Conseguenze del Teorema di Lagrange

Criterio di Monotonia

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* (a,b)*. Allora:*

- ***Funzione Crescente:***

  f *è crescente in* $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

- ***Funzione Decrescente:***

  f *è decrescente in* $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Dimostrazione – Prima Parte

Supponiamo che $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

Scegliamo due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tali che* $x_2 > x_1$.

Applicando il ***Teorema di Lagrange*** *nell'intervallo chiuso* $[x_1, x_2]$*, esiste almeno un punto* $x_0 \in (x_1, x_2)$ *tale che:*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

Poiché per ipotesi $f'(x_0) \geq 0$ *e per costruzione* $x_2 - x_1 > 0$*, il prodotto dei due termini è maggiore o uguale a zero:*

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

La funzione è pertanto crescente.

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Dimostrazione – Seconda Parte

Supponiamo che la funzione $f(x)$ *sia crescente in* $[a, b]$.

Per un incremento h *tale che* $x + h \in [a, b]$ *con* $h \neq 0$*), il rapporto incrementale risulta sempre concorde con la crescita della funzione:*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Passando al limite per $h \to 0$*, si ottiene:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Implicazioni per la stretta monotonia

Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \Longrightarrow f$ *è* ***strettamente crescente*** *in* $[a, b]$.

Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b] \Longrightarrow f$ *è* ***strettamente decrescente*** *in* $[a, b]$.

Conseguenze del Teorema di Lagrange

2) *Sia* $f(x):[a,b]\to R$, *derivabile in* (a,b).

f *è costante* $\Leftrightarrow f'(x)=0 \ \forall\ x\in(a,b)$

3) *Sia* $x_0\in(a,b)$ *e* $f'(x_0)=0$

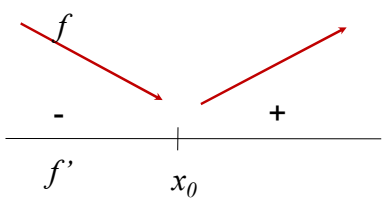
Se esiste un intorno destro (sinistro), in cui $f'(x)>0$

e un intorno sinistro (destro) in cui $f'(x)<0$,

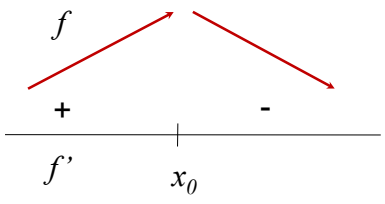
allora x_0 *è un punto di minimo (massimo) relativo.*

5

Conseguenze del Teorema di Lagrange



x_0 *minimo relativo*



x_0 *massimo relativo*

6

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Esercizio

Determinare i punti di massimo o di minimo relativo per la funzione $f(x) = x^3 - 12x$

Esercizio

Determinare un intervallo in cui $f(x) = \dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ *è crescente*

Teorema di Cauchy

Siano $f, g: [a,b] \to R$:

i) f e g sono continue in $[a,b]$;

ii) f e g sono derivabili in (a,b).

Allora se $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a,b), \exists\, x_0 \in (a,b)$:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Il Teorema di Cauchy garantisce che esiste **un punto di ascissa** $x_0 \in (a,b)$ *in cui il rapporto tra le pendenze delle due rette tangenti* $f'(x_0)$ *e* $g'(x_0)$ *è uguale al rapporto tra le pendenze delle due rette secanti passanti per gli estremi dell'intervallo*

Teorema di Cauchy

1) *Verificare le ipotesi del Teorema di Cauchy per le funzioni* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x^3$ *nell'intervallo* $[1,2]$ *ed eventualmente determinare il valore del punto* x_0 *che soddisfa il teorema.*

2) *Date le funzioni* $f(x) = e^x$ *e* $g(x) = e^{-x}$ *nell'intervallo* $[0,1]$. *Determinare il punto* x_0 *che soddisfa il Teorema.*

