LEZIONE 28-10-2026

Abbiamo visto che possiamo identificare punti sulla cf $\mathcal{C}$ e angolo corrispondente. Chiameremo α tale angolo, e se $P=(x_P, y_P)$ è il punto corrispondente ad α, definiamo

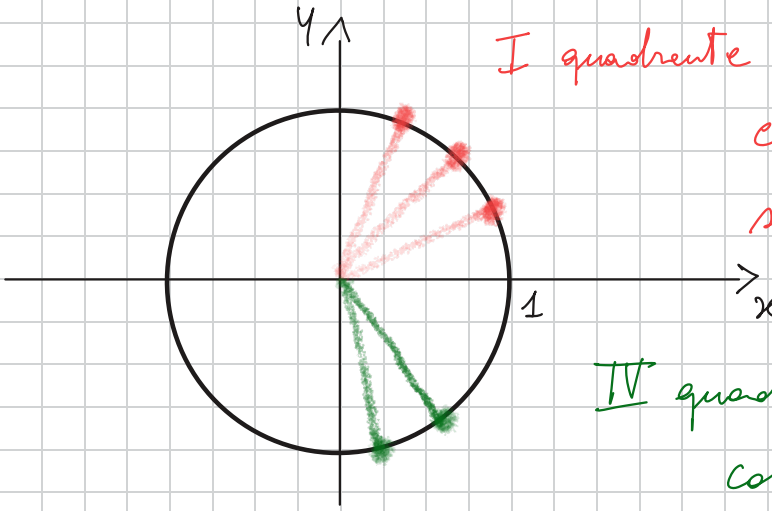
$x_P = \cos\alpha$ << COSENO DI α >>

$y_P = \text{sen}\,\alpha$ << SENO DI α >>

Nell'ultimo calcolo di ieri, avevamo trovato che per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ si ha il punto $F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, quindi

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Come cambiano $\cos\alpha$, $\text{sen}\,\alpha$ in base all'angolo α?



I quadrante $\rightsquigarrow$ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, da cui:

$\cos\alpha \ge 0$ (ascissa positiva)

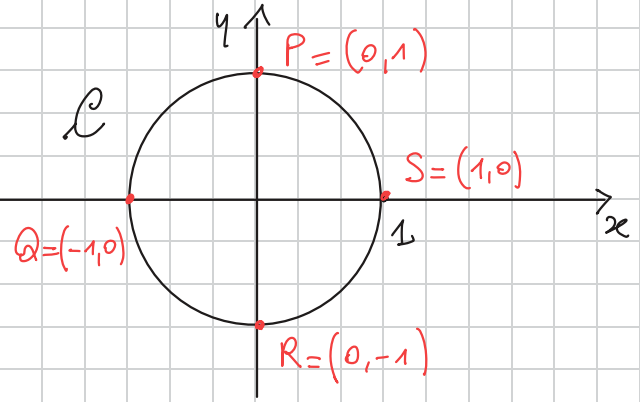
$\text{sen}\,\alpha \ge 0$ (ordinata positiva)

IV quadrante $\rightsquigarrow$ $\frac{3}{2}\pi \le \alpha \le 2\pi$:

$\cos\alpha \ge 0$ (ascissa positiva)

$\text{sen}\,\alpha \le 0$ (ordinata negativa)

Scriviamo coseno e seno di alcuni angoli particolari:



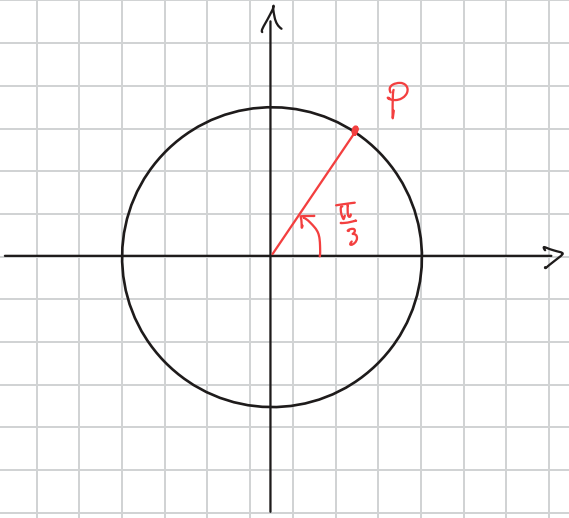
$\alpha = 0 \rightsquigarrow S=(1,0) \rightsquigarrow$ $\cos 0 = 1$, $\text{sen}\,0 = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow P=(0,1) \rightsquigarrow$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$

