MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

SPESSO SI CERCANO GLI ESTREMI DI $f: A \to \mathbb{R}$, CON $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, LIMITATAMENTE AD UN SOTTOINSIEME $\Sigma \subset A$, TIPICAMENTE RAPPRESENTATO TRAMITE UN'EQUAZIONE DEL TIPO

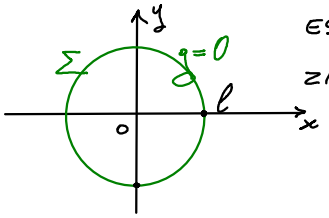
$$g(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

ESEMPIO: CERCO LA POSIZIONE DI UN PUNTO P DI MASSA m SOGGETTO ALLA FORZA PESO DOVE SIA MINIMA L'ENERGIA POTENZIALE, CON LA CONDIZIONE (VINCOLO) CHE $\overline{OP} = \ell$ (DATO).

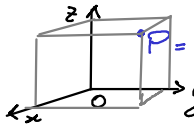
IN QUESTO CASO POSSIAMO CONSIDERARE $n = 2$ (PIANO VERTICALE), $f(x,y) = mgy$,

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - \ell^2.$$

NOTARE CHE $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, È DIFFERENZIABILE E $\nabla f = (0, mg) \neq \vec{0}$. DUNQUE f NON HA ESTREMI LIBERI. CERCHIAMO GLI ESTREMI DELLA RESTRIZIONE $f|_\Sigma$.



ESEMPIO: IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO NELLA CLASSE DEI PARALLELEPIPEDI. CONSISTE NEL TROVARE IL PARALLELEPIPEDO DI VOLUME MASSIMO A PARITÀ DI AREA. QUI $f(x,y,z) = xyz$



E $g(x,y,z) = 2(xy + yz + zx) - S$, CON S COSTANTE POSITIVA ASSEGNATA.

CERCHIAMO UNA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UN PUNTO $P \in \Sigma$ SIA ESTREMO VINCOLATO CIOÈ SODDISFI

$f(P) \geq f(x)$, OVVERO $f(P) \leq f(x)$ PER OGNI $x \in \Sigma$ (ESTREMO ASSOLUTO)

OVVERO $x \in \Sigma \cap B_\varepsilon(P)$ (RELATIVO).

IL CASO PIÙ SEMPLICE È QUELLO IN CUI Σ È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE. PER FISSARE LE IDEE, STUDIAMO IL CASO IN CUI $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ È IL GRAFICO DI UNA $z(x,y)$ DEFINITA PER $(x,y) \in \Omega$ APERTO IN $\mathbb{R}^2$.

VOGLIAMO, DUNQUE, TROVARE GLI ESTREMI DI $f(x,y,z(x,y))$ PER $(x,y) \in \Omega$.

SE ANCHE f È DIFFERENZIABILE, ALLORA LA FUNZIONE COMPOSTA LO È ANCH'ESSA. SE UN $(x_0,y_0) \in \Omega$ LA RENDE ESTREMA, ALLORA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,z(x,y))\Big|_{(x_0,y_0)} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,z(x,y))\Big|_{(x_0,y_0)} = 0 \end{cases}$$

SVOLGENDO LE DERIVATE, SI TROVA:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P)\dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P)\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(P)\dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P)\dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

PER INTERPRETARE IL SISTEMA, RICORDIAMO CHE IL PIANO TANGENTE A Σ NEL PUNTO $P = (x_0, y_0, z(x_0,y_0))$ HA EQUAZIONE

$$z = z(x_0,y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

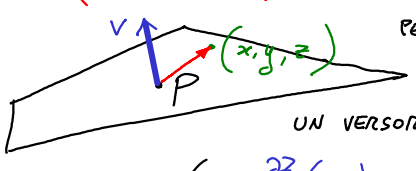
CHE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$z - z(x_0,y_0) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

CIOÈ, POSTO $z_0 = z(x_0,y_0)$

$$\left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) \cdot \left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = 0$$

CIOÈ $\left((x,y,z) - P\right) \cdot v = 0$ DUNQUE v È PERPENDICOLARE AL PIANO TANGENTE ED UN VERSORE NORMALE È DATO



DA $\dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{\left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}{\sqrt{1 + \|\nabla z\|^2}}$

IL SISTEMA TROVATO SOPRA, CHE È

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

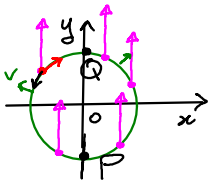
ESPRIME IL FATTO CHE $\nabla f(P)$ È PROPORZIONALE A $v = \left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ INFATTI IMPLICA CHE

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P) = -\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) = -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) \end{cases}$$

IL CHE, POSTO $\lambda = \frac{\partial f}{\partial z}(P) \in \mathbb{R}$, EQUIVALE A

$$\boxed{\nabla f(P) = \lambda v}$$

ESEMPIO: SE $f(x,y) = my$ y E $\nabla f = (0, my)$



∇f

v IN P È $\hat{j} = (0,1)$ E $\nabla f = \lambda \hat{j}$

I PUNTI NEI QUALI SI HA $\nabla f = \lambda v$ SONO P E Q.

CONSEGUENZA: SE Σ È UN INSIEME DI LIVELLO, CIOÈ $f|_\Sigma$ = COSTANTE, ALLORA TUTTI I PUNTI $P \in \Sigma$ SONO SIA MASSIMI CHE MINIMI, E LUNGO Σ RISULTA $\nabla f = \lambda(P)\, v$:

IL GRADIENTE ∇f È PERPENDICOLARE A Σ

CON QUESTA OSSERVAZIONE TORNIAMO A CONSIDERARE LA RICERCA DEGLI ESTREMI DI $f(x,y,z)$ LUNGO Σ DATO IN FORMA IMPLICITA TRAMITE

$$g(x,y,z) = 0:$$



SE f E g SONO REGOLARI, E $P \in \Sigma$ È UN ESTREMO RELATIVO, SICCOME Σ È UN INSIEME DI LIVELLO DI g, IL $\nabla g(P)$ È (SE NON NULLO) PERPENDICOLARE A Σ E SI TROVA CHE

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $P \in \Sigma$ SIA ESTREMO VINCOLATO, AMMESSO CHE $\nabla g(P) \neq \vec{0}$, È CHE ESISTA $\lambda \in \mathbb{R}$ DETTO MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE, TALE CHE

$$\boxed{\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)}$$