

LEZIONE 23-10-2026

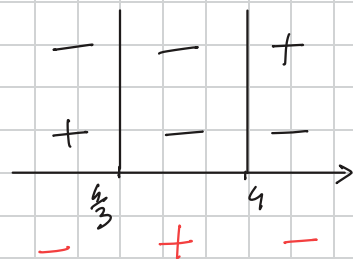
Svolgimento esercizi: 1) Disequazioni fratte:

a.) $\frac{2x-8}{4-3x} \leq 0$;

N: $2x-8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

D: $4-3x > 0 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$

$\Rightarrow x < \frac{4}{3} \vee x \geq 4$



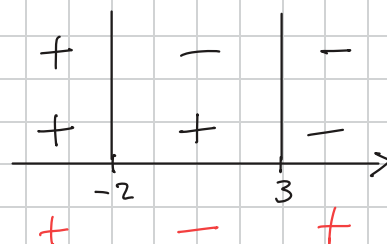
b.) $-\frac{1}{3-x} < \frac{x}{6-2x}$; $-\frac{1}{3-x} - \frac{x}{2(3-x)} < 0$;

$\frac{-2-x}{2(3-x)} < 0$

N: $-2-x > 0 \Rightarrow x < -2$

D: $2(3-x) > 0 \Rightarrow x < 3$

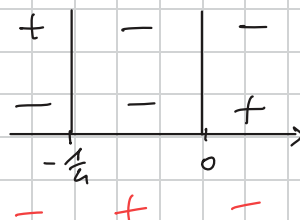
$\Rightarrow -2 < x < 3$



c.) $-\frac{3}{x} \geq 12$; $-\frac{3}{x} - 12 \geq 0$; $\frac{-3-12x}{x} \geq 0$;

N: $-3-12x \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{4}$

D: $x > 0 \Rightarrow x > 0$



$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x < 0$

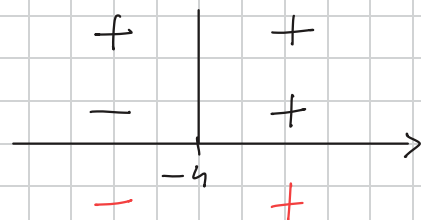
d.) $-\frac{x+3}{x+4} > -1$; $-\frac{x+3}{x+4} + 1 > 0$; $\frac{-(x+3) + (x+4)}{x+4} > 0$;

$\frac{1}{x+4} > 0$;

N: $1 > 0$ sempre

D: $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$

$\Rightarrow x > -4$



2) Equazioni esponenziali:

a.) $\frac{3^{2x}}{3^{x+1}} = \sqrt{3}$; $3^{2x-(x+1)} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x-x-1 = \frac{1}{2}$;

$x = \frac{3}{2}$

$$b. 4^x \cdot \sqrt{2^x} = 8^{x-1}; \quad 2^{2x} \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 2^{3(x-1)}; \quad 2^{2x+\frac{x}{2}} = 2^{3x-3} \Rightarrow$$

$$2x + \frac{x}{2} = 3x - 3; \quad \boxed{x = 6}$$

$$c. \frac{\sqrt[3]{2^{x-1}}}{\sqrt{4^{x+1}}} = \sqrt{8}; \quad \frac{2^{\frac{x-1}{3}}}{2^{\frac{2(x+1)}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}}; \quad 2^{\frac{x-1}{3} - (x+1)} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{3} - (x+1) = \frac{3}{2}; \quad \boxed{x = -\frac{17}{4}}$$

$$d. e^x \cdot e^{-2x+3} = \sqrt{\frac{1}{e}} \cdot e^{x+(-2x+3)} = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x + (-2x+3) = -\frac{1}{2};$$

$$\boxed{x = \frac{7}{2}}$$

3) Disequazioni esponenziali:

$$a. 2^x \cdot \sqrt{4^x} < 8; \quad 2^x \cdot 2^{\frac{2x}{2}} < 2^3; \quad 2^{x+x} < 2^3 \Rightarrow x+x < 3;$$

