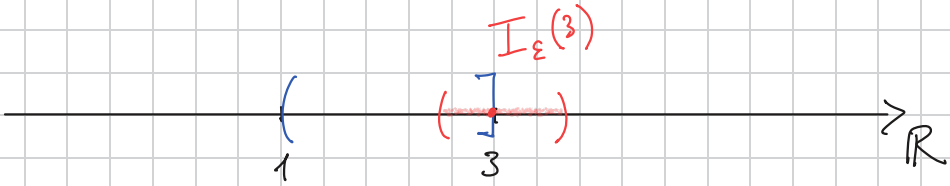
Esempi:

1) $A = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$



Il punto $x_0 = 1$ è isolato perché trovo un suo intorno circolare che non contiene altri punti di $\mathbb{Z}$, ad esempio basta prendere $I_{\frac{1}{2}}(1)$.

2) $A = (1, 3] \subseteq \mathbb{R}$. Domanda: $x_0 = 3$ è di accumulazione per $(1, 3]$?



Ogni volta che scelgo un intorno di $x_0 = 3$, anche di raggio ε (« epsilon », numero piccolo vicino a zero), ci sono punti di $(1,3]$ che appartengono a $I_\varepsilon(3)$, pertanto 3 non è isolato $\Rightarrow$ è di accumulazione.

Più in generale, se (a,b) è un intervallo, $x_0 = a$ e $x_0 = b$ sono di accumulazione per (a,b).

Limiti di funzioni.

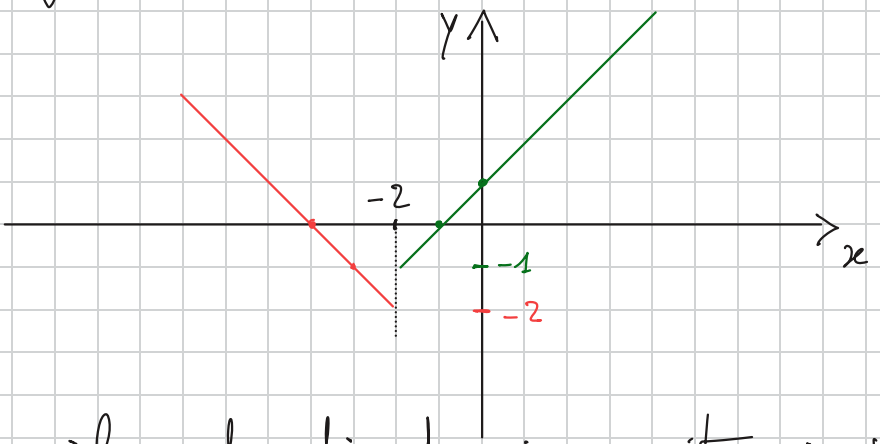
Intuitivamente cerchiamo di capire se intorni di $x_0 \in D$ (D è il dominio di una funzione f) vengono mandati in intorni di $f(x_0)$.

Problema « motivazionale »: vediamo il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-4 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$y = x+1$

$y = -x-4$



Vogliamo trovare il modo di descrivere situazioni in cui avvicinarsi ad un punto del dominio (in questo caso $x_0 = -2$) ha effetti su come si comporta f avvicinandosi ad $f(-2)$.

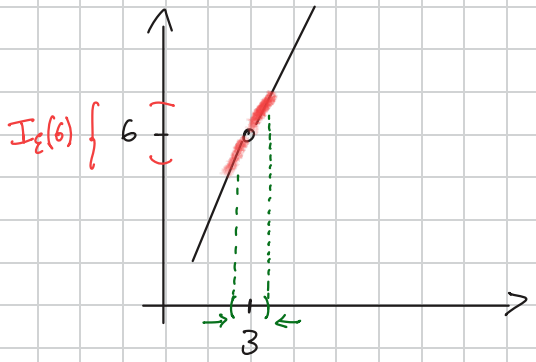
Qui diremmo che se x si avvicina ad $x_0 = -2$ "da sinistra", $f(x)$ tende a -2, mentre se x si avvicina ad $x_0 = -2$ "da destra", $f(x)$ tende a -1.

