# Modulo 3: Funzioni

Francesco Cannas Aghedu

Matematica 1 - A.A. 2026/2027

# Relazioni

# Relazione tra insiemi

## Definizione

*Dati due insiemi $A$ e $B$, non vuoti, si definisce una* ***relazione*** *da $A$ a $B$ un procedimento che associa a degli elementi di $A$ degli elementi di $B$. Essa verrà denotata con*

$$\mathcal{R} : A \to B,\ a \mapsto b \leftrightarrow a\,\mathcal{R}\,b$$

*Se $a\,\mathcal{R}\,b$, diciamo che $b$ è* ***immagine*** *di $a$ e che $a$ è* ***controimmagine*** *di $b$.*

$A$ è *l'insieme di partenza* della relazione, $B$ è l'*insieme di arrivo*. $A$ e $B$ possono anche coincidere.

Consideriamo, ad esempio gli insiemi $A = \{-2, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4\}$ e la relazione

$$\mathcal{R} : A \to B, \quad a\,\mathcal{R}\,b \leftrightarrow b = a^2.$$

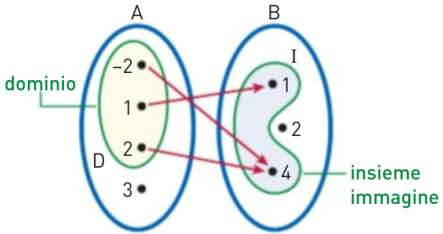
Si ha quindi: $-2\,\mathcal{R}\,4, \qquad 1\,\mathcal{R}\,1, \qquad 2\,\mathcal{R}\,4.$
L'elemento $a = 3 \in A$ non produce una coppia perchè $9 \notin B$.

# Dominio e insieme immagine

## Definizione

*Data una relazione da A a B, chiamiamo:*

- ***dominio** il sottoinsieme D di A formato dagli elementi di A che hanno almeno un'immagine in B*
- ***insieme immagine** il sottoinsieme I di B formato dagli elementi di B che sono immagini di elementi di A*



# Relazione e prodotto cartesiano

Vediamo ora, partendo dallo stesso esempio, una definizione alternativa di relazione.

Dati gli insiemi $A = \{-2, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4\}$, si ha

$$A \times B = \{(-2;1), (-2;2), (-2;4), (1;1), (1;2), (1;4), (2;1), (2;2), (2;4), (3;1), (3;2), (3;4)\},$$

quindi l'insieme delle coppie $(-2;4), (1;1), (2;4)$, che soddisfano la relazione $a \mathcal{R} b \leftrightarrow b = a^2$, formano un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$:

$$\mathcal{R} = \{(-2;4), (1;1), (2;4)\} \subset A \times B.$$

Possiamo quindi riformulare la definizione di relazione in termini di prodotto cartesiano:

**Definizione**

*Dati due insiemi $A$ e $B$, non vuoti, una **relazione** da $A$ a $B$ è un sottoinsieme di $A \times B$.*

# Rappresentazione di una relazione

Possiamo rappresentare una relazione in quattro modi diversi:

- elencazione
- diagramma a frecce
- tabella a doppia entrata
- diagramma cartesiano

Consideriamo gli insiemi $A = \{4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e la relazione $\mathcal{R} : A \to B$ così definita

$$a \mathcal{R} b \leftrightarrow a - b \text{ è dispari},$$

dove

$$\mathcal{R} = \{(4; 1), (4; 3), (5; 2), (6; 1), (6; 3)\} \subset A \times B.$$

# Rappresentazione di una relazione

Descriviamo $\mathcal{R}$ con le quattro rappresentazioni.

**Elencazione**

Scriviamo l'insieme delle coppie di valori in relazione tra loro, che indichiamo con $\mathcal{R}$, cioè elenchiamo tutte le coppie $(a; b)$, con $a \in A$ e $b \in B$, tali che $a \mathcal{R} b$.

$\mathcal{R} = \{(4; 1), (4; 3), (5; 2), (6; 1), (6; 3)\}$

**Diagramma a frecce**

Per ogni coppia $(a; b)$, con $a \mathcal{R} b$, disegniamo una *freccia* che parte da $a$ e termina in $b$.

