Modulo 4: Matrici

Francesco Cannas Aghedu

Matematica 1 - A.A. 2026/2027

Definizione

Definizione

Chiamiamo ***matrice*** *di ordine $m \times n$ una tabella di elementi disposti ordinatamente in m righe e n colonne.*

Di solito le matrici si indicano con una lettera maiuscola e vengono scritte nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

I pedici hanno un significato preciso: il primo e il secondo numero indicano, rispettivamente, la riga e la colonna in cui l'elemento è posizionato. Gli $m \times n$ elementi di una matrice, che generalmente sono numeri, sono detti **entrate della matrice**. L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad *entrate reali* è denotato con il simbolo:

$$M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Notazioni

- Una matrice può essere scritta utilizzando sia parentesi tonde che quadre:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Con la notazione

$$a_{ij}$$

  indichiamo l'elemento della matrice A che corrisponde all'incrocio tra la riga i-esima e la colonna j-esima. i è detto **indice di riga** e j **indice di colonna**.
- Indichiamo con A_i la **riga** i-esima e con A^j la **colonna** j-esima:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \qquad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Esempio

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -6/7 \end{pmatrix}$$

ha 2 righe e 3 colonne ed è a coefficienti reali, cioè $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. I suoi elementi sono

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 3, \quad a_{13} = 1, \quad a_{21} = \sqrt{2}, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -6/7.$$

Le sue colonne sono

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6/7 \end{pmatrix};$$

le sue righe sono

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -6/7 \end{pmatrix}.$$

Sottomatrice complementare

Definizione

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice che si ottiene cancellando la riga i e la colonna j di A si chiama ***sottomatrice complementare*** *(i,j) di A e si indica con $A_{ij} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$.*

Ad esempio, sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

e così via.

Tipi di matrici

- Se $m = n$ (cioè se il numero di righe coincide con il numero di colonne) la matrice si dice **quadrata**. L'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n è denotato con $M_n(\mathbb{R})$
- Se $m \neq n$ (cioè se il numero di righe è diverso dal numero di colonne) la matrice si dice **rettangolare**

matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice quadrata

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii}, $(i = 1, \ldots, n)$ costituiscono la **diagonale principale**

Tipi di matrici

- Una matrice di ordine $1 \times n$ è chiamata **vettore riga** e viene generalmente indicata con una lettera minuscola

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1,6}(\mathbb{R})$$

- Una matrice di ordine $m \times 1$ è chiamata **vettore colonna** e viene generalmente indicata con una lettera minuscola

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{6,1}(\mathbb{R})$$

Tipi di matrici

- Una matrice quadrata si dice **diagonale** quando tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

- Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore** (risp. **inferiore**) quando tutti gli elementi al di sotto (risp. sopra) della diagonale principale sono nulli. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -7 & 8 & 5 & 0 \\ -5 & 9 & 21 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

In tutti e tre i casi, gli elementi della diagonale principale possono essere sia nulli sia non nulli.

Matrice identità

Definizione

*La matrice **identità** (o matrice unità) I_n di ordine n ha gli elementi della diagonale principale tutti uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0.*

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

Trasposta di una matrice

Definizione

*Data la matrice A, la **matrice trasposta** A^T di A si ottiene scambiando ordinatamente le righe della matrice iniziale con le sue colonne.*

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \quad \longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R}) \quad \longrightarrow \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & e^2 \end{pmatrix} \in M_{4,2}(\mathbb{R})$$

Operazioni con le matrici: somma e differenza

- Due matrici A e B vengono dette dello **stesso tipo** quando hanno lo stesso numero m di righe e n di colonne; gli elementi che occupano lo stesso posto si dicono **elementi corrispondenti**.
- Due matrici sono **opposte** se gli elementi corrispondenti sono opposti.

Definizione

*La **somma** di due matrici dello stesso tipo è una matrice i cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti delle matrici.*

*La **differenza** di due matrici dello stesso tipo è la somma della prima matrice con l'opposta della seconda.*

Non è possibile sommare due matrici che non siano dello stesso tipo.

