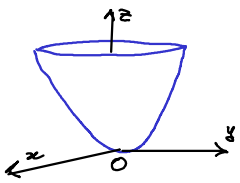
MASSIMI E MINIMI

LA COSA PIÙ IMPORTANTE DA SAPERE È LA DEFINIZIONE, LA QUALE PRESCINDE DALLE EVENTUALI PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ E DI DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.

DEFINIZIONE. DATA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, CON $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, UN PUNTO $x_0 \in A$ SI DICE PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO SE RISULTA $f(x_0) \leq f(x)$ PER OGNI $x \in A$. IN TAL CASO IL VALORE $f(x_0)$ SI DICE VALORE MINIMO E SI DENOTA CON $\min_{x \in A} f(x)$

UN PUNTO $x_0 \in A$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO SE RISULTA $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in A$. IN TAL CASO IL VALORE $f(x_0)$ SI DICE VALORE MASSIMO E SI DENOTA CON $\max_{x \in A} f(x)$.

ESEMPIO: $f(x,y) = x^2 + y^2$



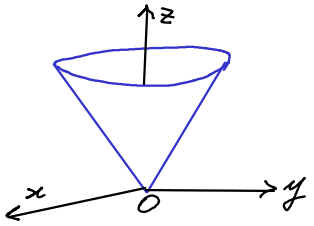
SODDISFA OVVIAMENTE $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ PER OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ QUINDI: IL PUNTO $(0,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, E POSSIAMO SCRIVERE $\min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$.

CI SONO ALTRI PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO?
NO, PERCHÉ SE $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ HO CHE

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 > 0 = f(0,0).$$

CI SONO PUNTI DI MASSIMO ASSOLUTO?
NO, PERCHÉ COMUNQUE SI PRENDA (x_0, y_0) SI PUÒ TROVARE (x,y) IN MODO TALE CHE $f(x_0, y_0) < f(x,y)$. ESERCIZIO: DEFINIRE ANALITICAMENTE UN TALE (x,y) IN FUNZIONE DI (x_0, y_0).

ESEMPIO: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ SODDISFA, OVVIAMENTE, $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ PER OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, CON UGUAGLIANZA SE E SOLO SE $(x,y) = (0,0)$. QUINDI ESISTE UNO E UN SOLO PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, CHE È $(x_0, y_0) = (0,0)$, E IL VALORE MINIMO È $\min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$. PUNTI DI MASSIMO ASSOLUTO NON CE NE SONO PERCHÉ COMUNQUE SI PRENDA (x_0, y_0) C'È UN (x,y) TALE CHE $f(x,y) > f(x_0, y_0)$. ESERCIZIO: TROVARE ANALITICAMENTE (x,y) IN FUNZIONE DI (x_0, y_0).



ATTENZIONE: « MINIMO » PUÒ SIGNIFICARE SIA « PUNTO DI MINIMO » IN $A \subset \mathbb{R}^n$ CHE « VALORE MINIMO » IN $\mathbb{R}$ A SECONDA DEL CONTESTO.

ESERCIZIO: STABILIRE SE LA FUNZIONE

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad R \in (0, +\infty),$$

AVENTE PER DOMINIO IL DISCO $x^2 + y^2 \leq R^2$, AMMETTE MASSIMO O MINIMO ASSOLUTO, E IN CASO AFFERMATIVO DETERMINARLI.

ESTREMI RELATIVI

UN PUNTO $x_0 \in A$ SI DICE PUNTO DI MINIMO RELATIVO SE ESISTE $\varepsilon \in (0, +\infty)$ TALE CHE LO STESSO x_0 È PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO PER LA FUNZIONE $f|_{A \cap B_\varepsilon(x_0)}$, CIOÈ TALE CHE $f(x_0) \leq f(x)$ PER OGNI $x \in A \cap B_\varepsilon(x_0)$.

