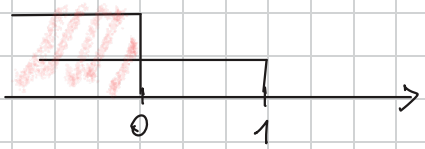
LEZIONE 27-10-2026

Svolgimento esercizi: 1) $\ln(1-x) + \ln(-2x) = 2$

C.E: $\begin{cases} 1-x>0 \\ -2x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<1 \\ x<0 \end{cases}$



→ C.E: $x<0$

$\ln(1-x)+\ln(-2x) = 2$; $\ln[(1-x)(-2x)] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-x)(-2x) = e^2$;

$+2x^2 - 2x - e^2 = 0$;

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8e^2}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+2e^2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2e^2}}{2}$;

Poiché C.E: $x<0$, accettiamo solo la sol. negativa $\boxed{x = \frac{1-\sqrt{1+2e^2}}{2}}$

2) $\log_2 x^3 \leq 2 \log_2 x$;

C.E: $\begin{cases} x^3>0 \\ x>0 \end{cases}$ → $x>0$

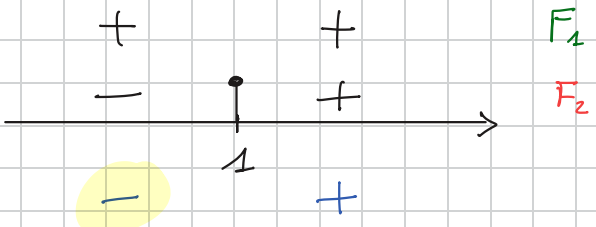
$\log_2 x^3 \leq \log_2 x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 \leq x^2$; $x^3 - x^2 \leq 0$; $x^2(x-1) \leq 0$

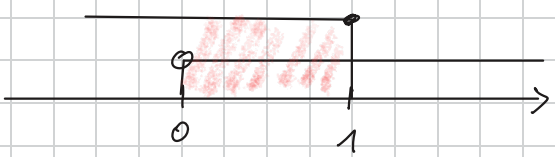
Studio il segno dei fattori:

F_1: $x^2 \geq 0$ sempre $(\forall x \in \mathbb{R})$

F_2: $x-1 \geq 0$ → $x \geq 1$



Soluzioni: $x \leq 1$. Confrontando con le C.E. $x>0$ si conclude



$\Rightarrow \boxed{0<x\leq 1}$

Dominio di una funzione.

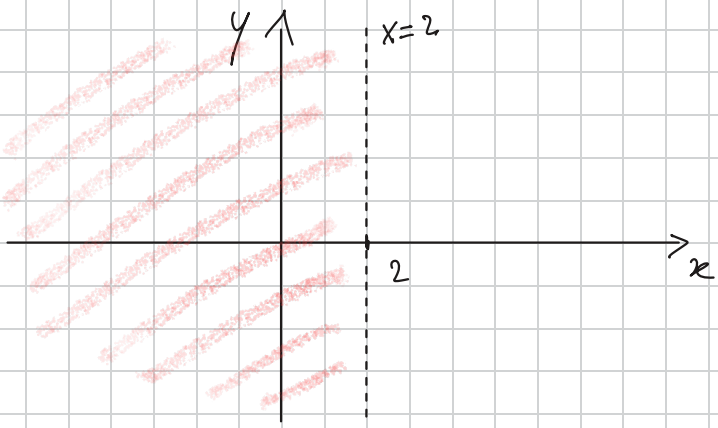
$f: A \longrightarrow B$

$x \longmapsto f(x)$

Terminologia: se f è una funzione come sopra, diremo che A è il suo DOMINIO, B il suo CODOMINIO ed $f(x)$ è l'IMMAGINE di $x \in A$ tramite f.

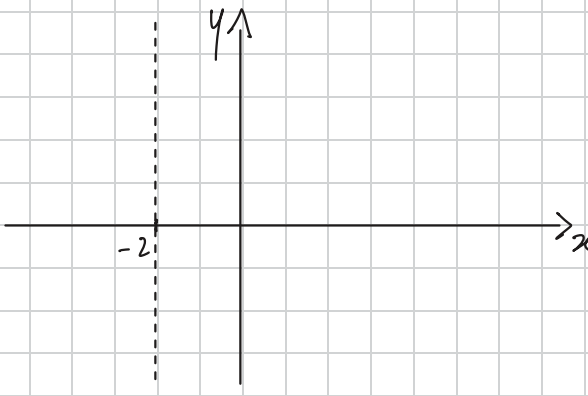
Consideriamo ora, come facciamo solitamente in questo corso, funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ossia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo che il DOMINIO di f è «il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove può essere calcolato (o ha significato)».