Esempio

Eseguiamo la somma $A + B$ e la differenza $A - B$ delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La **somma** $A + B$ si ottiene sommando gli elementi che si trovano nella stessa posizione:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 + (-2) & 2 + 0 & 1 + 1 \\ -1 + \sqrt{2} & 1 + 0 & 1 + 1 \\ 3 + 1 & -2 + 2 & 1 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \sqrt{2} - 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La **differenza** $A - B$ si ottiene sottraendo gli elementi che si trovano nella stessa posizione:

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 - (-2) & 2 - 0 & 1 - 1 \\ -1 - \sqrt{2} & 1 - 0 & 1 - 1 \\ 3 - 1 & -2 - 2 & 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Operazioni con le matrici: moltiplicazione per uno scalare

Definizione

*Il **prodotto di una matrice per uno scalare** $k \in \mathbb{R}$ è una matrice dello stesso tipo con gli elementi della matrice iniziale moltiplicati per k.*

Dati:

$$k = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

il prodotto $k \cdot A$ si esegue moltiplicando ogni singolo elemento di A per k:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 7 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcoliamo $2A - 3B$. Calcoliamo dapprima le matrici rispettivamente moltiplicate per gli scalari 2 e 3:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 3B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 9 & -3 & 12 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo ora la sottrazione elemento per elemento per ottenere il risultato di $2A - 3B$:

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 4-3 & -2-0 & 6-(-6) \\ 0-9 & 8-(-3) & 2-12 \\ -4-0 & 2-6 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 \\ -9 & 11 & -10 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Operazioni con le matrici: prodotto di matrici

Definizione

Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ due matrici ad entrate reali di ordine, rispettivamente, $m \times n$ e $n \times p$. Si definisce il ***prodotto matriciale*** *di A per B la matrice $C = AB$ ad entrate reali di ordine $m \times p$ i cui elementi c_{ij} sono dati da:*

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

per ogni valore di riga i e di colonna j. Due matrici possono essere moltiplicate fra loro solo se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.

L'elemento c_{ij} si ottiene come prodotto scalare tra la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B. In pratica: per trovare il valore nella riga i e colonna j della matrice finale, prendi la riga i della prima matrice e la colonna j della seconda matrice. Moltiplica tra loro i numeri corrispondenti e somma i risultati (**moltiplicazione riga per colonna**).

Esempio

Eseguiamo il prodotto AB delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B, il prodotto è fattibile e darà come risultato una matrice C di ordine 3×2. Sviluppiamo i passaggi del prodotto riga per colonna:

$$AB = \begin{pmatrix} (3 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 3) + (1 \cdot (-1)) & (3 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) + (1 \cdot (-2)) \\ (0 \cdot 2) + (7 \cdot 1) + (2 \cdot 3) + (0 \cdot (-1)) & (0 \cdot 0) + (7 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (0 \cdot (-2)) \\ (1 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (-2 \cdot 3) + (0 \cdot (-1)) & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (-2 \cdot 1) + (0 \cdot (-2)) \end{pmatrix}$$

Esempio

Semplificando le somme parziali si trova

$$AB = \begin{pmatrix} 6+1-3-1 & 0+1-1-2 \\ 0+7+6+0 & 0+7+2+0 \\ 2+1-6+0 & 0+1-2+0 \end{pmatrix}$$

Il risultato finale è quindi la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 13 & 9 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

Proprietà (si assumono sempre dimensioni compatibili)

- La moltiplicazione fra matrici è generalmente non commutativa: $AB \neq BA$.
- La moltiplicazione fra matrici è distributiva rispetto alla somma. In altre parole:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{e} \qquad (A+B)C = AC + BC$$

- Per ogni scalare k vale: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- La moltiplicazione fra matrici è associativa: $A(BC) = (AB)C$
- L'elemento neutro per l'operazione di moltiplicazione fra matrici è la matrice identità I. In particolare, se A è quadrata con lo stesso numero di righe di I:

$$AI = IA = A$$

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Determinante di una matrice

Data una matrice quadrata A di ordine n ad entrate reali ad essa è possibile associare un numero reale, detto **determinante della matrice** ed indicato con $\det(A)$, che è una funzione delle sue entrate. Presentiamo preliminarmente i casi $n = 1, 2, 3$ (seguirà la definizione generale di determinante nella slide 21):