9

Teorema di Cauchy

Il Teorema di Cauchy si trasforma nel Teorema di Lagrange quando $g(x) = x$

Infatti, consideriamo la formula generale del ***Teorema di Cauchy*** *per due funzioni* $f(x)$*e* $g(x)$ *continue in* $[a, b]$*e derivabili in* (a, b)*:*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Se $g(x) = x$ *si ha* $g(a) = a$, $g(b) = b$ *e* $g'(x_0) = 1$

Sostituendo nella formula di Cauchy:

$$\frac{f'(x_0)}{1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si ottiene esattamente l'enunciato del ***Teorema di Lagrange****.*

10

Teorema di de l'Hopital

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni definite e derivabili* $I \setminus \{x_0\}$, *con* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I \setminus \{x_0\}$ *con*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Se esiste il limite del rapporto delle derivate prime:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\textit{finito o infinito})$$

Allora ***esiste*** *anche il limite del rapporto tra le due funzioni e coincide con* ℓ*:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\textit{finito o infinito})$$

11

Teorema di de l'Hopital

Note ed Estensioni Applicative:

- ***Limiti unilaterali:*** *Il teorema è valido anche per* $x \to x_0^+$ *oppure* $x \to x_0^-$.
- ***Limiti all'infinito:*** *Il teorema si estende direttamente al caso* $x \to +\infty$ *o* $x \to -\infty$, *assumendo che* f *e* g *siano derivabili in intervalli illimitati del tipo* $(a, +\infty)$ *o* $(-\infty, b)$.

12

Teorema di de l'Hopital

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\ln(1+x^2)}$

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

Funzioni convesse e concave

Definizione: Epigrafico, Convessità e Concavità

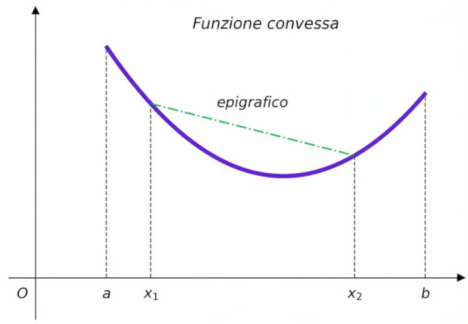
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una funzione.*

Si definisce ***epigrafico*** *(o sopragrafico) di* f *l'insieme:*

$$epi\ f := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b] \text{ e } y\geq f(x)\}$$

- ***Convessità:*** f *è* ***convessa*** *in* $[a,b]\Leftrightarrow epi\ f$ *è un* ***insieme convesso*** *in* $\mathbb{R}^2$.

Significa che la retta secante passante per due punti qualsiasi del grafico si trova sempre al di sopra del grafico stesso



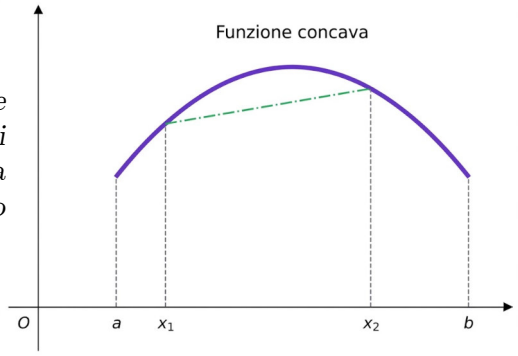
Funzioni convesse e concave

Definizione: Epigrafico, Convessità e Concavità

- ***Concavità:*** f *è* ***concava*** *in* $[a,b] \Leftrightarrow$ *l'****epigrafico***

hypo $f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]$ *e* $y \leq f(x)\}$ *è un* ***insieme concavo*** *in* $\mathbb{R}^2$.