Ad esempio, se $f(x) = \log_2(x-2)$, poiché C.E.: $x > 2$ diremo che il suo dominio è $D = \{x > 2\}$. Ciò può essere rappresentato graficamente sul piano cartesiano cancellando i valori esclusi:



Esempi: determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ è fratta $\Rightarrow$ C.E.: $x+2 \neq 0$, ossia $x \neq -2$.
Il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$



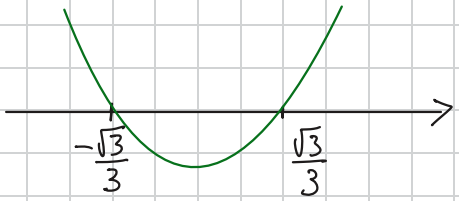
Per indicare che $x = -2$ va escluso dal dominio, disegno tale retta tratteggiandola.

2) $y = \log_2(3x^2 - 1)$ logaritmica $\Rightarrow$ C.E.: $3x^2 - 1 > 0$.

Rappresento $3x^2 - 1 = 0$: abbiamo concavità verso l'alto poiché $a = 3 > 0$ e intersezioni con l'asse x date da

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{\pm\sqrt{+12}}{6} = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{6}$$

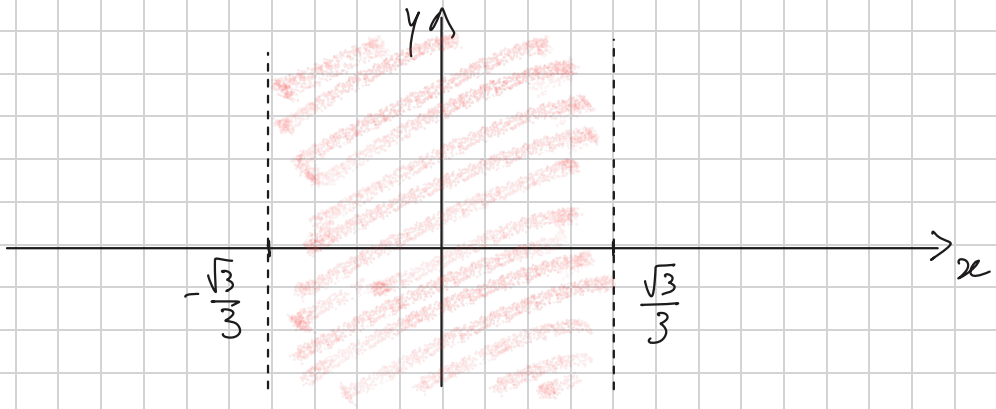
$$\frac{+2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



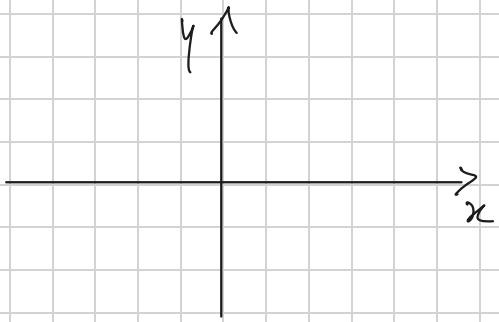
$\Rightarrow 3x^2 - 1 > 0$ quando

$$x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Di conseguenza, $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$



3) $y = x^2 + 3x$ polinomiale $\Rightarrow$ non ci sono C.E. $\Rightarrow D = \mathbb{R}$



Graficamente non escluderò nessuna porzione di piano cartesiano.

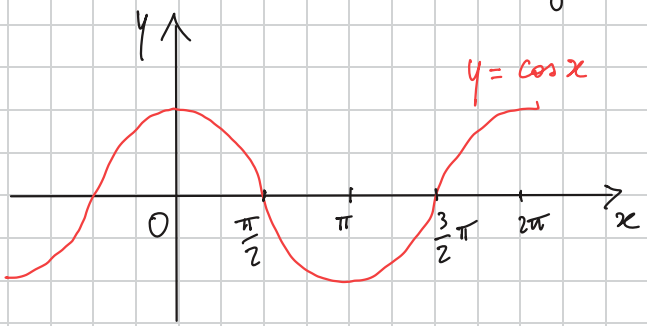
Esercizio:

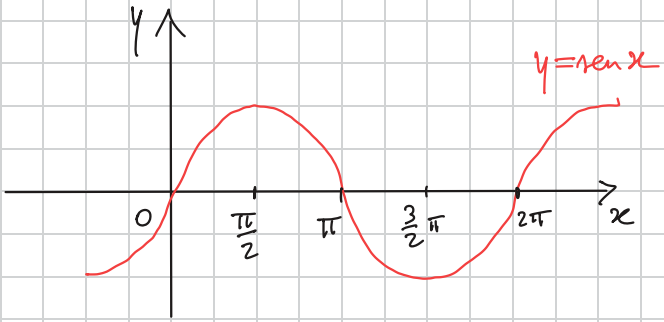
1) $y = \frac{x-1}{x^2+3x}$; 2) $y = \frac{x+2}{x^2-2x-8}$; 3) $y = \sqrt{x}$;

4) $y = \log(3x+2)$; 5) $y = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$; 6) $y = 3^{\frac{x-2}{x+2}}$;

7) $y = (1-2x)e^{-2x}$.

Trigonometria. È lo studio di triangoli; «risolvere un triangolo» significa determinarne lati e angoli. Parleremo in particolare della risoluzione di triangoli rettangoli e introdurremo due funzioni, associate agli angoli, importanti in teoria dei segnali e fenomeni fisici: SENO e COSENO.



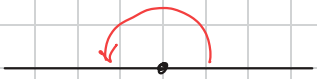


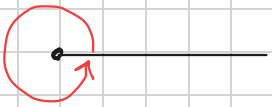
Premessa: [Angoli in gradi VS in radianti]

Conosciamo la misura in gradi sessagesimali dove un ANGOLO RETTO misura $90°$. Di conseguenza

ANGOLO PIATTO $\rightarrow 180°$

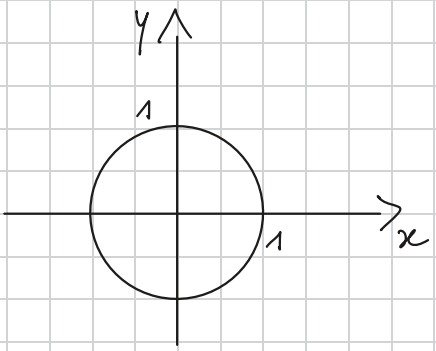
ANGOLO GIRO $\rightarrow 360°$





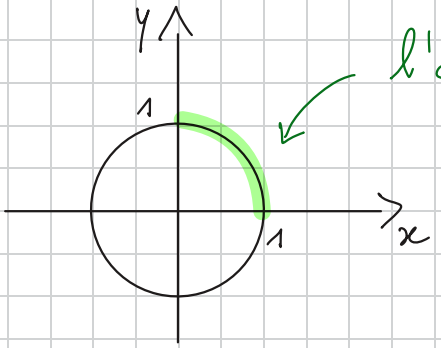
Consideriamo, nel piano cartesiano, la crf di centro l'origine e raggio 1, la cui eq. è

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$
$$C = (0,0) \quad r = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = 1}$$



La lunghezza di una crf è $2\pi r$, quindi questa ha lunghezza $\boxed{2\pi}$. Misureremo gli angoli tramite i RADIANTI, che sono

la lunghezza dell'arco sotteso da un angolo. Ad esempio un angolo retto sottende un quarto di tutta la crf, quindi l'arco misurerà $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, e questa sarà la misura in radianti dell'angolo retto.



l'arco corrispondente a 90° misura $\frac{\pi}{2}$.

Domanda: quanti radianti vale 60°?

$\rightsquigarrow \frac{\pi}{3}$, perché 60° è contenuto 6 volte in 360°, quindi $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Più in generale, se chiamiamo α_{GRADI} un angolo espresso in gradi e α_{rad} lo stesso angolo espresso in radianti, abbiamo una proporzione tra i due:

$$\alpha_{GRADI} : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$$

Esempi:

$\alpha_{GRADI} = 45^\circ$, $\alpha_{rad} = ?$ $\qquad \alpha_{rad} = \frac{2\pi \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{4}$