- per $n = 1$, $\det(A)$ coincide con l'unico elemento della matrice;
- per $n = 2$, si pone

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- per $n = 3$, si pone

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

Esempi

- Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Applicando la definizione si trova

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3) - (-2 \cdot 4) = 3 - (-8) = 3 + 8 = 11.$$

- Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Applicando la definizione si trova

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (16) - 0 - 2 \cdot (4) = 16 - 8 = 8$$

Determinante di una matrice: regola di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Lo **sviluppo di Laplace** del determinante lungo la riga i-esima è dato da:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è la sottomatrice complementare (i, j) di A. Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Per ridurre al minimo i calcoli, sviluppiamo il determinante lungo la **seconda riga**, poiché contiene due elementi nulli. Gli unici termini non nulli dipendono dall'elemento $a_{23} = 3$:

$$\det(A) = 0 \cdot (-1)^{2+1} \det(A_{21}) + 0 \cdot (-1)^{2+2} \det(A_{22}) + 3 \cdot (-1)^{2+3} \det(A_{23}) = 3 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

Esempio

Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Per calcolare il determinante di questa matrice 4×4, sviluppiamo lungo la **seconda riga**, poiché contiene tre zeri e un solo elemento non nullo ($a_{23} = 3$):

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Ora calcoliamo il determinante della sottomatrice 3×3. Conviene sviluppare lungo la sua **prima riga** (che ha due zeri):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Risolviamo il determinante della sottomatrice 2×2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0) - (5 \cdot (-3)) = 0 - (-15) = 15$$

Sostituiamo a ritroso i valori trovati per ottenere il determinante finale di A:

$$\det(A) = -3 \cdot (15) = -45$$

Il determinante della matrice A è **-45**.

Osservazione

Un buon modo per ricordarsi i segni negli sviluppi di Laplace è di visualizzarli in una scacchiera infinita:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Quindi partendo dall'angolo in alto a sinistra (segno $+$) si procede in orizzontale o verticale di un elemento alla volta, cambiando segno a ogni passo, fino a giungere all'elemento (e quindi al segno) corrispondente al minore desiderato.

Per calcolare il determinante possiamo sviluppare sia per righe sia per colonne a seconda della *convenienza*. La scelta dipende dalla situazione.

Esempio

Vogliamo calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La terza colonna ha un solo termine non nullo, al posto $(5,3)$; quindi sviluppando lungo la terza colonna otteniamo

$$\det A = (-1)^{5+3} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ora possiamo sviluppare, per esempio, lungo la prima colonna, ottenendo

$$\det A = -\det \begin{vmatrix} 0 & 27 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

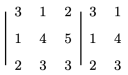
Infine, sviluppando lungo la prima riga ricaviamo

$$\det A = -(-1)^{1+2} 27 \det \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -27.$$

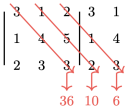
Con un po' di allenamento si impara a scegliere le giuste righe o colonne per semplificare in modo significativo gli sviluppi di Laplace,

Regola di Sarrus

È possibile calcolare il determinante di una matrice del **terzo ordine** in un altro modo, facendo uso della **regola di Sarrus**.

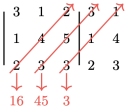


a. Ricopiamo a destra del determinante i termini delle prime due colonne della matrice.



$36 + 10 + 6 = 52$

b. Moltiplichiamo i termini lungo la diagonale principale e lungo le due diagonali parallele a essa; scriviamo i prodotti e li sommiamo.



$16 + 45 + 3 = 64$

c. Ripetiamo il procedimento moltiplicando i termini lungo la diagonale secondaria e lungo le due diagonali parallele a essa; scriviamo i prodotti e li sommiamo.



$= 52 - 64 = -12$

d. Il determinante è uguale alla differenza fra la prima e la seconda somma di prodotti.

