Esercizi di laboratorio

Programmazione lineare con Python e gurobipy

Per ogni esercizio costruire il modello con variabili **continue**, cicli `for`, `quicksum` e `addConstrs` o `addConstr`. Controllare lo stato prima di leggere la soluzione; stampare obiettivo e variabili, verificare i vincoli e interpretare i risultati.

Esercizio 1 Il problema della dieta

Si deve scegliere una combinazione di sei alimenti a costo minimo. Una porzione corrisponde a **100 g** di alimento; sono ammesse porzioni frazionarie. I valori nutrizionali della tabella sono assegnati per questo esercizio.

Dati per porzione e limiti complessivi

Dato	R	L	P	Y	V	B	Min	Max
Energia (kcal)	130	110	165	60	35	250	1800	2300
Proteine (g)	2,5	8	30	4	2	8	70	130
Fibre (g)	0,4	7	0	0	3	4	25	45
Sodio (mg)	1	5	70	50	20	450	0	1800
Costo (euro)	0,20	0,35	1,10	0,45	0,30	0,50	—	—
Porzioni massime	4	4	3	5	6	4	—	—

R: riso; L: lenticchie; P: pollo; Y: yogurt; V: verdure; B: pane.

Formulazione. Sia x_j il numero di porzioni dell'alimento j. Siano a_{kj} il contenuto del nutriente k, c_j il costo, m_j il massimo numero di porzioni e ℓ_k, u_k i limiti nutrizionali. Con $J = \{1, \dots, 6\}$ e $K = \{1, \dots, 4\}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \ell_k \le \sum_{j \in J} a_{kj} x_j \le u_k \quad k \in K, \\ & 0 \le x_j \le m_j \qquad\qquad j \in J. \end{aligned}$$

Il limite inferiore sul sodio è zero. I vincoli inferiori e superiori vanno inseriti separatamente nel modello.

Consegne

1. Implementare il problema e stampare costo, porzioni e grammi di ciascun alimento. Individuare gli alimenti non utilizzati.
2. Calcolare il contenuto totale dei quattro nutrienti e indicare quali limiti nutrizionali e limiti sulle porzioni sono attivi.
3. Ridurre il massimo di porzioni di pane da 4 a 2 e risolvere nuovamente. Confrontare piano e costo, controllando prima lo stato.

Esercizio 2 Il problema del trasporto

Tre depositi devono rifornire quattro clienti di un prodotto sfuso. Le quantità sono misurate in **tonnellate** e possono essere frazionarie. Ogni cliente deve ricevere esattamente la quantità richiesta. Le spedizioni non possono superare le disponibilità dei depositi.

Dati. La parte centrale della tabella riporta i costi di trasporto in euro per tonnellata. Offerte e domande sono in tonnellate.

Deposito	C1	C2	C3	C4	Offerta
D1	4	6	9	5	35
D2	5	4	7	6	50
D3	8	5	3	4	40
Domanda	30	25	40	30	

Sono consentite tutte le dodici rotte deposito–cliente.

Formulazione. Sia x_{ij} la quantità spedita dal deposito i al cliente j, c_{ij} il costo unitario, s_i l'offerta e d_j la domanda. Con $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq s_i \qquad i \in I, \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} = d_j \qquad j \in J, \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad\quad i \in I,\ j \in J.
\end{aligned}
$$

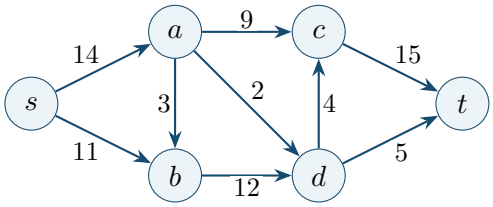
La somma delle offerte è uguale alla somma delle domande. Le disuguaglianze sulle offerte esprimono comunque disponibilità massime.

Consegne

1. Creare variabili con due indici e le due famiglie di vincoli. Si può usare `addVars(I, J, lb=0.0)` e accedere alle variabili con `x[i, j]`.
2. Stampare il piano come matrice 3×4 e il costo totale. Verificare le somme per riga e per colonna.
3. Sostituire, per almeno una famiglia, i cicli con `addConstrs` e verificare che il valore ottimo non cambi.
4. Portare la domanda di C4 da 30 a 40, mantenendo le offerte originarie. Prevedere l'effetto sull'ammissibilità e verificare lo stato restituito dal risolutore.

Esercizio 3 Il problema del flusso massimo

Una rete trasporta un liquido dalla sorgente s al pozzo t. Ogni arco è orientato e ha una capacità in $\mathbf{m^3/h}$. Si vuole massimizzare la portata complessiva trasferita.