UN PUNTO $x_0 \in A$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SE ESISTE $\varepsilon \in (0, +\infty)$ TALE CHE LO STESSO x_0 È PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO PER LA FUNZIONE $f|_{A \cap B_\varepsilon(x_0)}$, CIOÈ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in A \cap B_\varepsilon(x_0)$.

PROPOSIZIONE: SE x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO, ALLORA È ANCHE UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO.

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE $x_0 \in A$ SIA UN PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO, CIOÈ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in A$. PRENDO $\varepsilon = 1$ ED HO CHE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in A \cap B_\varepsilon(x_0)$.

OVVIAMENTE, UN DISCORSO ANALOGO VALE PER I PUNTI DI MINIMO.

FACCIAMO ENTRARE IN GIOCO IL CALCOLO DIFFERENZIALE. CIÒ RICHIEDE QUALCHE PROPRIETÀ DIFFERENZIALE DI f.

TEOREMA. SE P È UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVO, SE $P \in \mathring{A}$, E SE ESISTE $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ PER UN $i \in \{1, \dots, n\}$, ALLORA $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. PONIAMO $i = 1$ ESSENDO ANALOGHI GLI ALTRI CASI. ESSENDO

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{d}{dt} f(t, P_2, \dots, P_n)\Big|_{t = P_1}$$

E SICCOME $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ È IL VALORE MASSIMO/MINIMO DI $f(t, P_2, \dots, P_n)$, LA TESI SEGUE DAL CASO UNIDIMENSIONALE CHE È GIÀ NOTO. □

OSSERVAZIONE: SE $f(P) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in A$ ALLORA, OVVIAMENTE, RISULTA $f(P_1, \dots, P_n) \geq f(t, P_2, \dots, P_n)$ PER OGNI t TALE CHE $(t, P_2, \dots, P_n) \in A$.

ALTERNATIVAMENTE, POSSIAMO SCRIVERE

$$f(P_1, \dots, P_n) - f(t, P_2, \dots, P_n) \geq 0$$

PER OGNI t TALE CHE $(t, P_2, \dots, P_n) \in A$.

QUINDI LA FRAZIONE

$$\frac{f(P_1, \dots, P_n) - f(t, P_2, \dots, P_n)}{P_1 - t}$$

È: ≥ 0 SE $P_1 - t > 0$, ≤ 0 SE $P_1 - t < 0$.

SICCOME LA FRAZIONE AMMETTE $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)$ COME LIMITE PER $t \to P_1$, TALE LIMITE DEV'ESSERE NULLO PER LA PERMANENZA DEL SEGNO.



IL TEOREMA NON SI APPLICA SE:

1) P È SUL CONTORNO;
2) f NON È DERIVABILE.

NULLA SI PUÒ CONCLUDERE DAL TEOREMA IN TALI CASI

ESEMPI: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ HA MINIMO IN $(0,0)$ MA NON È IVI DERIVABILE.

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ HA MINIMO IN $(1,0)$ PERCHÉ $f(1,0)=0\le f(x,y)$ MA $(1,0)$ NON È INTERNO AL DOMINIO $A=\overline{B_1(0,0)}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$.

PUNTI CRITICI: I PUNTI $P\in\mathring{A}$ DOVE ESISTE ∇f E RISULTA $\nabla f=\vec{0}$ SI DICONO PUNTI CRITICI E IL TEOREMA TESTÉ DIMOSTRATO IMPLICA CHE GLI ESTREMI DI UNA f DIFFERENZIABILE, INTERNI AL DOMINIO, SONO PUNTI CRITICI.

