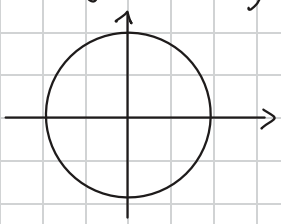
LEZIONE 03-11-2026

AVVISO: Domani 1° tutoreggio (16:30 aula gamma).



Svolgimento esercizi:

1) Tabella degli angoli:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{0}$ N.D.	$\frac{0}{-1}=0$	$\frac{-1}{0}$ N.D.	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

(quando $\cos\alpha\neq 0$)

$$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) Risoluzione di eq. goniometriche:

a. $2\cos^2 x-\cos x=0$

b. $2\operatorname{sen}^2 x-\sqrt{3}=0$

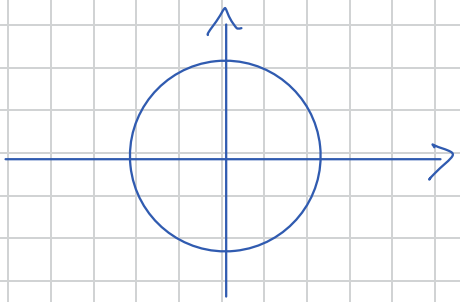
a. $2\cos^2 x-\cos x=0$ posso scomporla come

$$\underbrace{\cos x}_{F_1}\cdot\underbrace{(2\cos x-1)}_{F_2}=0$$

$\Longrightarrow$ legge di annullamento del prodotto

$\cos x=0$ $(F_1=0)$ $\vee$ $2\cos x-1=0$ $(F_2=0)$;

i) $\cos x = 0$



Quale angolo ha coseno zero?

... Tali angoli sono

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3}{2}\pi$.

Quindi le soluzioni saranno:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$$

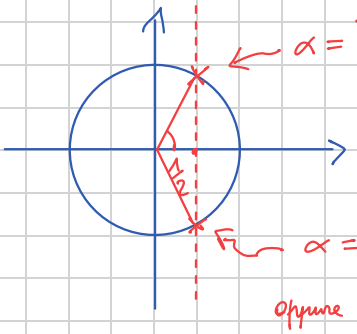
Ciò poteva essere scritto come un'unica soluzione:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

ii) $2\cos x - 1 = 0$;

$2\cos x = 1$;

$\cos x = \frac{1}{2}$.



oppure (stessa cosa)

$\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

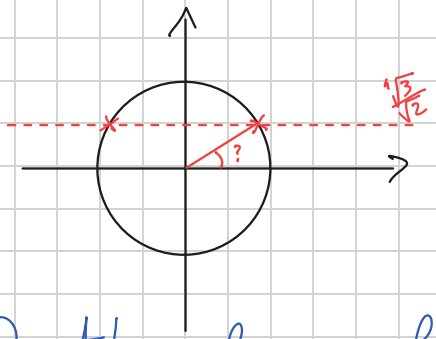
Le soluzioni sono allora:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

b. $2\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3} = 0$;

$2\operatorname{sen}^2 x = \sqrt{3}$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$



Ossia le soluzioni vanno cercate tra gli angoli che soddisfano

$$\operatorname{sen} x = +\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$$

Quest'angolo non ha una espressione nota, e scriveremo

$$x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} + 2\pi k \quad \vee \quad x = \underbrace{\pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}}_{(*)} + 2\pi k$$

3) c. $2\operatorname{sen} x + \sqrt{2} > 0$

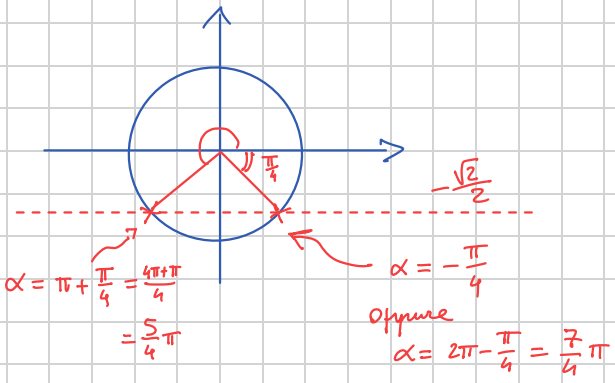
d. $2\cos x + \sqrt{3} \geq 0$

Per le disequazioni goniometriche, si procede col metodo grafico trovando un intervallo di angoli che le soddisfa.