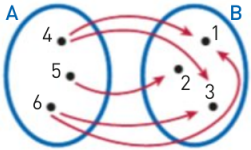


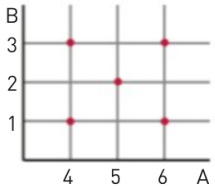

**Tabella a doppia entrata**

Scriviamo gli elementi di $A$ nella prima colonna, quelli di $B$ nella prima riga e segniamo con una **X** le *caselle* delle coppie in relazione.

| $\mathcal{R}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 4 | X | | X |
| 5 | | X | |
| 6 | X | | X |

**Diagramma cartesiano**

Rappresentiamo gli elementi di $A$ sulla semiretta orizzontale, quelli di $B$ sulla semiretta verticale e segniamo i *punti* delle coppie in relazione.



# Relazione inversa

Consideriamo gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8, 12\}$ e la relazione $\mathcal{R} : A \to B$ così definita

$$a \mathcal{R} b \leftrightarrow a = b/2,$$

dove

$$\mathcal{R} = \{(1; 2), (2; 4), (4; 8)\} \subseteq A \times B.$$

Invertendo gli elementi di ogni coppia, si ottiene il sottoinsieme $\mathcal{R}^{-1}$ di $B \times A$:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(2; 1), (4; 2), (8; 4)\} \subset B \times A.$$

Questo esempio suggerisce la definizione seguente:

## Definizione

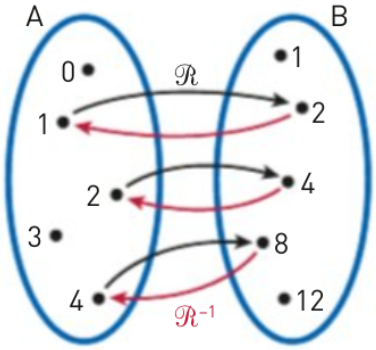
*Data una relazione $\mathcal{R} : A \to B$ la **relazione inversa** $\mathcal{R}^{-1} : B \to A$ è così definita:*

$$b \mathcal{R}^{-1} a \leftrightarrow a \mathcal{R} b$$

# Diagramma a frecce di $\mathcal{R}^{-1}$

In una relazione e nella sua inversa si scambiano l'insieme di partenza con l'insieme di arrivo e il dominio con l'insieme immagine.

Nel diagramma a frecce, per ottenere la relazione inversa, basta tracciare una freccia in senso inverso per ogni freccia della relazione iniziale. In riferimento all'esempio precedente si ha:



# Funzioni

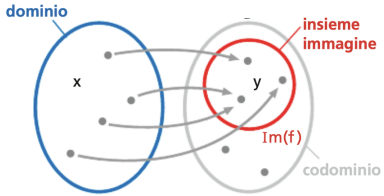
# Definizione di funzione

## Definizione

*Siano $D$ e $C$ due insiemi non vuoti. Un'**applicazione** (o **funzione** o **mappa**) $f$ dall'insieme $D$ all'insieme $C$ consiste, oltre che di $D$ e $C$, anche di una relazione che associa ad ogni elemento $x$ di $D$ uno ed un solo elemento $f(x)$ di $C$. Essa verrà denotata con*

$$f : D \to C, x \mapsto y = f(x)$$

Gli insiemi $D$ e $C$ vengono detti **dominio** e, rispettivamente, **codominio** dell'applicazione $f$. L'applicazione $f$ non è determinata se non si danno il suo dominio ed il suo codominio.

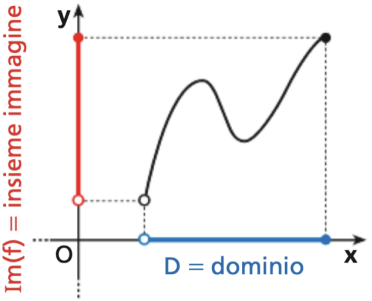


# Grafico di una funzione

L'elemento $f(x)$ viene detto l'**immagine** dell'argomento $x$ e, viceversa, $x$ viene detto **controimmagine** del valore $f(x)$. L'insieme delle immagini $f(x)$ al variare di $x$ in $D$ viene indicato con $\mathrm{Im}(f)$. L'insieme

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x; f(x)) \,|\, x \in D\} \subset D \times C$$

viene detto **grafico** della funzione $f$.



# Funzioni numeriche

Se dominio e codominio sono insiemi numerici, le funzioni sono dette **funzioni numeriche.**

Esse sono descrivibili con un'espressione analitica, cioè una formula. Ad esempio $y = 2x + 1$.

Il valore che assume $y = f(x)$ dipende da quello attribuito a $x$: per tale motivo $y$ si dice **variabile dipendente** e $x$ si dice **variabile indipendente**.

Se dominio e codominio di una funzione numerica $f$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, diciamo che $f$ è una **funzione reale di variabile reale**. Nel seguito considereremo funzioni di questo tipo.