ESEMPIO: CERCHIAMO GLI ESTREMI DELLA FUNZIONE $f(x,y)=x^2-y^2$. SI TROVA SUBITO CHE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ E $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$ PER OGNI $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. QUINDI GLI EVENTUALI ESTREMI SONO DA RICERCARSI FRA LE SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\quad\text{CIOÈ}\quad\begin{cases}2x=0\\-2y=0\end{cases}$$

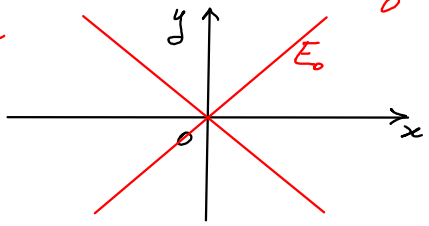
INSOMMA, C'È UN SOLO PUNTO CRITICO: $(0,0)$.

SI VEDE CHE $f(0,0)=0^2-0^2=0$.

STUDIAMO L'INSIEME DI LIVELLO $E_c=\{(x,y): f(x,y)=c\}$ LUOGO DEI PUNTI NEI QUALI

$$x^2-y^2=c.$$

SE $c=0$ L'EQUAZIONE DIVENTA $x^2=y^2$ CIOÈ $y=\pm x$



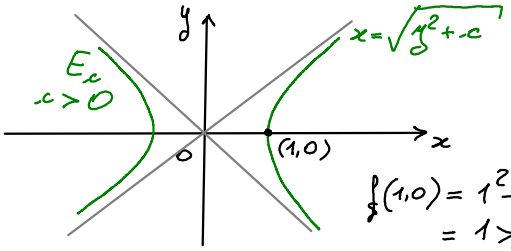
SIA $c\in(0,+\infty)$. L'INSIEME E_c È IL LUOGO DEI PUNTI (x,y) TALI CHE $x^2-y^2=c>0$ OVVERO $x^2=y^2+c$ DA CUI $|x|=\sqrt{y^2+c}$ E QUINDI $x=\pm\sqrt{y^2+c}$

LA FUNZIONE $x(y)=\sqrt{y^2+c}$, DEFINITA PER $y\in\mathbb{R}$, HA ASINTOTI OBLIQUI: SI TROVA

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{y^2+c}}{y}=1$$ (COEFFICIENTE ANGOLARE) E $q=\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y^2+c}-y\right)$

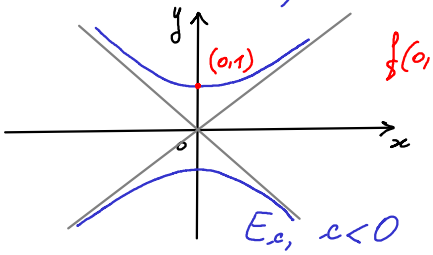
$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{c}{\sqrt{y^2+c}+y}=0$$ QUINDI

L'ASINTOTO PER $y\to+\infty$ È $x=y$. ESSENDO $x(y)=\sqrt{y^2+c}$ FUNZIONE PARI, L'ASINTOTO PER $y\to-\infty$ È $x=-y$. IN CONCLUSIONE



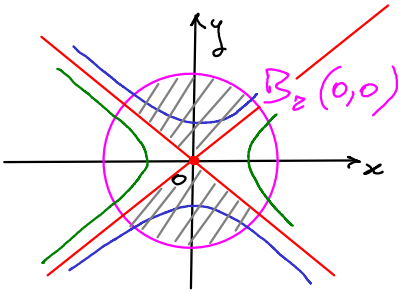
$f(1,0)=1^2-0^2=1>0$

SE, INVECE, $c\in(-\infty,0)$, SI TROVA



$f(0,1)=0^2-1^2=-1<0$

CONCLUSIONE: PER OGNI $r\in(0,+\infty)$ IL DISCO $B_r(0,0)$ CONTIENE SIA PUNTI DOVE $f(x,y)>0$ (ESEMPIO: IL PUNTO $(\frac{r}{2},0)$ DOVE $f(\frac{r}{2},0)=\frac{r^2}{4}$) SIA PUNTI DOVE $f(x,y)<0$ (ESEMPIO: IL PUNTO $(0,\frac{r}{2})$ DOVE $f(x,y)=-\frac{r^2}{4}$).