c. $2\operatorname{sen} x + \sqrt{2} > 0$;

$2\operatorname{sen} x > -\sqrt{2}$;

$\operatorname{sen} x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Gli angoli che hanno seno UGUALE a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ e $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Quelli che hanno seno MAGGIORE di $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$$

« compresi »

(equivalentemente, $0 + 2\pi k \leq x < \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$

$\vee \quad \frac{7}{4}\pi + 2\pi k < x \leq 2\pi + 2\pi k$)

Studio di funzione: sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione su un dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. "Studiare f" significa trovarne il grafico e rappresentarlo. Per fare ciò, le prime cose che siamo ora in grado di fare sono:

1) determinarne il dominio D;

2) trovare le (eventuali) intersezioni con gli assi x e y;

3) studiare il segno di f.

Nella pratica:

1) già visto;
2) le intersezioni con l'asse x si ottengono imponendo $y=0$. Quella con l'asse y si ottiene ponendo $x=0$ (quando fattibile col dominio).
3) stabiliamo quando il grafico di $y=f(x)$ sta sopra l'asse x (per $f(x)>0$) e quando sotto (per $f(x)<0$).

Esempi:

1) $y = x^3 - 4x$

Poiché $y=f(x)$ ha espressione polinomiale, non ci sono C.E. $\longrightarrow$ **$D = \mathbb{R}$**.

Intersezioni:

i) asse x: imponiamo $y=0$ ottenendo $0 = x^3 - 4x$; risolviamo e vediamo le soluzioni

$$x^3 - 4x = 0 \xrightarrow{\text{scompongo}} x(x^2-4) = 0 \xrightarrow{\text{scompongo}} x(x-2)(x+2) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto si ha

$$x = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow A = (0,0)$$
$$x-2 = 0 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow B = (2,0)$$
$$x+2 = 0 \longrightarrow x = -2 \longrightarrow C = (-2,0)$$

ii) asse y: imponiamo $x=0$ ottenendo $y = 0^3 - 4\cdot 0 = 0$ ossia il punto $A=(0,0)$

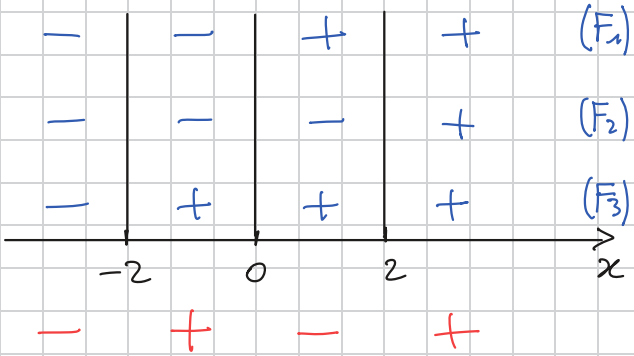
Segno Cerchiamo quando $f(x)>0$, ossia $x^3 - 4x > 0$;

$\underbrace{x}_{F_1}\underbrace{(x-2)}_{F_2}\underbrace{(x+2)}_{F_3} > 0$ $\longrightarrow$ studio dei segni

