1. LE DERIVATE SECONDE
2. LA MATRICE HESSIANA
3. IL DIFFERENZIALE SECONDO
4. TEOREMA DI SCHWARZ
5. CONSEGUENZE
6. FORMULA DI TAYLOR AL II ORDINE

1. LE DERIVATE SECONDE

SE $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ CON $A \subset \mathbb{R}^n$ AMMETTE LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ IN $B_\varepsilon(P) \subset A$, E SE ESISTE $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ NEL PUNTO P LA SI INDICA CON

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P)$ (NEL TESTO) O ANCHE CON $f_{x_j x_i}$

O ANCHE CON $\frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$ O CON $f_{x_i x_j}(P)$

TEOREMA DI SCHWARZ: SE LE DERIVATE SECONDE $f_{x_i x_j}$ E $f_{x_j x_i}$ ESISTONO IN $B_\varepsilon(P)$ E SONO CONTINUE IN P, ALLORA

$$f_{x_i x_j}(P) = f_{x_j x_i}(P).$$

È LEGITTIMO CHE $i = j$ NEL QUAL CASO SI SCRIVE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ DERIVATA SECONDA PURA. SE $i \neq j$ SI PARLA DI DERIVATA MISTA.

2. LA MATRICE HESSIANA

SE ESISTONO LE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ PER $i, j = 1, \dots, n$

SI COSTRUISCE LA MATRICE HESSIANA

$$D^2 f = H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: SE $f(x,y) = ax + by + c$ ALLORA È OVVIO CHE $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ E $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ QUINDI $D^2 f = 0$ (MATRICE NULLA).

ESEMPIO: SE $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + g$ ALLORA $D^2 f = D^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)$, QUINDI CALCOLIAMO:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2ax + 2by$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2bx + 2cy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2a$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2b$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2c$$

E CONCLUDIAMO CHE $D^2 f = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. NOTARE CHE

$$f(x,y) = g + (d,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= g + (d,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y) D^2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

SE f SODDISFA IPOTESI CHE VEDREMO (COME LA CONTINUITÀ DI $D^2 f$) SI DIMOSTRA CHE

$$f(x,y) = f(P) + (x - P_1, y - P_2) \cdot \nabla f(P) + \frac{1}{2}(x - P_1, y - P_2) D^2 f(P) \begin{pmatrix} x - P_1 \\ y - P_2 \end{pmatrix} + o\left((x - P_1)^2 + (y - P_2)^2\right)$$

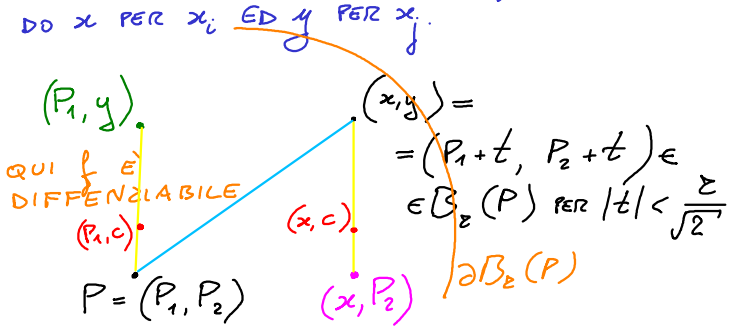
IL POLINOMIO OMOGENEO DEFINITO PER OGNI h_1, h_2 DA $(h_1, h_2) D^2 f(P) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ SI CHIAMA «DIFFERENZIALE SECONDO» E SI DENOTA CON $d^2 f_P$

LA DIFFERENZIABILITÀ SECONDA

SE $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE IN $B_\varepsilon(P) \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ALLORA ESISTE $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ IN $B_\varepsilon(P)$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$. SE LE $\partial f / \partial x_i$ SONO DIFFERENZIABILI IN P SI DICE CHE f È IVI DIFFERENZIABILE DUE VOLTE, LA MATRICE $D^2 f$ IN P RISULTA SIMMETRICA, E SI DEFINISCE IL DIFFERENZIALE SECONDO $d^2 f_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ TRAMITE

$$d^2 f_P : h \longmapsto h \cdot D^2 f(P) \cdot h^T \quad \text{PER}$$

$h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. DIMOSTRIAMO LA SIMMETRIA DI $D^2 f(P)$. NON È RESTRITTIVO PENSARE $n = 2$ RAGIONANDO NEL PIANO $x_i x_j$ OVVERO PONENDO x PER x_i ED y PER x_j.