//// $f<0$

NON È SODDISFATTA LA DEFINIZIONE DI MASSIMO RELATIVO, NÉ QUELLA DI MINIMO RELATIVO.

SI RAMMENTI CHE GLI ESTREMI ASSOLUTI, SE ESISTONO, SONO ANCHE ESTREMI RELATIVI.

OSSERVAZIONE: LA FUNZIONE $f(x,y) = x^2 - y^2$ SI TRASFORMA IN $g(x',y') = C\,x'y'$ CON C OPPORTUNA E CON RIFERIMENTO AD UN SISTEMA $x'y'$ RUOTATO (DI 45°) RISPETTO AL SISTEMA xy.

TALE CIRCOSTANZA HA VALIDITÀ GENERALE: SI DIMOSTRA, INFATTI, CHE DATO UN POLINOMIO OMOGENEO DI II GRADO IN n INDETERMINATE

$$f(x) = (x_1, \dots, x_n)\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ESISTE UNA ROTAZIONE

$$(x_1, \dots, x_n) = x(x') = M\begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

DOVE M È UNA MATRICE ORTOGONALE GRAZIE ALLA QUALE SI OTTIENE $g(x') = f(x(x')) =$

$$= (x'_1, \dots, x'_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

DOVE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI DI $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$.

ESEMPIO: IL POLINOMIO xy DIVENTA $\lambda x^2 - \lambda y^2$ E LA MATRICE $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ DIVENTA $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. MA OGNI $ax^2 + 2bxy + cy^2$ SI TRASFORMA IN $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ (FORMA CANONICA).

SEMPLIFICHIAMO LA NOTAZIONE SCRIVENDO ANCORA xy ANZICHÉ $x'y'$.

PIÙ IN GENERALE, SE UNA $f(x)$ HA LA MATRICE HESSIANA $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ ESISTE UNA ROTAZIONE $x = x(x')$ TALE CHE LA $g(x') = f(x(x'))$ HA LA MATRICE HESSIANA $D^2 g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE, SE M È LA MATRICE DELLA ROTAZIONE $x = x(x')$, ALLORA LA MATRICE HESSIANA DI g È DATA DA

$$D^2 g = M^{-1}\, D^2 f\, M.$$

SUGGERIMENTO: DERIVARE LA FUNZIONE COMPOSTA $g(x') = f(x(x'))$.

APPLICAZIONE: CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN PUNTO CRITICO P INTERNO AL DOMINIO $A \subset \mathbb{R}^n$ DI UNA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ SIA UN PUNTO DI MINIMO (RISPETTIVAMENTE, MASSIMO) È CHE GLI AUTOVALORI DI $D^2 f(P)$ SIANO POSITIVI (RISPETTIVAMENTE, NEGATIVI).

ESEMPIO: $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3$ IN $\mathbb{R}^2$

HA $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3x^2$ E $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ QUINDI

I PUNTI CRITICI SONO: $(0,0)$ E $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

INOLTRE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$,

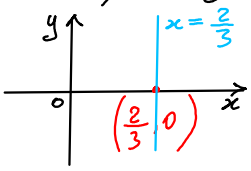
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$. MATRICE HESSIANA:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ QUINDI

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ QUINDI $(0,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO. INVECE

$$D^2 f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ IL CRITERIO NON SI PUÒ APPLICARE.

STUDIAMO ALLORA $f(x,0)$ PER x VICINO A $\frac{2}{3}$ E $f\left(\frac{2}{3}, y\right)$ PER y VICINO A ZERO



SI TROVA $f(x,0) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right) =$

$= x^2 - x^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3$

HA LA DERIVATA PRIMA $2x - 3x^2 = 0$ IN $x = \frac{2}{3}$ E LA DERIVATA SECONDA $2 - 6x = -2 < 0$ IN $x = \frac{2}{3}$ QUINDI $f(x,0) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right) < 0$ PER $x \neq \frac{2}{3}$ E VICINO A $\frac{2}{3}$ DUNQUE IL PUNTO $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ NON È UN MINIMO.