**Definizione**

*Il **dominio naturale** di una relazione $y = f(x)$ è l'insieme più ampio dei valori reali $x$ per cui esiste il corrispondente valore reale $y$. Il dominio naturale viene anche chiamato **campo di esistenza**.*

# Funzioni elementari

# Funzioni lineari

Siano $m, q \in \mathbb{R}$. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = mx + q$$

è detta **funzione lineare**. Per $m \neq 0$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Per $m = 0$ la funzione è costante e $\mathrm{Im}(f) = \{q\}$. Il grafico di una funzione lineare nel piano cartesiano è sempre una linea retta:

- $m$ è detto **coefficiente angolare** (la pendenza della retta)
- $q$ è detto **termine noto** ($q$ è l'ordinata all'origine)

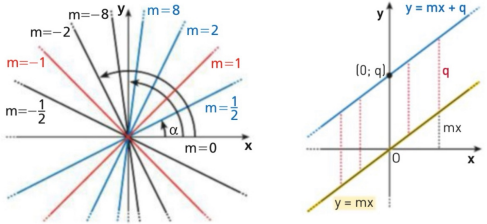



Figura: Significato di $m$ e $q$

# Grafico di una funzione lineare

Per rappresentare la funzione lineare

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = 2x + 2$$

determiniamo le coordinate di due suoi punti.

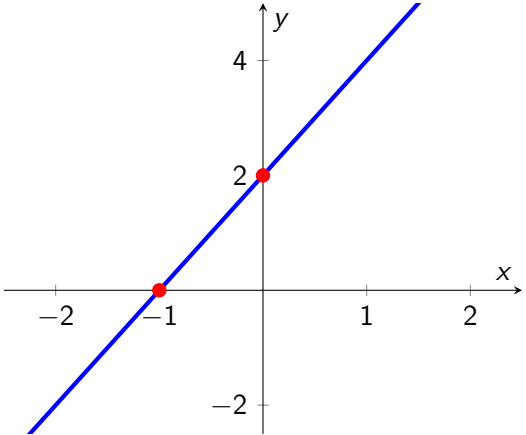
Si ha

$$f(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(0) = 2$$

quindi la retta passa per i punti di coordinate $(-1; 0)$ e $(0; 2)$.

Individuiamo i due punti nel piano cartesiano ed uniamoli per tracciare il grafico della nostra funzione.

# Grafico di $y = 2x + 2$

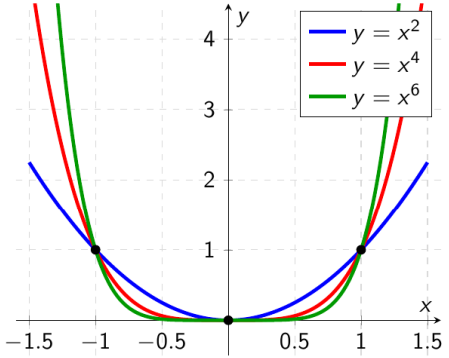


# Funzioni potenza: esponente pari

Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ pari. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = x^n$$

è detta **funzione potenza**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0; +\infty)$. Al variare di $n$ pari, graficamente si ha:

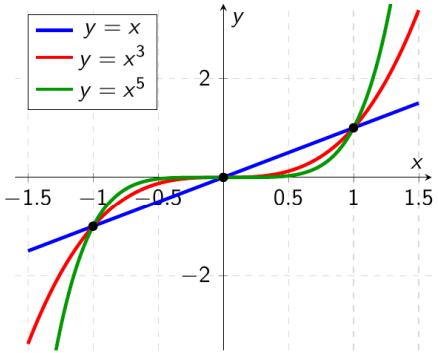


# Funzioni potenza: esponente dispari

Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ dispari. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = x^n$$

è detta, anche in questo caso, **funzione potenza**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Al variare di $n$ dispari, graficamente si ha:

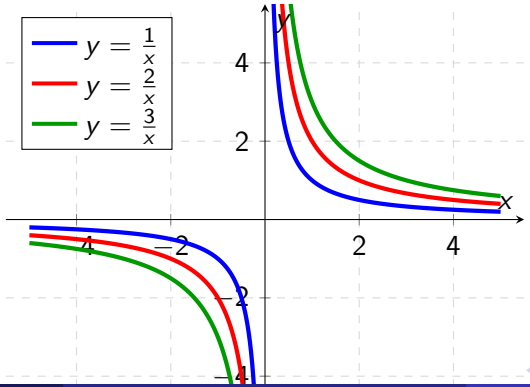


# Funzione di proporzionalità inversa: $k > 0$

Sia $k \in \mathbb{R}, k > 0$. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = \frac{k}{x}$$