CONSIDERIAMO $\Delta = \Delta(x,y) = \Delta(t) = f(P) + f(x,y) - f(x, P_2) - f(P_1, y)$ E VERIFICHIAMO CHE

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P). \quad \text{SCRIVIAMO } \Delta =$$

$$f(P) - f(x, P_2) - \left[f(P_1, y) - f(x,y) \right],$$

PONIAMO $\varphi(s) = f(P_1, s) - f(x, s)$ E DIVENTA

$$\Delta = \varphi(P_2) - \varphi(y) = \varphi'(c)(P_2 - y)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(P_1, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, c) \right](P_2 - y)$$

ESSENDO $\frac{\partial f}{\partial y}$ DIFFERENZIABILE IN P SI HA CHE

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_1, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(P)(P_1 - P_1) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(P)(c - P_2) + o(c - P_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(P)(x - P_1) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(P)(c - P_2) + o\left(\sqrt{(x-P_1)^2 + (c-P_2)^2}\right)$$

MA $o(c - P_2) = o(y - P_2) = o(t)$

E $o\left(\sqrt{(x-P_1)^2 + (c-P_2)^2}\right) = o\left(\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}\right) = o\left(\sqrt{t^2 + t^2}\right) = o(t)$

QUINDI $\left[\frac{\partial f}{\partial y}(P_1, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, c) \right](P_2 - y)$

$$= -t \left[o(t) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(P)(x - P_1) \right]$$

$$= -t\, o(t) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(P)\, t^2$$

$$\frac{\Delta}{t^2} = -\frac{t\, o(t)}{t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(P) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(P)$$

COROLLARIO: SE f HA LE DERIVATE SECONDE CONTINUE ALLORA LE DERIVATE PRIME $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ HANNO LE DERIVATE CONTINUE.

QUINDI LE DERIVATE PRIME $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ SONO DIFFERENZIABILI E VALE IL TEOREMA:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

(TEOREMA DI SCHWARZ SULL'INVERSIONE DELL'ORDINE DI DERIVAZIONE)

DEFINIZIONE: LA CLASSE C^2 (ci-due) SI INDICA CON $C^2(A)$ L'INSIEME DELLE $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ CHE HANNO LE DERIVATE SECONDE CONTINUE IN UN APERTO $A \subset \mathbb{R}^n$.

5. CONSEGUENZE

a) DATO UN CAMPO $F(x,y,z) = X(x,y,z)\hat{\imath} + Y(x,y,z)\hat{\jmath} + Z(x,y,z)\hat{k}$ DI CLASSE C^2 RISULTA $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$. INFATTI SI HA CHE

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (Z_y - Y_z)\hat{\imath} + (X_z - Z_x)\hat{\jmath} + (Y_x - X_y)\hat{k}$$

QUINDI $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = \frac{\partial}{\partial x}(Z_y - Y_z) + \frac{\partial}{\partial y}(X_z - Z_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Y_x - X_y) = 0$.

b) DATA $f \in C^2(A)$, RISULTA $\operatorname{rot}\nabla f = \bar{0}$.

INFATTI, SOSTITUENDO $F = \nabla f$ NELLA FORMULA IN BLU, TROVIAMO $\operatorname{rot}\nabla f = (Z_y - Y_z)\hat{\imath} + \dots = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z\right)\hat{\imath} + \dots = \bar{0}$.

NOTA: NON È AFFATTO DETTO CHE $\operatorname{div}\nabla f = 0$, ANZI, SI TROVA CHE $\operatorname{div}\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$ (HAMILTON) $= \Delta f$ (MURPHY)

IL LAPLACIANO DI f. LE FUNZIONI CHE SODDISFANO $\Delta f = 0$ IN A SI DICONO ARMONICHE.

ESEMPI: $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$ È ARMONICA PER OGNI $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

È ARMONICA IN $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0,y_0,z_0)\}$, COME PURE $C f(x,y,z)$ QUALUNQUE SIA $C \in \mathbb{R}$.