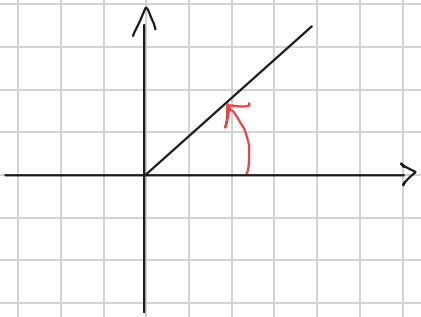
$\alpha_{GRADI} = 30^\circ$, $\alpha_{rad} = ?$ $\qquad \alpha_{rad} = \frac{2\pi \cdot 30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$

$\alpha_{rad} = \frac{3}{2}\pi$, $\alpha_{GRADI} = ?$ $\qquad \alpha_{GRADI} = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$

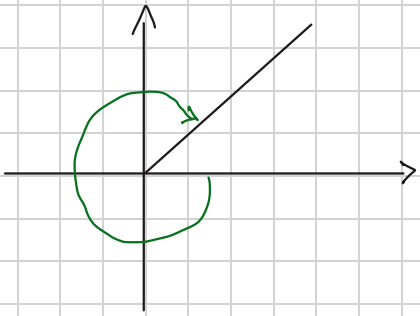
Esercizio: convertire π, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{9}$, 135°, 180°, 105°.

Nota: oltre alla loro ampiezza, indicheremo gli angoli con un segno (+/−), in base al fatto che vengano

considerati in senso orario o antiorario. In ogni caso, essi saranno sempre contati a partire dall'asse x, che rappresenta $0°$.



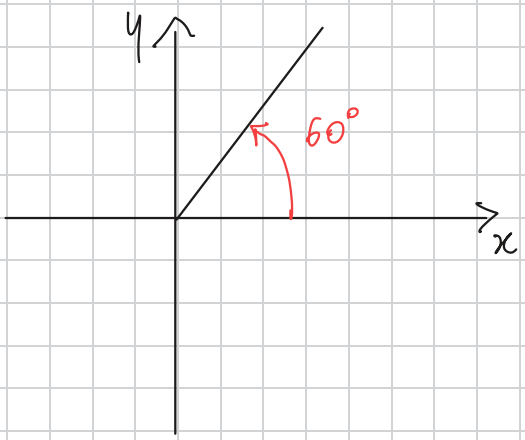
Se l'angolo è orientato in SENSO ANTIORARIO, ha segno POSITIVO



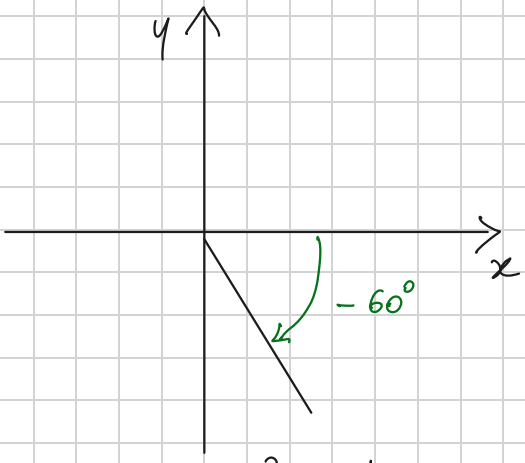
Se l'angolo è orientato in SENSO ORARIO, ha segno NEGATIVO

Questo significa anche che due angoli con segno opposto possono essere completamente diversi! Ad esempio,