Per spiegare meglio ciò, prendiamo come altro esempio la funzione $y = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$ per la quale $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Cosa succede se calcolo f con x "vicini" a 3?

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,8	5,98	5,998	5,9998	N.D.	6,0002	6,002	6,02	6,2

Come osserviamo, più ci avviciniamo a $x_0 = 3$, più la funzione $f(x)$ si avvicina a 6. Possiamo dire che, se consideriamo un qualunque intorno circolare di $y = 6$ di ampiezza $\varepsilon > 0$ $\left(I_\varepsilon(6)\right)$ esiste sempre un intorno di $x_0 = 3$ i cui punti (tranne x_0) hanno immagine contenuta in $I_\varepsilon(6)$. Scriveremo in questo caso che

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$



DEF: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 punto di accumulazione per D. Diremo che "f ha per limite il numero $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0" e scriveremo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_\delta(x_0)$:

$$x \in I_\delta(x_0) \implies f(x) \in I_\varepsilon(l)$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$
$$-\varepsilon < f(x) - l < +\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Esempio: verifichiamo che $\lim_{x\to 2} 2x-1 = 3$ con la definiz.

$|(2x-1)-3| < \varepsilon$;

$|2x-1-3| < \varepsilon$;

$|2x-4| < \varepsilon$;

$-\varepsilon < 2x-4 < +\varepsilon$;

$4-\varepsilon < 2x < 4+\varepsilon$;

$2-\frac{\varepsilon}{2} < x < 2+\frac{\varepsilon}{2}$

→ significa che $x \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}(2)$ e il limite è verificato.

Osservazione: in questo ultimo esempio, per calcolare il limite $\lim_{x\to 2} 2x-1$ sembrerebbe che bastasse sostituire $x=2$ dentro $f(x)=2x-1$ ottenendo $2\cdot 2-1=3$. In effetti ciò è quello che accade per un particolare tipo di funzioni che definiamo:

DEF: Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in [a,b]$.
Diremo che f è «CONTINUA in x_0» se
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che f è CONTINUA se lo è in tutti i punti di $[a,b]$.

Diremo che f è «DISCONTINUA in x_0» se non è ivi continua.

Le seguenti funzioni elementari sono continue:

- f. costanti ($y = c$, $c \in \mathbb{R}$)
- f. polinomiali
- f. radici quadrate (anche di altri indici più in generale)
- f. esponenziali
- f. logaritmiche
- f. goniometriche
- f. valore assoluto.

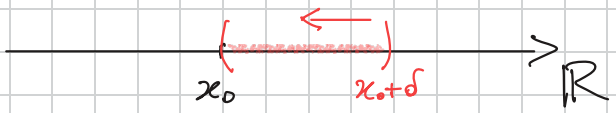
Intuitivamente le funzioni continue hanno il grafico che non si interrompe in nessun punto. La funzione del "problema motivazionale" era invece discontinua in $x_0 = -2$, poiché il suo grafico era composto da due semirette disgiunte.

DEF: Il LIMITE DESTRO di $f(x)$ in x_0 è ottenuto con intorni destri di x_0, ossia della forma $(x_0, x_0 + r)$. Si scrive $x \to x_0^+$, quindi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ed è uguale ad $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{f(x) \in I_\varepsilon(l)}$$



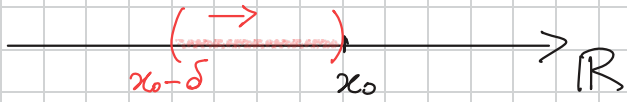
Il LIMITE SINISTRO di $f(x)$ in x_0 è ottenuto con intorni sinistri, ovvero della forma $(x_0 - r, x_0)$. Si scrive

