Polinomio di Taylor

1

Polinomi di Taylor

Data una funzione f derivabile n volte in x_0, esiste uno e un solo polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ con la proprietà che

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'^{(x_0)} = f'^{(x_0)}, \quad \cdots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Tale polinomio si chiama polinomio di Taylor ed è

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomio di centro x_0 e grado n

2

Polinomi di Taylor

In forma compatta

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Polinomi di Taylor

Quando il punto è $x_0 = 0$ *otteniamo polinomio di Maclaurin*

Ossia:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

In forma compatta

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^n$$

Polinomi di Taylor

Quando si approssima $f(x)$ con $T_n(x)$ si commette un errore di approssimazione definito da:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Tale errore può essere espresso in diverse forme a seconda dell'utilizzo (es. calcolo dei limiti o stime quantitative).

Polinomi di Taylor

a) Resto di Peano

Sia f una funzione derivabile n volte nel punto x_0, ossia una funzione di classe C^n in un intorno di x_0).

$$R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Nota: *Il **Resto di Peano** ci dice che l'errore d'approssimazione è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(x - x_0)^n$.*
*Questa formulazione è lo strumento fondamentale per la **risoluzione dei limiti di forme indeterminate** mediante gli sviluppi asintotici.*

Polinomi di Taylor

b) Resto di Lagrange (Forma Integrale / Stima Quantitativa dell'Errore)

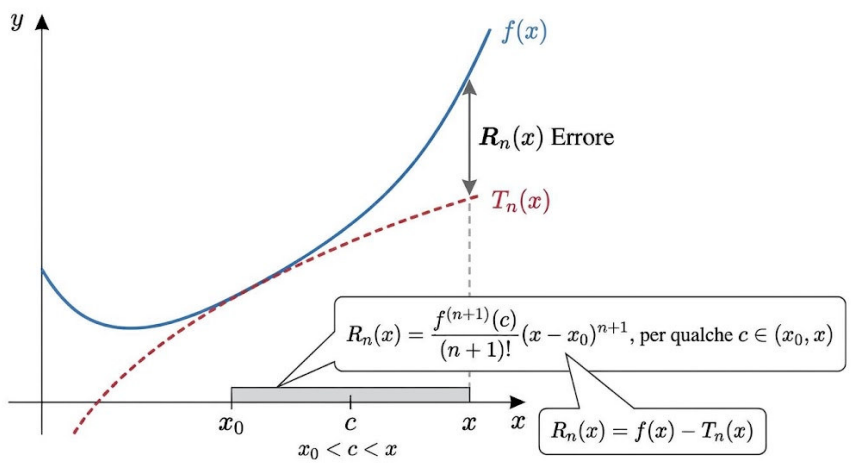
Sia f una funzione continua in un intorno chiuso di x_0, derivabile n volte in tale intorno e derivabile $n+1$ volte nell'intervallo aperto compreso tra x e x_0.

Per ogni x appartenente a tale intervallo, esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ compreso tra x e x_0 tale che l'errore $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ si esprime come:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Nota: Questa forma permette di maggiorare l'errore di approssimazione quando si conosce un limite superiore per il valore assoluto della derivata $(n+1)$-esima $|f^{(n+1)}(c)| \leq M$ nell'intervallo di interesse.

Polinomi di Taylor



Polinomi di Taylor

Esempio: Polinomi di Maclaurin per $y = sin(x)$

Sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ *(sono presenti solo potenze dispari per la disparità della funzione):*

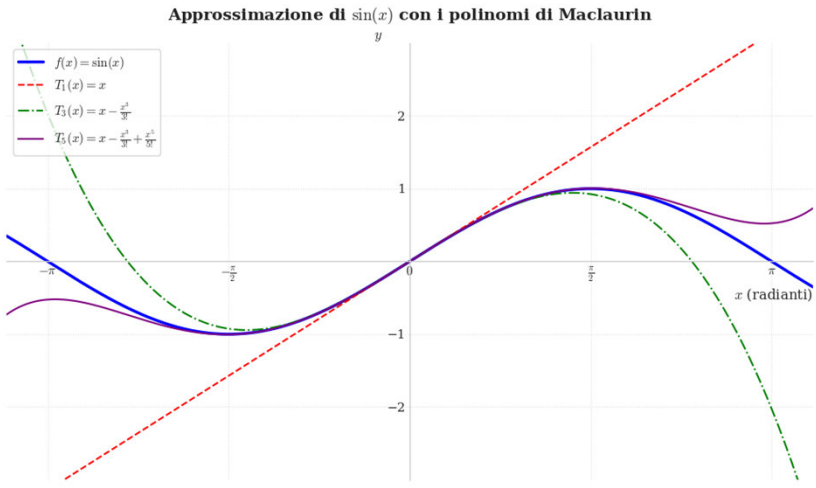
$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Primi tre polinomi di approssimazione:

- ***Grado 1:*** $T_1(x) = x$
- ***Grado 3:*** $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$
- ***Grado 5:*** $T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

9

Polinomi di Taylor



10

Polinomi di Taylor

Esempio: Polinomi di Maclaurin per $y = cos(x)$

Sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ *(sono presenti solo potenze pari per la parità della funzione):*

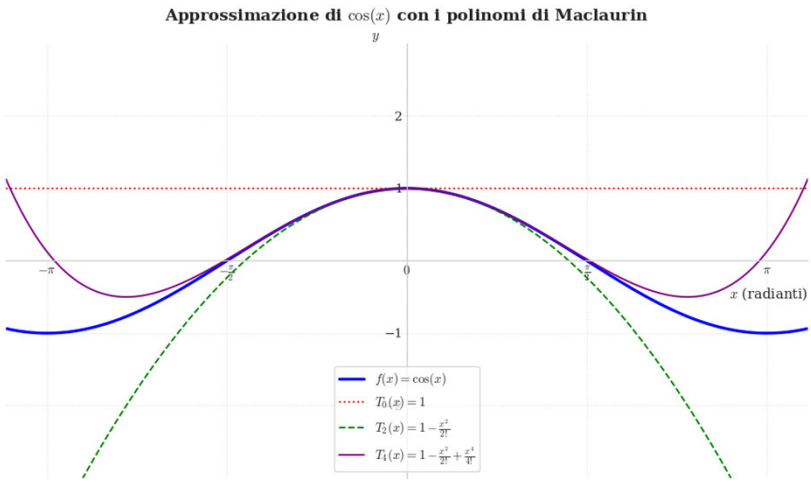
$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Primi polinomi di approssimazione:

- ***Grado 0:*** $T_0(x) = 1$
- ***Grado 2:*** $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2}$
- ***Grado 4:*** $T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

11

Polinomi di Taylor



12

Polinomi di Taylor

Analogamente in x_0=0, si ottiene

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x)$$

Polinomi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Polinomi di Taylor

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\text{con } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

15

Polinomi di Taylor

Esercizio

Scrivere il polinomio di Maclaurin di grado 2 che approssima $f(x)=\ln(1-3x)$

16

Polinomi di Taylor

Esercizio
Utilizzando la formula di Maclaurin calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$$