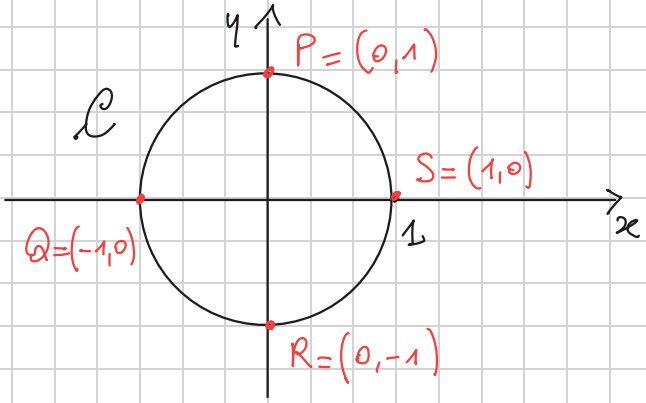
$\alpha = \frac{\pi}{3}$



$\alpha = -\frac{\pi}{3}$

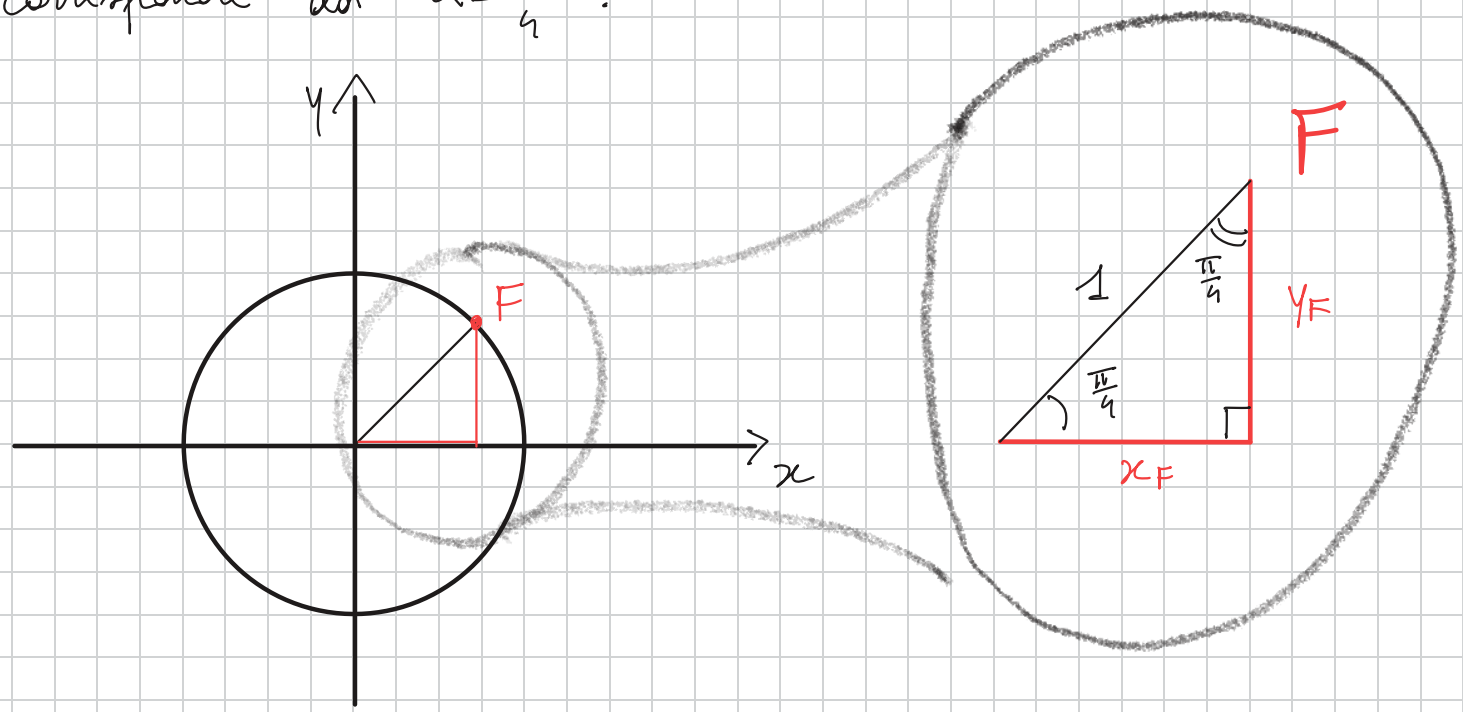


Tornando alla crf iniziale $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$, tutti i suoi punti possono essere identificati dall'angolo che formano con l'asse x. Ad esempio, $P=(0,1)$ può essere identificato con l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Allo stesso modo,



$Q \leftrightarrow \alpha = \pi$, $R \leftrightarrow \frac{3}{2}\pi$, $S = 2\pi \ (\sim 0)$.

Gli altri punti di $\mathcal{C}$ hanno coordinate difficili da trovare. Ad esempio, quali sono le coordinate del punto F che corrisponde ad $\alpha = \frac{\pi}{4}$?



Questo triangolo è isoscele (perché ha due angoli uguali e, di conseguenza, due lati uguali), pertanto $x_F = y_F$.

Per il Teorema di Pitagora...

$$x_F^2 + y_F^2 = 1 \xrightarrow{x_F = y_F} y_F^2 + y_F^2 = 1 \ ;$$

$$2y_F^2 = 1 \ ;$$

$$y_F = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

qui prendo solo la soluzione positiva perché F sta nel 1° quadrante, quindi $y_F = +\frac{1}{\sqrt{2}}$. Analogamente $x_F = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ossia

$$F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$