$\alpha = \pi \rightsquigarrow Q=(-1,0) \rightsquigarrow$ $\cos\pi = -1$, $\text{sen}\,\pi = 0$

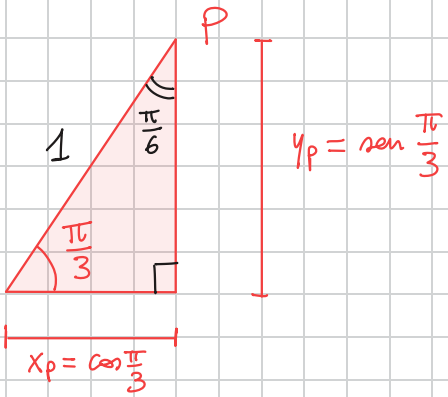
Esercizio: scrivere $\cos\frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi$.

Adesso calcoliamo $\cos\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.



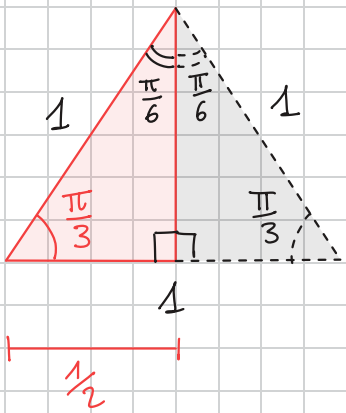
$$\alpha_{GRADI} : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$$

$$\alpha_{GRADI} = \frac{\frac{\pi}{3}\cdot 360^\circ}{2\pi} = 60^\circ$$



$\rightarrow$ $x_P = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y_P = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = ?$

"Radoppiando" si ottiene un triangolo equilatero, quindi i lati sono tutti uguali e misurano 1, cosicché x_P vale $\frac{1}{2}$ e abbiamo ottenuto $\cos\frac{\pi}{3}$.



Il seno si ottiene col Teorema di Pitagora...

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Osservazioni: i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$

$$-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$$

Questo si vede anche dall'eq. della crf $\mathcal{C}$:

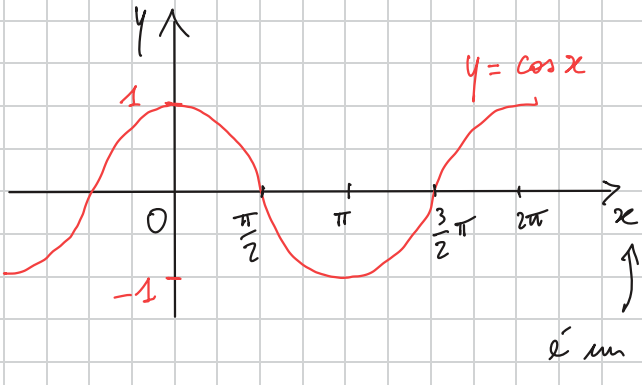
$$x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow[y=\operatorname{sen}\alpha]{x=\cos\alpha} \boxed{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}$$

ii) sia il seno che il coseno sono funzioni PERIODICHE, cioè il loro valore si ripete dopo 2π (che corrisponde

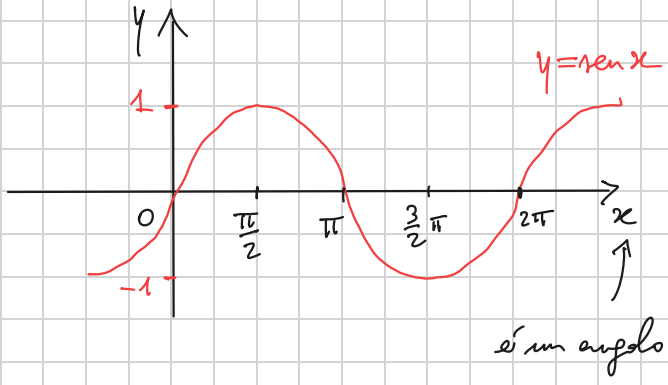
ad un giro completo). Ad esempio, misurare

$$\cos\frac{\pi}{2} \quad , \quad \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

è la stessa cosa, poiché il punto che i due angoli $\frac{\pi}{2}$ e $2\pi+\frac{\pi}{2}$ individuano su $\mathcal{C}$ è lo stesso $(P=(0,1))$.
Chiameremo PERIODO il valore dopo il quale le funzioni tornano ad assumere gli stessi valori. Graficamente:



è un angolo!