$f\left(\frac{2}{3}, y\right) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + y^2 +$

$- \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = y^2 > 0$ PER $y \neq 0$ QUINDI

IL PUNTO $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ NON È NEANCHE UN MASSIMO.

CONDIZIONE NECESSARIA DEL II ORDINE

TEOREMA: SE $P \in \mathring{A}$ È UN PUNTO CRITICO DI UNA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, CON $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, E SE ESISTE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P)$ PER UN $i \in \{1, \dots, n\}$, ALLORA SE P È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SI HA $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P) \leq 0$, SE P È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO SI HA $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P) \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE: CONSIDERIAMO $i = 1$ ESSENDO ANALOGHI GLI ALTRI CASI. PER IPOTESI, RISULTA $f(P_1, \dots, P_n) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in A \cap B_\varepsilon(P)$ OVVERO $f(P_1, \dots, P_n) \leq f(x)$. MA PER DEFINIZIONE DI $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, SI HA CHE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) = \frac{d^2}{dt^2} f(t, P_2, \dots, P_n)\Big|_{t = P_1}.$$

POSTO $x = (t, P_2, \dots, P_n)$, LE DISUGUAGLIANZE PRECEDENTI IMPLICANO CHE IL PUNTO $t = P_1$ È UN PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO PER $f(t, P_2, \dots, P_n)$ E LA TESI SEGUE DAL CASO UNIDIMENSIONALE CHE È GIÀ NOTO.

CONDIZIONE SUFFICIENTE DEL II ORDINE

TEOREMA. SE $P \in \mathring{A}$ È UN PUNTO CRITICO DI UNA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, E SE f È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN P, ALLORA: SE GLI AUTOVALORI DI $D^2 f(P)$ SONO TUTTI NEGATIVI (RISPETTIVAMENTE, POSITIVI) ALLORA P È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO (RISPETTIVAMENTE, MINIMO RELATIVO).

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE GLI AUTOVALORI DI $D^2 f(P)$ SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $\lambda_1, \dots, \lambda_m < 0$ È ANALOGA. PONIAMO $\lambda = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} > 0$.

DOPO UN'EVENTUALE ROTAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, LA MATRICE HESSIANA DIVENTA

$$D^2 f(P) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

ESSENDO f DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN P, ED ESSENDO $\nabla f(P) = \vec{0}$, PER LA FORMULA DI TAYLOR AL II ORDINE SI HA CHE

$$f(x) = f(P) + \frac{1}{2} d^2 f_P (x - P) + o(\|x - P\|^2)$$

DOVE

$$d^2 f_P (x - P) = (x_1 - P_1, \dots, x_m - P_m)\, D^2 f_P \begin{pmatrix} x_1 - P_1 \\ \dots \\ x_m - P_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - P_i)^2 \geq \lambda \sum_{i=1}^{m} (x_i - P_i)^2$$

$$= \lambda \|x - P\|^2. \quad \text{QUINDI}$$

$$f(x) \geq f(P) + \frac{1}{2} \lambda \|x - P\|^2 + o(\|x - P\|^2).$$

PER IL SIGNIFICATO DEL SIMBOLO DI LANDAU, SI HA

$$\frac{f(x) - f(P) - \frac{1}{2}\lambda \|x - P\|^2}{\|x - P\|^2} \xrightarrow[x \to P]{} 0$$

QUINDI

$$\frac{f(x) - f(P)}{\|x - P\|^2} \xrightarrow[x \to P]{} \frac{1}{2}\lambda > 0$$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (OVVERO PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE) ESISTE $\varepsilon \in (0, +\infty)$ TALE CHE

$$\frac{f(x) - f(P)}{\|x - P\|^2} > 0 \quad \text{PER } x \in A \cap B_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$$

DUNQUE PER LA REGOLA DEI SEGNI SI HA

$f(x) - f(P) \geq 0$, $x \in A \cap B_\varepsilon(P)$, CON $=$ SE E SOLO SE $x = P$ (SI DICE CHE P È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO IN SENSO STRETTO).