è detta **funzione di proporzionalità inversa (iperbole equilatera)**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Al variare di $k$ positivo, graficamente si ha:

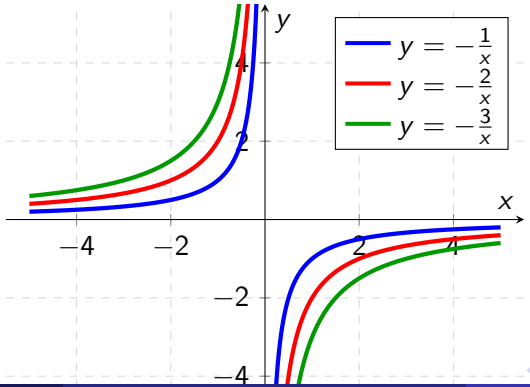


# Funzione di proporzionalità inversa: $k < 0$

Sia $k \in \mathbb{R}, k < 0$. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = \frac{k}{x}$$

è detta, anche in questo caso, **funzione di proporzionalità inversa**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Al variare di $k$ negativo, graficamente si ha:

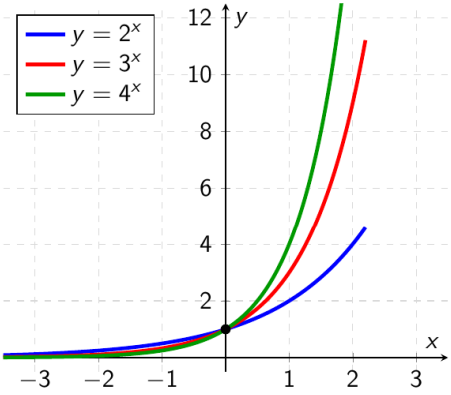


# Funzione esponenziale: base $a > 1$

Sia $a \in \mathbb{R}, a > 1$. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

è detta **funzione esponenziale**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (0; +\infty)$. Graficamente si ha:

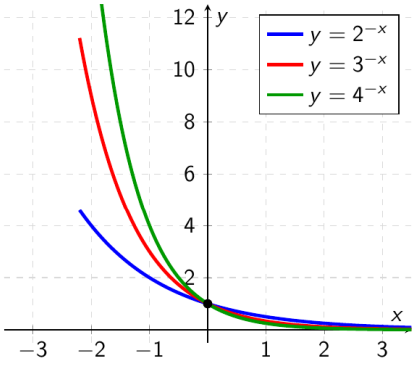


# Funzione esponenziale: base $0 < a < 1$

Sia $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

è detta, anche in questo caso, **funzione esponenziale**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (0; +\infty)$. Graficamente si ha:

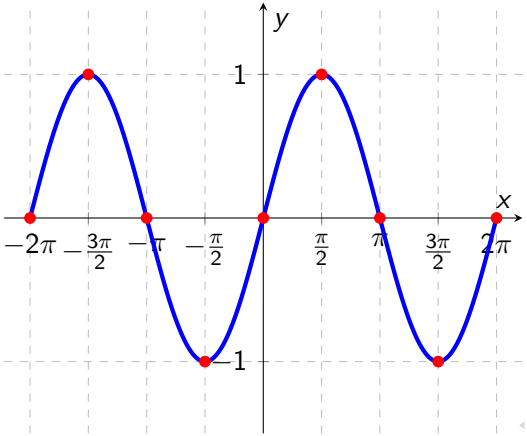


# Funzione seno

L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = \sin x$$

è detta **funzione seno**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1; 1]$. Graficamente si ha:

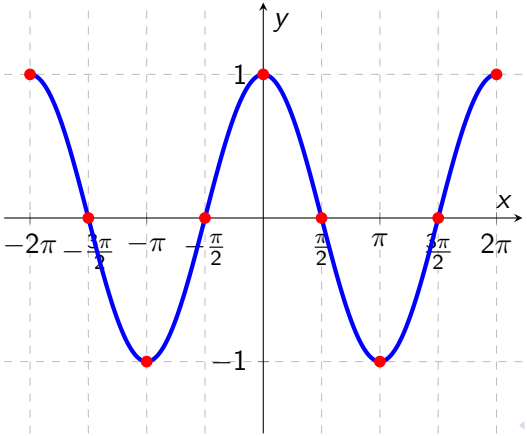


# Funzione coseno

L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

è detta **funzione coseno**. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1; 1]$. Graficamente si ha:

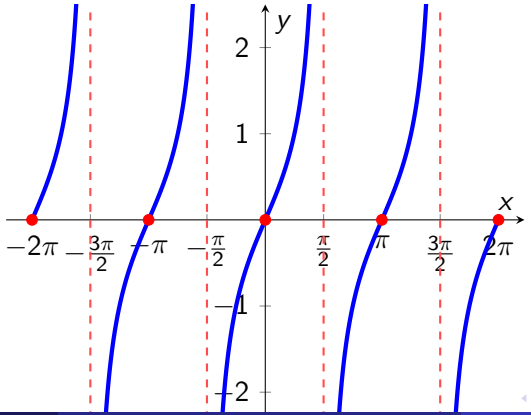


# Funzione tangente

L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = \tan x$$

è detta **funzione tangente**. $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
Graficamente si ha:



# Proprietà delle funzioni

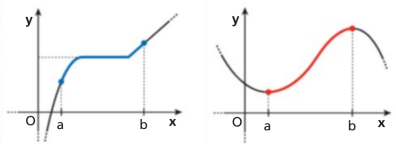
# Funzioni monotone

## Definizione

*Sia $f : D \to C$ una funzione, e $A \subseteq D$. La $f$ si dice:*

- ***crescente** in $A$ se $\forall\, x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$*
- ***strettamente crescente** in $A$ se $\forall\, x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$*
- ***decrescente** in $A$ se $\forall\, x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$*
- ***strettamente decrescente** in $A$ se $\forall\, x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$*

*La $f$ si dice **monotona** in $A$ se $f$ è crescente o decrescente in $A$; $f$ si dice **strettamente monotona** in $A$ se $f$ è strettamente crescente o strettamente decrescente in $A$.*




$f$ strettamente monotona ed $f$ monotona in $[a; b]$

# Funzione iniettiva, suriettiva

## Definizione

*Una funzione* $f : A \to B$ *si dice* ***iniettiva*** *se*

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \,:\, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

*equivalentemente se*

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \,:\, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

*La* $f$ *si dice* ***suriettiva*** *se* $Im(f) = B$ *e* ***biettiva*** *se* $f$ *è iniettiva e suriettiva.*

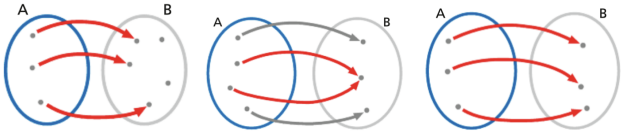



Diagramma a frecce di una funzione, rispettivamente, iniettiva, suriettiva e biettiva.

# Funzioni simmetriche, periodiche

## Definizione

*Sia $f : D \to C$ una funzione. La $f$ si dice:*

- ***pari*** *in $D$ se $\forall x \in D, -x \in D \wedge f(-x) = f(x)$. In tal caso il grafico di $f$ è simmetrico rispetto all'asse y*
- ***dispari*** *in $D$ se $\forall x \in D, -x \in D \wedge f(-x) = -f(x)$. In tal caso il grafico di $f$ è simmetrico rispetto all'origine del piano cartesiano*
- ***periodica*** *in $D$ se $\exists T \in \mathbb{R}, T > 0$ tale che $f(x + kT) = f(x), \forall x \in D, \forall k \in \mathbb{Z}$. In tal caso il grafico di $f$ si ripete di periodo in periodo*

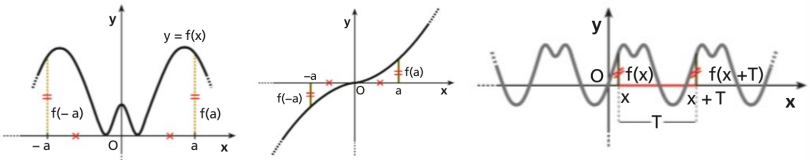


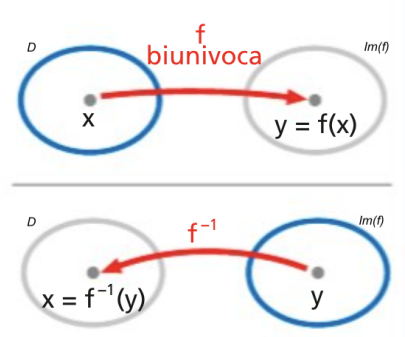

Grafico di una funzione, rispettivamente, pari, dispari e periodica.