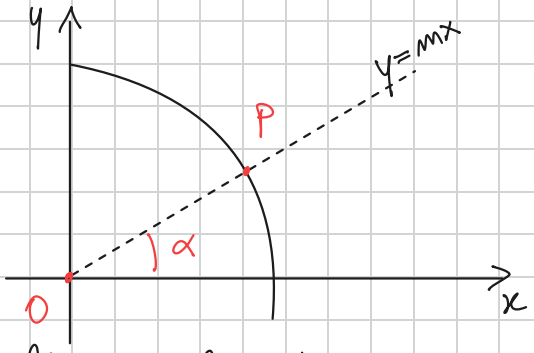
è un angolo!

Il loro dominio è $D=\mathbb{R}$.

iii) Possiamo definire la TANGENTE di α come

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Esse è proprio la pendenza della retta che congiunge l'origine col punto individuato da α.

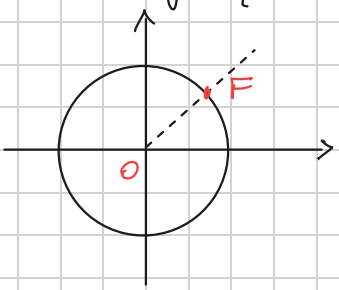


Il coeff. angolare "m" si può calcolare come INCREMENTO:

$$m = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{\operatorname{sen}\alpha - 0}{\cos\alpha - 0} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Esempio: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = ?$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \boxed{1}$$



$F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

La retta che congiunge F ed O è $y = x$, che ha $m = \boxed{1}$

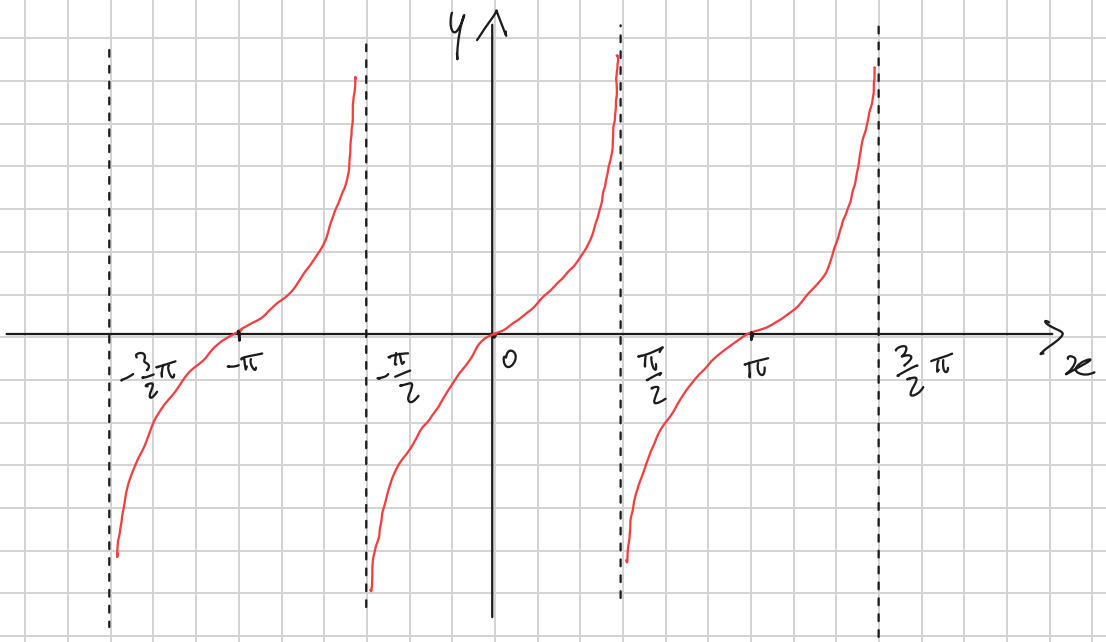
Nota: poiché la $\operatorname{tg}\alpha$ ha un'espressione fratta, dobbiamo assicurarci che il denominatore sia diverso da zero:

$$\cos\alpha \neq 0 \implies \alpha \neq \frac{\pi}{2} \vee \alpha \neq \frac{3}{2}\pi$$

Poiché poi il coseno è periodico, devo escludere anche i giri successivi. Ciò si scrive come

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \qquad \alpha \neq \frac{3}{2}\pi + 2\pi \cdot k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

che significa «tolgo $\frac{\pi}{2}$ e tutte le volte che aggiungo k giri tornando a $\frac{\pi}{2}$». Il grafico di $y = \operatorname{tg} x$ è:



Nota: [Funzioni inverse]

Il coseno e il seno prendono come argomento un angolo e restituiscono un numero tra -1 e 1 (coordinate del punto corrispondente). La funzione inversa parte dalla coord. e vi associa l'angolo. Esse sono chiamate

$\arccos x$ $\qquad$ $\arcsin x$

FUNZIONE INVERSA DI $\cos x$ (ARCO COSENO)

FUNZIONE INVERSA DI $\operatorname{sen} x$ (ARCO SENO)

Ad esempio, quanto vale $\arccos(-1) = ?$ Il risultato è l'angolo α che ha $\cos\alpha = -1$, ossia $\alpha = \pi$

$\rightsquigarrow \arccos(-1) = \pi$.