F_1: $x > 0$

F_2: $x - 2 > 0 \rightsquigarrow x > 2$

F_3: $x + 2 > 0 \rightsquigarrow x > -2$



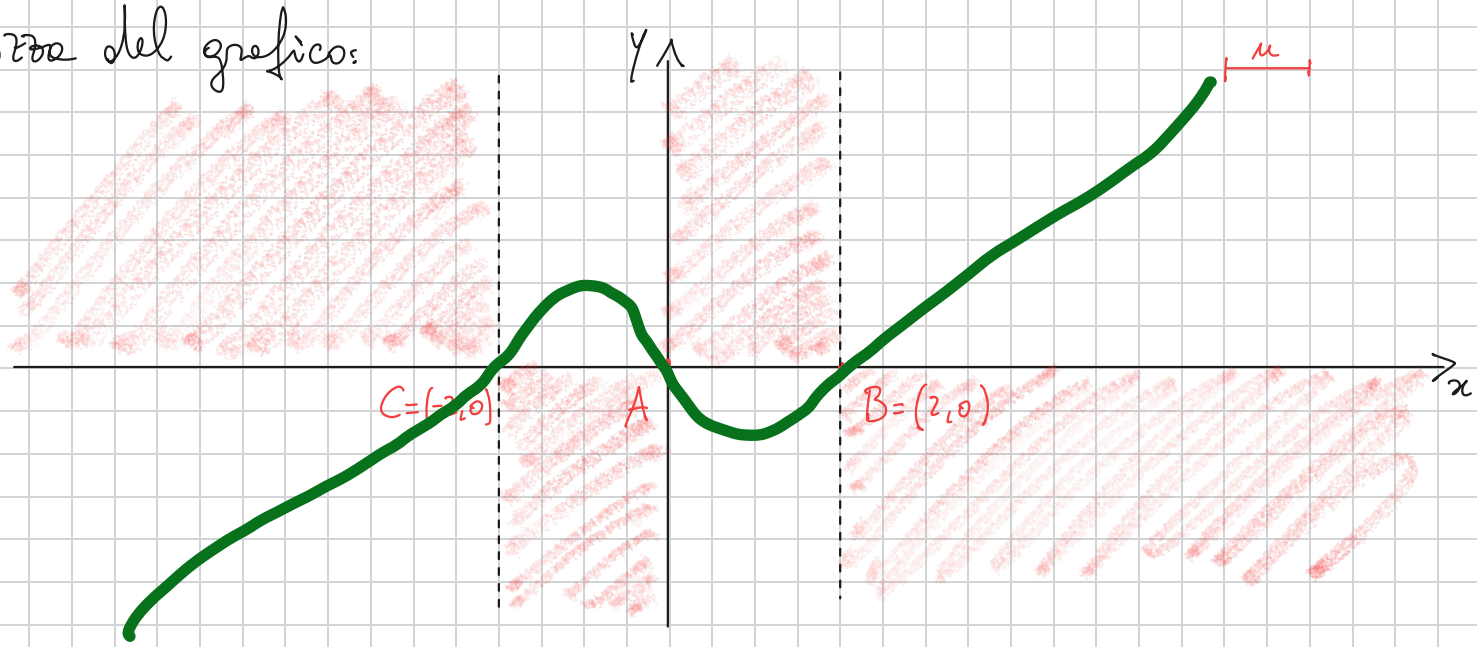
$\Rightarrow f(x) > 0$ quando

$-2 < x < 0 \quad \vee \quad x > 2$.

$f(x) < 0$ quando

$x < -2 \quad \vee \quad 0 < x < 2$.

Bozza del grafico:



2) $y = \dfrac{x-1}{x^2+3x}$

È fratta, quindi C.E: $x^2 + 3x \neq 0$

$x^2 + 3x \neq 0$

$x(x+3) \neq 0 \rightsquigarrow$ $x \neq 0$, $x \neq -3$

$D = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \ x \neq -3 \}$

Intersezioni:

i) asse x $\rightsquigarrow$ impongo $y = 0$ ottenendo $0 = \dfrac{x-1}{x^2+3x}$, che ha soluzioni $x - 1 = 0$, ossia $x = 1 \longrightarrow M = (1, 0)$

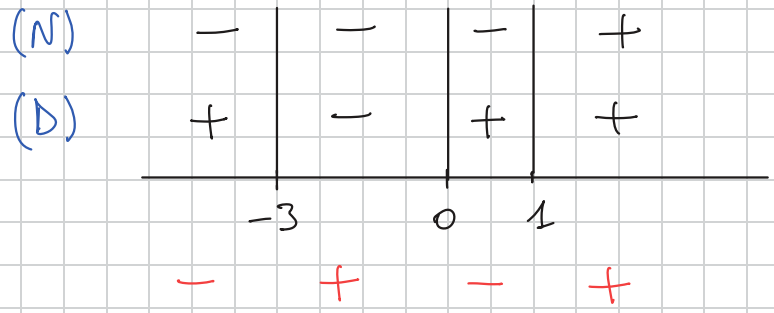
ii) asse y $\rightsquigarrow$ bisognerebbe imporre $x = 0$, ma ciò non si può fare perché il dominio non lo permette.