IL CASO PARTICOLARE $n = 2$

STABILIRE SE $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ OVVERO < 0 È PIÙ FACILE QUANDO $n = 2$ PERCHÉ:

1) $\det D^2 f$
2) $\operatorname{Tr} D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$

SONO INVARIANTI PER ROTAZIONE. QUINDI, SE $D^2 f$ DIVENTA $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, SI HA CHE

1) $\lambda_1 \lambda_2 = \det D^2 f$
2) $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

QUINDI: SE $\det D^2 f \leq 0$ NON È POSSIBILE NÉ CHE $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ E NEANCHE CHE $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ E LA CONDIZIONE SUFFICIENTE TESTÉ DIMOSTRATA NON SI PUÒ APPLICARE.

NOTA: PUÒ ESSERE CHE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ (SODDISFATTA LA CONDIZIONE NECESSARIA) MA $\det D^2 f < 0$ (NON È SODDISFATTA LA CONDIZIONE SUFFICIENTE). AD ESEMPIO: $D^2 f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. QUI, ADDIRITTURA, SI HA $\det D^2 f = -3 < 0$ E PERTANTO SI HA $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ O $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ DUNQUE IL PUNTO P È UN PUNTO DI SELLA.

IN DIMENSIONE n SI HA $\det D^2 f = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

QUINDI $\det D^2 f(P) < 0$ [CON n PARI!] IMPLICA P PUNTO DI SELLA. SE $n = 2$ LA DISUGUAGLIANZA $\det D^2 f(P) > 0$ IMPLICA CHE GLI AUTOVALORI SONO CONCORDI. SARANNO POSITIVI (RISPETTIVAMENTE, NEGATIVI) NON APPENA $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ OPPURE $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ (RISPETTIVAMENTE, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ O $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$)

NOTA: UNA $f(x,y)$ LA CUI MATRICE HESSIANA SIA $D^2 f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ SI COSTRUISCE IMMEDIATAMENTE: $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2)$ ALTRE SONO $f(x,y) + ax + by + c$.

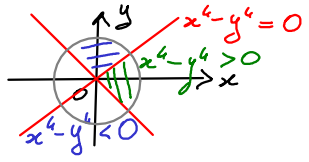
IL CASO DEGLI AUTOVALORI NULLI

SUPPONIAMO CHE GLI AUTOVALORI DI $D^2 f(P)$ SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ OPPURE $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$: LE CONDIZIONI NECESSARIE SONO SODDISFATTE, QUELLA SUFFICIENTE NO. COSA SI PUÒ DIRE DEL PUNTO P? NULLA, IL CASO SPECIFICO VA STUDIATO.

ESEMPIO: $f(x,y) = x^4 - y^4$ OPPURE $f(x,y) = x^3$. IN QUESTO SECONDO CASO SI HA CHE $\nabla f = (3x^2, 0)$ E SI ANNULLA IN $P = (0,0)$ DOVE $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

NEL PRECEDENTE CASO SI HA $\nabla f = 4(x^3, -y^3)$ IL PUNTO CRITICO È ANCORA $P = (0,0)$ E SI TROVA $D^2 f(P) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & -3y^2 \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

RICORRIAMO AGLI INSIEMI DI LIVELLO: SI HA CHE $x^4 - y^4 > 0$ QUANDO $x^4 > y^4$ CIOÈ $(x^2)^2 > (y^2)^2$ IL CHE EQUIVALE A $x^2 > y^2$ DUNQUE $|x| > |y|$



ESERCIZIO: IDEM CON $f(x,y) = x^3$

ESEMPIO: LA $f(x,y) = x^4 + y^4$ HA BANALMENTE (PERCHÉ ?) UN MINIMO NELL'ORIGINE, DOVE PERÒ $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.