Quanto vale $\text{arcsen}(0) = ?$ Esso è l'angolo α che ha $\text{sen}\,\alpha = 0$, ossia $\alpha = 0$. Prenderemo come dominio di tali funzioni...

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \qquad \text{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

poiché in tali angoli coseno e seno assumono rispettivamente ciascun valore una sola volta (biiettività).

Equazioni trigonometriche elementari.

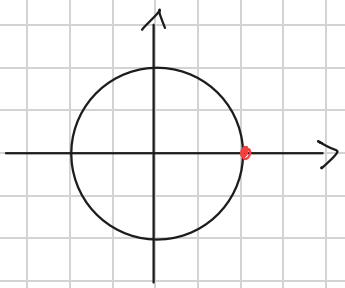
Sono eq. dove l'incognita compare nell'argomento di qualche funzione goniometrica ($\cos$, sen, tg, arccos, arcsen).
Parliamo di equazioni della forma

$$\cos(f(x)) = c$$
$$\text{sen}(f(x)) = c$$

dove $f(x)$ sarà uguagliato ad un angolo che abbia tale coseno / seno.

Esempi:

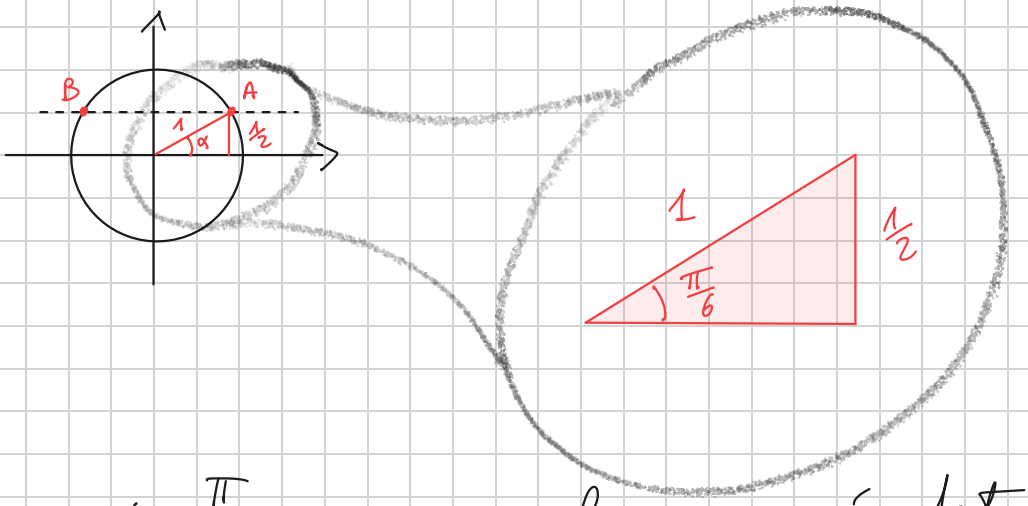
1) $\cos(2x) = 1$



La soluzione saranno gli angoli che hanno coseno pari a 1: graficamente vediamo che il coseno ha tale valore nell'angolo $0 + 2\pi k$, quindi l'eq. diventa $2x = 0 + 2\pi k \rightarrow 2x = 2\pi k$;

$x = \pi k$

2) $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ Quali angoli hanno seno $\frac{1}{2}$?



Avevamo già trovato questo triangolo...

A $\rightsquigarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ e una soluzione è data da

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

B $\rightsquigarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ e una sol. è data da

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k \longrightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

Esercizi:

1) Scrivere una tabella coi valori di $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ per

$$\alpha = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$$

2) risolvere le seguenti equazioni:

a. $2\cos^2 x - \cos x = 0$

b. $2\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3} = 0$

3) risolvere le seguenti disequazioni:

c. $2\operatorname{sen} x + \sqrt{2} > 0$

d. $2\cos x + \sqrt{3} \geq 0$