Segno: $f(x) > 0$ quando

$$\frac{x-1}{x^2+3x} > 0$$

N: $x - 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1$

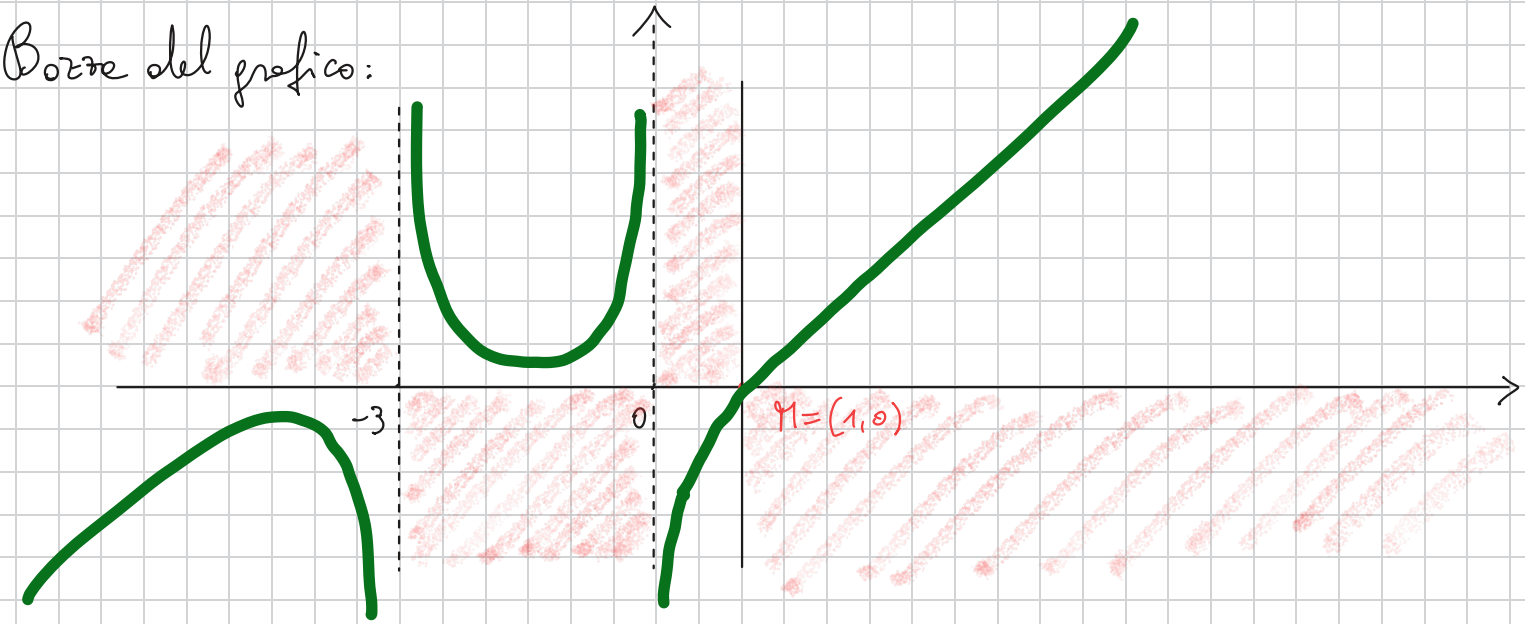
D: $x^2 + 3x > 0 \longrightarrow x < -3 \vee x > 0$



$\Rightarrow$ $f(x) > 0$ per $-3 < x < 0 \vee x > 1$

$f(x) < 0$ per $x < -3 \vee 0 < x < 1$

Bozze del grafico:



Esercizio: studiare $y = \dfrac{x+2}{x^2-2x-8}$.