6. FORMULA DI TAYLOR AL II ORDINE CON IL RESTO DI PEANO

SE $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN UN PUNTO $P = (P_1, P_2)$, ALLORA

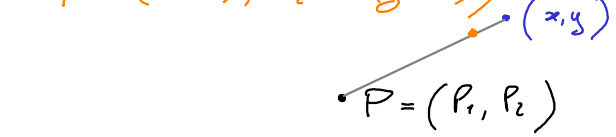
$$f(x,y) = f(P) + (x-P_1, y-P_2)\cdot\nabla f(P) + \frac{1}{2}(x-P_1, y-P_2)\, D^2 f(P) \begin{pmatrix} x-P_1 \\ y-P_2 \end{pmatrix} + o\left((x-P_1)^2 + (y-P_2)^2\right)$$

DIMOSTRAZIONE: DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$$f(x,y) - f(P) - (x-P_1, y-P_2)\cdot\nabla f(P) - \frac{1}{2}(x-P_1, y-P_2)\, D^2 f(P) \begin{pmatrix} x-P_1 \\ y-P_2 \end{pmatrix}$$

DIVISO PER $(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2$ TENDE A ZERO PER $(x,y) \longrightarrow (P_1,P_2)$. PER $t \in [0,1]$ SIA

$$\varphi(t) = f(P_1 + t(x-P_1),\ P_2 + t(y-P_2)) - f(P) - t(x-P_1, y-P_2)\cdot\nabla f(P) - \frac{1}{2}t^2 (x-P_1, y-P_2)\, D^2 f(P) \begin{pmatrix} x-P_1 \\ y-P_2 \end{pmatrix}$$



CON QUESTA NOTAZIONE, POSSIAMO SCRIVERE

$$f(x,y) - f(P) - (x-P_1, y-P_2)\cdot\nabla f(P) - \frac{1}{2}(x-P_1, y-P_2)\, D^2 f(P) \begin{pmatrix} x-P_1 \\ y-P_2 \end{pmatrix} = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c)$$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE. CON LE REGOLE DI DERIVAZIONE,

TROVIAMO $\varphi'(c) =$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_1 + c(x-P_1),\ P_2 + c(y-P_2))(x-P_1)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(P_1 + c(x-P_1),\ P_2 + c(y-P_2))(y-P_2)$$

$$- (x-P_1,\ y-P_2)\cdot \nabla f(P) +$$

$$- c\,(x-P_1,\ y-P_2)\, D^2 f(P) \begin{pmatrix} x-P_1 \\ y-P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P_1 + c(x-P_1),\ P_2 + c(y-P_2))(x-P_1)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-P_1)$$

$$- c\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)(x-P_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x-P_1)(y-P_2)\right]$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(P_1 + c(x-P_1),\ P_2 + c(y-P_2))(y-P_2)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-P_2)$$

$$- c\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x-P_1)(y-P_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)(y-P_2)^2\right]$$

MOSTRIAMO CHE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_1 + c(x-P_1),\ P_2 + c(y-P_2))(x-P_1)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-P_1)$$

$$- c\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)(x-P_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x-P_1)(y-P_2)\right]$$

$= o\left((x-P_1)^2 + (y-P_2)^2\right)$. IL PRIMO MEMBRO SI PUÒ SCRIVERE COME SEGUE:

$$(x-P_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_1 + c(x-P_1),\ P_2 + c(y-P_2))\right.$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(P) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(P)\, c(x-P_1)$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(P)\, c(y-P_2)\right] = \text{PER LA DIFFERENZIABILITÀ DI } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ NEL PUNTO } P$$

$$= (x-P_1)\, o\left(\sqrt{(c(x-P_1))^2 + (c(y-P_2))^2}\right)$$

$$= (x-P_1)\, o\left(c\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}\right)$$

$$= (x-P_1)\, o\left(\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}\right)$$

INFINE, $$\frac{(x-P_1)\, o\left(\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}\right)}{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{x-P_1}{\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}}}_{\text{È LIMITATA}} \underbrace{\frac{o\left(\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}\right)}{\sqrt{(x-P_1)^2 + (y-P_2)^2}}}_{\text{TENDE A ZERO}}$$

E LA TESI SEGUE.