# Funzione inversa

Se $f : D \to C$ è una funzione iniettiva, allora l'applicazione, che denotiamo ugualmente con $f$, $f : D \to \mathrm{Im}(f)$ è una corrispondenza biunivoca tra $D$ e $\mathrm{Im}(f)$. Dal momento che

$$f : D \to C \text{ è iniettiva} \quad \leftrightarrow \quad \forall y \in \mathrm{Im}(f) \quad \exists! x \in D \ : \ y = f(x)$$

resta definita una nuova funzione $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to D$, detta **funzione inversa** di $f$, che associa ad ogni $y \in \mathrm{Im}(f)$ la (unica!) soluzione $x \in D$ dell'equazione $f(x) = y$.



# Grafico di $f$ e della sua inversa $f^{-1}$

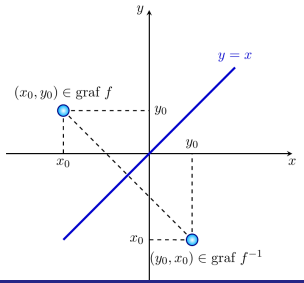
In altre parole

$$\forall (x; y) \in D \times \mathrm{Im}(f) \ : \ f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y,$$

ovvero

$$(x; y) \in \mathrm{graf}(f) \leftrightarrow (y; x) \in \mathrm{graf}(f^{-1}).$$

Quindi, per le funzioni reali di variabile reale, i punti $(x_0; y_0) \in \mathrm{graf}(f)$ e $(y_0; x_0) \in \mathrm{graf}(f^{-1})$ sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$: *Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono sempre simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.*

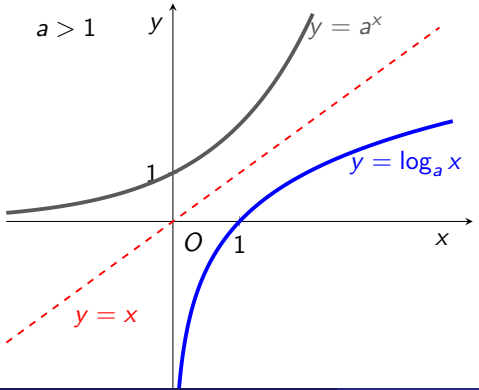


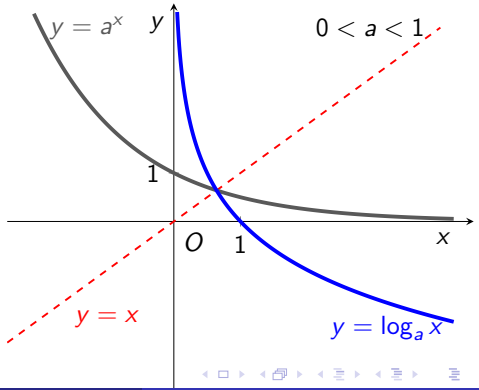
# Funzione logaritmica

Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0 \wedge a \neq 1$. L'applicazione

$$x \mapsto f(x) = \log_a x$$

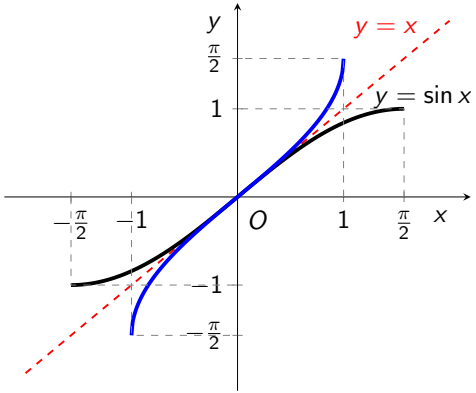
è detta **funzione logaritmica**. $\mathrm{Dom}(f) = (0; +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. La funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale, quindi graficamente si ha:

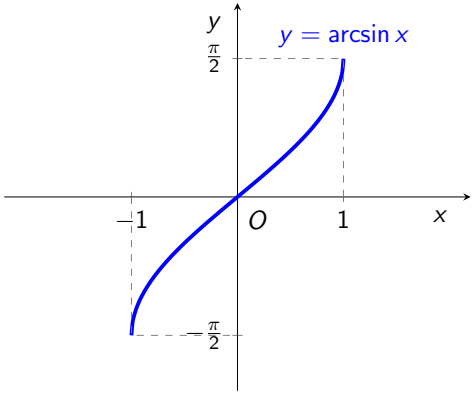


# Funzione arcoseno

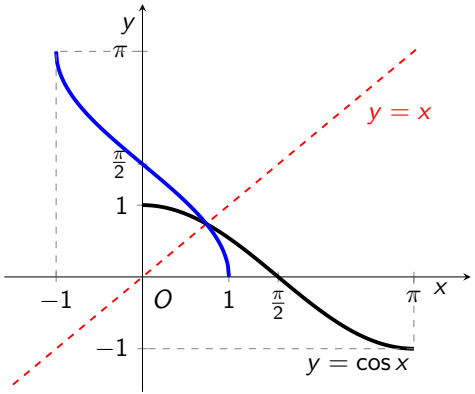
La funzione inversa di $\sin : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$, $x \mapsto \sin x$ si dice **arcoseno** e si indica con $\arcsin : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$, $x \mapsto y = \arcsin x$. Graficamente si ha:

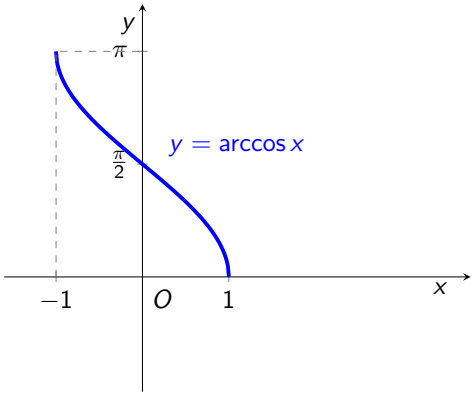


# Funzione arcocoseno

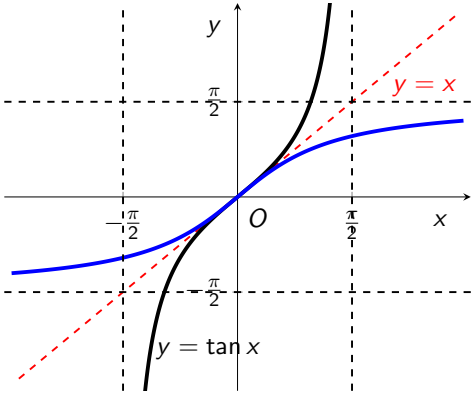
La funzione inversa di $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$, $x \mapsto \cos x$ si dice **arcocoseno** e si indica con $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$, $x \mapsto y = \arccos x$. Graficamente si ha:

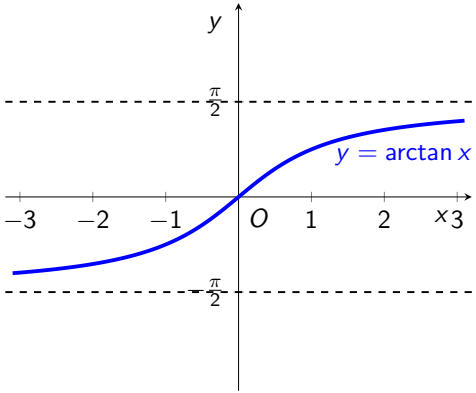


# Funzione arcotangente

La funzione inversa di $\tan : (-\pi/2; \pi/2) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ si dice **arcotangente** e si indica con $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2; \pi/2)$, $x \mapsto y = \arctan x$. Graficamente si ha:



# Classificazione delle funzioni e ricerca del dominio naturale

Una funzione è **algebrica** se l'espressione analitica $y = f(x)$ che la descrive contiene solo, per la variabile $x$, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice (un numero finito di volte).

In questo contesto, diremo che una funzione algebrica è:

- **razionale intera o polinomiale** se è espressa mediante un polinomio; in particolare se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile $x$, la funzione è **lineare**, se il polinomio in $x$ è di secondo grado, la funzione è **quadratica**;
- **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi;
- **irrazionale** se la variabile indipendente $x$ compare sotto un radicale.

Se una funzione $y = f(x)$ non è algebrica, si dice **trascendente**.

# Studio di una funzione

Per studiare le principali proprietà e per tracciare il grafico di una funzione $y = f(x)$ esaminiamo i seguenti punti.

1. *Dominio D* della funzione.
2. Eventuali *simmetrie* e/o *periodicità*.
3. Coordinate degli eventuali *punti di intersezione* del grafico della funzione *con gli assi cartesiani*.
4. *Segno della funzione*: stabiliamo gli intervalli in cui essa è positiva (ponendo $f(x) > 0$) e dove è negativa.
5. *Comportamento della funzione agli estremi del dominio*: Matematica 2
6. *Derivata prima* $f'(x)$: Matematica 2
7. *Derivata seconda* $f''(x)$: Matematica 2

# Esempio: ricerca del dominio

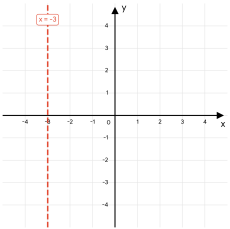
Studiamo il dominio, le simmetrie rispetto all'asse $y$ e all'origine, le intersezioni con gli assi e il segno della seguente funzione e rappresentiamo nel piano cartesiano le zone in cui si trova il grafico:

$$y = \frac{2x - 4}{3x + 9}$$

**Dominio**: $3x + 9 \neq 0 \implies x \neq -3$. Scriviamo

$$D : (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty).$$

Graficamente, disegniamo una linea verticale tratteggiata in corrisponedenza di $x = -3$.