Origine	Destinazione	Capacità
s	a	14
s	b	11
a	b	3
a	c	9
a	d	2
b	d	12
d	c	4
c	t	15
d	t	5

Formulazione. Siano $N = \{s, a, b, c, d, t\}$ ed E l'insieme degli archi in tabella, con capacità u_{ij}. La variabile f_{ij} è la portata sull'arco (i, j); F è la portata totale. Tutte le portate sono continue.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & F \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j:(v,j)\in E} f_{vj} - \sum_{i:(i,v)\in E} f_{iv} = \begin{cases} F & v = s, \\ -F & v = t, \\ 0 & v \in N \setminus \{s, t\}, \end{cases} \\
& 0 \le f_{ij} \le u_{ij} \qquad\qquad (i, j) \in E, \\
& F \ge 0.
\end{aligned}
$$

La prima somma raccoglie gli archi uscenti e la seconda gli entranti. Nei nodi intermedi il flusso non si crea e non si accumula.

Consegne

1. Definire una variabile per ciascun arco presente e una per F. Implementare i bilanci dei nodi e i vincoli di capacità.
2. Stampare F, le portate sui nove archi e le capacità residue. Controllare numericamente i bilanci dei quattro nodi intermedi.
3. Portare la capacità di (c, t) da 15 a 20 e discutere se la portata massima aumenta.

Esercizio 4 Il problema della miscelazione

Un'impresa deve ottenere esattamente **1 000 kg** di una lega, mescolando quattro leghe di partenza. Le quantità possono essere frazionarie e la miscelazione non comporta perdite di massa. Si vuole minimizzare il costo di acquisto dei componenti.

Dati dei componenti

Componente	Costo euro/kg	Disp. kg	Rame %	Stagno %	Piombo %
Lega A	5,50	400	80	10	1
Lega B	4,00	500	50	20	2
Lega C	4,80	600	65	5	1
Lega D	3,00	400	40	5	8

La parte rimanente di ciascun componente è costituita da altri metalli, per i quali non sono imposti limiti.

Requisiti sulla miscela finale

Elemento	Minimo	Massimo
Rame	60%	70%
Stagno	8%	12%
Piombo	0%	3%

Formulazione. Sia x_j la quantità in kg della lega j; c_j il costo, d_j la disponibilità e p_{kj} la frazione in massa dell'elemento k. Siano $Q = 1000$, ℓ_k e u_k le frazioni minime e massime richieste. Con $J = \{A, B, C, D\}$ e $K = \{\text{rame, stagno, piombo}\}$:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} x_j = Q, \\
& Q\ell_k \le \sum_{j \in J} p_{kj} x_j \le Q u_k \quad k \in K, \\
& 0 \le x_j \le d_j \qquad\qquad\quad j \in J.
\end{aligned}
$$

Nel codice usare le frazioni: per esempio 80% diventa `0.80`. Il modello è lineare perché la massa totale Q è un dato costante.

Consegne

1. Implementare il modello e stampare i kg acquistati e il costo totale.
2. Calcolare le tre percentuali effettive della miscela e verificare tutti i requisiti. Individuare i vincoli attivi.
3. Ridurre la disponibilità della lega A da 400 a 200 kg, mantenendo gli altri dati. Verificare lo stato e, se ottimo, confrontare il costo.

Esercizio 5 Produzione e magazzino su più periodi

Un'impresa deve soddisfare la domanda di un prodotto sfuso in sei periodi. Può produrre in anticipo e conservare il prodotto. Non sono ammesse consegne in ritardo. Le quantità sono in **kg** e possono essere frazionarie.

Dati per periodo

Dato / periodo	1	2	3	4	5	6
Domanda d_t (kg)	40	60	50	70	40	60
Capacità U_t (kg)	70	65	55	80	60	70
Produzione c_t (euro/kg)	4	6	5	7	4	6
Deposito h_t (euro/kg)	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
Magazzino $\bar{s}_t$ (kg)	50	50	50	50	50	50

Il costo di deposito h_t si applica a ogni kg rimasto alla fine del periodo t. La scorta iniziale è **20 kg**; alla fine del sesto periodo devono rimanere **esattamente 10 kg**.

Formulazione. Siano x_t la produzione nel periodo t e s_t la scorta alla fine dello stesso periodo. I dati sono domanda d_t, capacità U_t, costo di produzione c_t, costo di deposito h_t e capacità del magazzino $\bar{s}_t$. La scorta $s_0 = 20$ è un dato.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{6} (c_t x_t + h_t s_t) \\
\text{s.t.} \quad & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t && t = 1, \dots, 6, \\
& 0 \le x_t \le U_t && t = 1, \dots, 6, \\
& 0 \le s_t \le \bar{s}_t && t = 1, \dots, 6, \\
& s_6 = 10.
\end{aligned}
$$

I bilanci collegano periodi consecutivi. La non negatività delle scorte impedisce di usare produzione futura per soddisfare domanda passata.

Consegne

1. Costruire i bilanci con un ciclo o `addConstrs`. Nel primo bilancio usare la scorta iniziale nota; dal secondo in poi usare la variabile di scorta del periodo precedente.
2. Stampare, per ogni periodo, domanda, produzione e scorta finale. Separare il costo totale di produzione da quello di deposito.
3. Verificare che la produzione totale sia uguale alla domanda totale meno la scorta iniziale più la scorta finale.
4. Portare il costo di produzione del periodo 2 da 6 a 6,5 euro/kg. Confrontare piano e costo con quelli originari.