$x \to x_0^-$, quindi

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

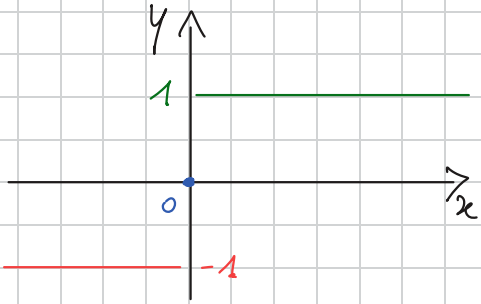
ed è uguale ad $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$



Esempi:

1) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Questa funzione è discontinua in $x_0 = 0$, inoltre si evince dal grafico che

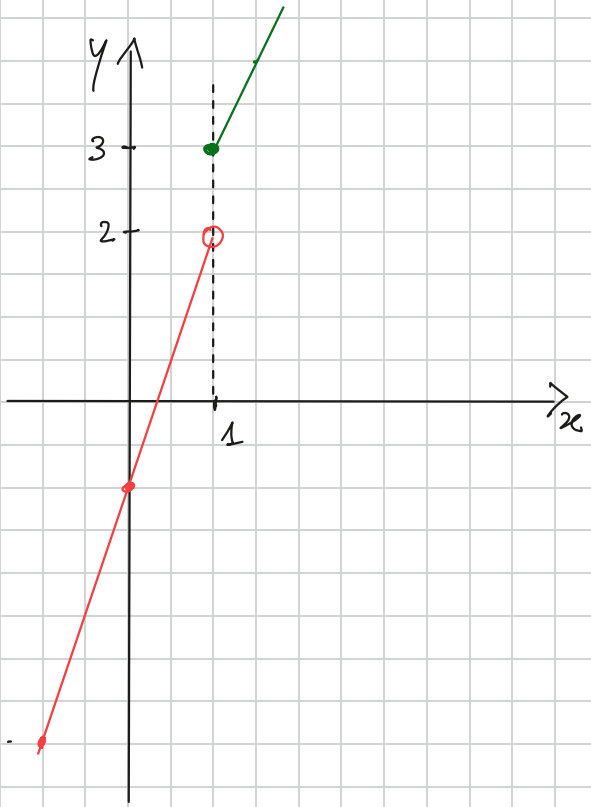
$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = +1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

2) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

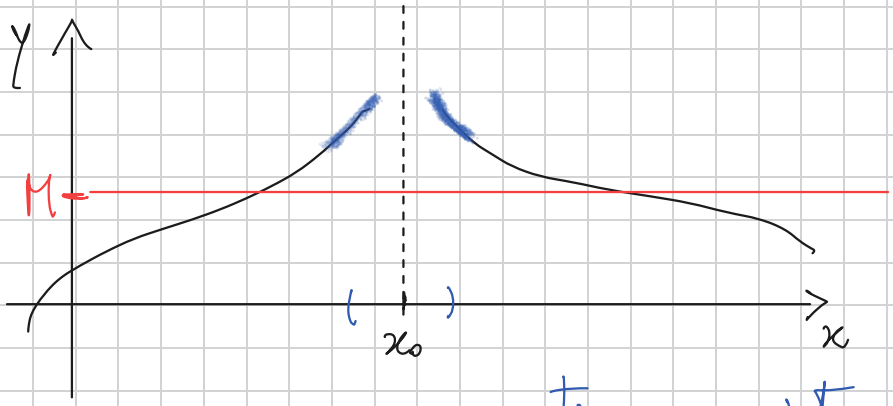
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

$\neq$ (discontinua in $x_0 = 1$)



Nota: diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se entrambi $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

DEF: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione non definita in x_0 (punto di accumulazione per D). Si dice che "f tende a $+\infty$ per $x \to x_0$" e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0 \quad \exists I_\delta(x_0)$ t.c. $f(x) > M \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$.



Trovo un intorno di x_0 i cui punti hanno immagine $> M$.

Una definizione simile si applica per $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
In entrambi i casi diremo che $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE (per f).

Esercizio: rappresentare il grafico di $y = \frac{1}{x-2}$.