# Esempio: intersezioni con gli assi cartesiani

Dobbiamo scoprire dove la funzione interseca l'asse $y$ e l'asse $x$. Consiste di due passaggi:

- **Intersezione con l'asse $y$**:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-4}{3x+9} \\ x = 0 \end{cases} \implies y = \frac{2(0)-4}{3(0)+9} = \frac{-4}{9} = -\frac{4}{9} \approx -0.44$$

**Punto A** $= (0\,;\, -4/9)$

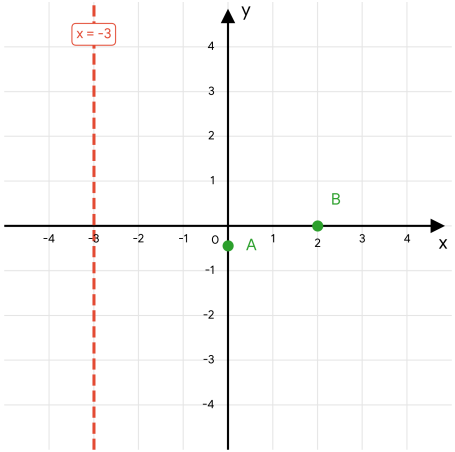
- **Intersezione con l'asse $x$**:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-4}{3x+9} \\ y = 0 \end{cases} \implies 2x-4=0 \implies 2x=4 \implies x = \frac{4}{2} = 2$$

**Punto B** $= (2\,;\, 0)$

# Esempio: intersezioni con gli assi cartesiani

Graficamente disegniamo due punti, uno sull'asse verticale e uno sull'asse orizzontale in corrispondenza delle coordinate trovate.



# Esempio: studio del segno $y > 0$

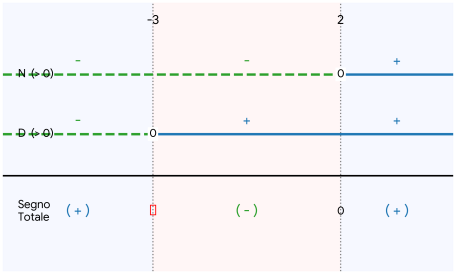
- **Numeratore** $> 0$:

$$2x - 4 > 0 \implies 2x > 4 \implies x > 2$$

- **Denominatore** $> 0$:

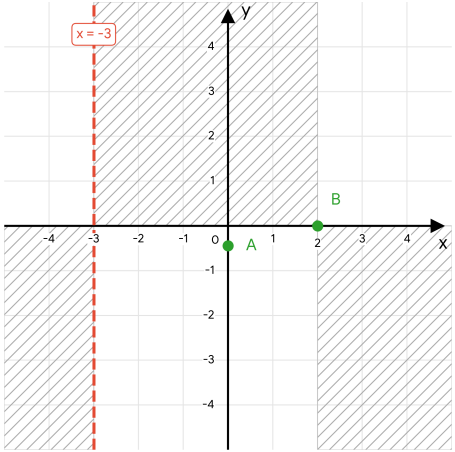
$$3x + 9 > 0 \implies 3x > -9 \implies x > -3$$

- Costruiamo la tabella dei segni (+ e -):



# Esempio: rappresentazione grafica delle zone in cui si trova il grafico

Graficamente cancelliamo le zone dove la funzione **NON** passa. Prima di $-3$ cancelliamo la parte sotto; tra $-3$ e 2 cancelliamo la parte sopra; dopo 2 cancelliamo la parte sotto:



## Esempi

Studiare il dominio, le simmetrie rispetto all'asse $y$ e all'origine, le intersezioni con gli assi e il segno delle seguenti funzioni (rappresentare nel piano cartesiano le zone in cui si trova il grafico):

- $f(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x^2 + 3}$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 3}$
- $f(x) = x^2 e^x$
- $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$
- $f(x) = x^2(1 - \ln x)$
- $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
- $f(x) = (\sin x)e^{\sin x}$ in $[0, 2\pi]$