Significa che la retta secante passante per due punti qualsiasi del grafico si trova sempre al di sotto del grafico stesso



Funzioni convesse e concave

Criteri di Convessità e Concavità

Criteri per determinare se una funzione è convessa o concava in un intervallo (a,b)

a) Se f è derivabile in (a,b) allora

f *è* ***convessa*** *in* (a,b) *se e solo se la sua derivata prima* $f'(x)$ *è una funzione* ***crescente****.*

$$\boxed{f \text{ è } convessa \Leftrightarrow f'(x) \text{ è } crescente}$$

Viceversa, f *è* ***concava*** *se e solo se* $f'(x)$ *è* ***decrescente****.*

$$\boxed{f \text{ è } concava \Leftrightarrow f'(x) \text{ è } decrescente}$$

Funzioni convesse e concave

Criteri di Convessità e Concavità

Criteri per determinare se una funzione è convessa o concava in un intervallo (a, b)*:*

b) Se la funzione ammette derivata seconda in (a, b)*:*

f *è* **convessa** *in* $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$

f *è* **concava** *in* $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$

Utilizzando il segno di $f''(x)$ *si può stabilire se* x_0 *è un punto di massimo o un punto di minimo relativo per f(x)*

17

Funzioni convesse e concave

Massimi e minimi relativi mediante derivata seconda

Sia f(x) derivabile due volte con derivata continua in un intorno di $x_0 \in (a,b)$ se:

$f'(x_0) = 0$, e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è *punto di minimo relativo*

$f'(x_0) = 0$, e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è *punto di massimo relativo*

Infatti, supponiamo che $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ *con* $f''(x) > 0$ *continua. Per il Teorema della permanenza del segno* $f''(x) > 0$ *in un* $I(x_0, \delta) \Rightarrow f'(x)$ *è convessa in I, per cui*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

18

Funzioni convesse e concave

Ma

$f'(x_0) = 0, \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \ \forall x, x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

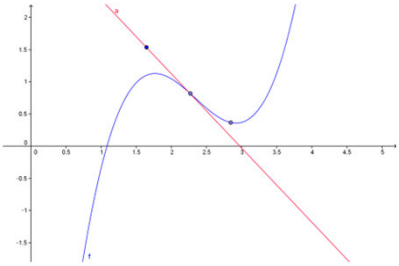
cioè x_0 *è di minimo relativo per f.*

Funzioni convesse e concave

Definizione di punto di Flesso

Sia f:(a,b)$\rightarrow R$ *e* $x_0 \in (a,b)$ *un punto di derivabilità per* $f(x)$, *oppure* $f'(x_0) = \pm\infty$, x_0 *si dice di flesso se esiste un intorno destro di* x_0 *in cui f è convessa* (*concava*) *ed un intorno sinistro in cui f è concava* (*convessa*) .

Se x_0 *è di flesso per f , ed esiste* $f''(x_0)$, *allora* $f''(x_0) = 0$



Funzioni convesse e concave

Esercizio

Calcolare i punti di estremo e i punti di flesso della funzione $f(x)=x^3 + 2x$

Studio del grafico di *f(x)*

1) *Dominio di* $f(x)$;
2) *Simmetrie;*
3) *Intersezioni con gli assi cartesiani;*
4) *Positività;*
5) *Studio agli estremi del dominio* (*eventuali asintoti*;
6) *Studio della derivata prima* (*crescenza, decrescenza, punti di estremo locale*)
7) *Studio della derivata seconda: Concavità e convessità, flessi*

Studio del grafico di *f(x)*

Asintoti

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l,$ $y = l$ *si chiama* ***asintoto orizzontale***

Se l'asintoto orizzontale non c'è (il limite sopra è infinito) allora potrebbe esserci quello obliquo.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$ $x = x_0$ *si chiama* ***asintoto verticale***

con x_0 *punto di accumulazione per f*

Studio del grafico di *f(x)*

Asintoti

Se esiste una retta di equazione y = mx+q:

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (mx+q)\} = 0$$

Allora y = mx +q si definisce asintoto obliquo per f(x).

Si ha $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};$ $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

Studio del grafico di f(x)

Esercizio
Si disegni il grafico delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}; \qquad f(x) = \frac{x^3}{2(1 + x)^2}$$

Esercizio
Si disegni il grafico della funzione $f(x) = xe^x$