Inversa di una matrice

Definizione

Si chiama ***matrice inversa di una matrice quadrata*** *A di ordine n la matrice quadrata A^{-1} tale che risulti:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Non tutte le matrici quadrate ammettono la matrice inversa. Se una matrice ha la matrice inversa, si dice **invertibile**.

Si può dimostrare il seguente risultato:

Proposizione

A è invertibile (o ***non singolare****) se e solo se* $\det(A) \neq 0$.

Il Metodo di Gauss-Jordan per la ricerca della matrice inversa

Il metodo di **Gauss-Jordan** è un algoritmo sistematico per calcolare la matrice inversa A^{-1} di una matrice quadrata A di ordine n non singolare ($\det(A) \neq 0$).

L'algoritmo si basa sulla costruzione di una **matrice aumentata** $[A \mid I_n]$, dove I_n è la matrice identità dello stesso ordine di A. Tramite *operazioni elementari sulle righe*, l'obiettivo è trasformare il blocco di sinistra nella matrice identità:

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{Operazioni sulle righe}} [I_n \mid A^{-1}]$$

Quando la parte sinistra diventa I_n, la parte destra sarà la matrice inversa cercata A^{-1}.

Le *operazioni elementari* consentite sono:

- **Scambio di due righe.**
- **Moltiplicazione** di una riga per uno scalare non nullo ($k \neq 0$).
- **Somma** tra una riga e un multiplo di un'altra riga.

In pratica è possibile sostituire una riga con la somma di sé stessa e di un multiplo di un'altra riga: $R_i \leftarrow R_i + kR_j$, con $i \neq j$, $k \in \mathbb{R}$.

Esempio: calcolo dell'inversa di una matrice di ordine 2

Consideriamo la seguente matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = -2 \neq 0$$

Passo 1: Costruzione della matrice aumentata

Affianchiamo ad A la matrice identità I_2:

$$[A \mid I_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Passo 2: Eliminazione verso il basso (creare lo zero in posizione $(2,1)$)

Per annullare il 3 nella seconda riga, sostituiamo la seconda riga (R_2) con $R_2 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3-3(1) & 4-3(2) & 0-3(1) & 1-3(0) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Passo 3: Normalizzare l'elemento in posizione $(2,2)$

Per far comparire 1 in posizione $(2,2)$, moltiplichiamo la seconda riga per $-\frac{1}{2}$ ($R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Passo 4: Eliminazione verso l'alto (creare lo zero in posizione $(1,2)$**)**

Per annullare il 2 in posizione $(1,2)$, sostituiamo la prima riga (R_1) con $R_1 - 2R_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1-2(0) & 2-2(1) & 1-2\left(\frac{3}{2}\right) & 0-2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = [I_2 \mid A^{-1}]$$

Passo 5: Risultato finale

Poiché la parte sinistra è ora diventata la matrice identità I_2, la parte destra è la matrice inversa cercata:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esempio: calcolo dell'inversa di una matrice di ordine 3

Consideriamo la seguente matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 1 \neq 0$$

Passo 1: Costruzione della matrice aumentata

Affianchiamo ad A la matrice identità I_3:

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Passo 2: Eliminazione verso il basso

L'elemento in posizione $(1,1)$ è già uguale a 1. Eliminiamo i termini sotto di esso nella prima colonna applicando le operazioni

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \qquad \text{e} \qquad R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Moltiplichiamo la seconda riga per -1 per rendere positivo l'elemento in posizione $(2,2)$ ($R_2 \leftarrow -R_2$):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Eliminiamo l'elemento in posizione $(3,2)$ sostituendo la terza riga tramite l'operazione $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Moltiplichiamo la terza riga per -1 per normalizzare l'elemento in posizione $(3,3)$ ($R_3 \leftarrow -R_3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Passo 3: Eliminazione verso l'alto

Azzeriamo gli elementi al di sopra dell'elemento in posizione $(3,3)$ nella terza colonna tramite le operazioni $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ e $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) = [I_3 \mid A^{-1}]$$

Passo 4: Risultato Finale

Poiché il blocco sinistro corrisponde ora alla matrice identità I_3, ricaviamo l'inversa di A nel blocco destro:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$