$$2x < 3; \quad \boxed{x < \frac{3}{2}}$$

$$b. e^{x^2-4x} \geq \frac{1}{e^3}; \quad e^{x^2-4x} \geq e^{-3} \Rightarrow x^2-4x \geq -3; \quad x^2-4x+3 \geq 0$$

diseq. di 2° grado: metodo grafico $\rightarrow$

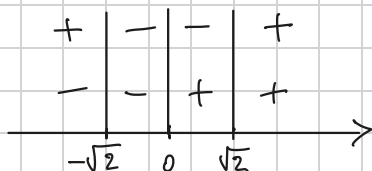


$$\Rightarrow \boxed{x \leq 1 \vee x \geq 3}$$

$$c. 2^x - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0; \quad 2^x \geq 2^{\frac{2}{x}} \Rightarrow x \geq \frac{2}{x}; \quad \text{diseq. fratte:}$$

$$x - \frac{2}{x} \geq 0; \quad \frac{x^2-2}{x} \geq 0; \quad N: x^2-2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq +\sqrt{2}$$

$$D: x > 0$$

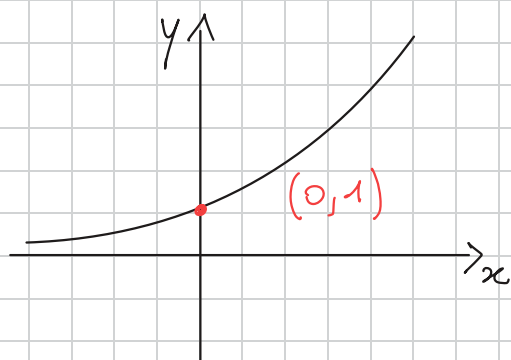


$$\Rightarrow \boxed{-\sqrt{2} \leq x < 0 \vee x \geq \sqrt{2}}$$

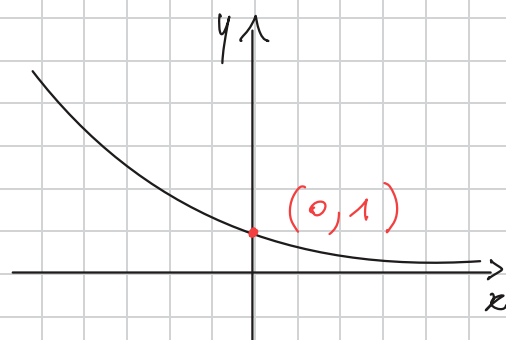
$$d. \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - \frac{16}{9} > 0; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \Rightarrow 2x < -2; \quad \boxed{x < -1}$$

Note: le funzioni esponenziali, esse del tipo $y = a^x$ hanno due caratteristiche importanti:

- 1) sono sempre positive, quindi il loro grafico sta tutto sopra l'asse delle x ;
- 2) se $a > 1$ sono crescenti, se $0 < a < 1$ sono decresc.



CASO $a > 1$



CASO $0 < a < 1$

Problema: come si risolve l'equazione esponenziale

$$2^x = 3$$

La soluzione (x) è << l'esponente da dare a 2 per ottenere 3 >>.

DEF: Si definisce LOGARITMO (in base " a " di " b ") e si scrive $\log_a b$ l'esponente da dare alla base " a " per ottenere l'argomento " b ".

Ad esempio, da $2^x = 3$ abbiamo $x = \log_2 3$.

Esempi:

$$1) \quad 8 = 2^3 \quad \leadsto \quad 3 = \log_2 8$$

$$2 = \log_3 9 \quad \leadsto \quad 3^2 = 9$$

Osservazione: in un logaritmo $\log_a b$, l'argomento "b" è sempre positivo, ossia $b > 0$. Questo perché è il risultato di una potenza. (★)

$$3) \quad x = \log_3 \left(\frac{1}{3} \right) \quad ? \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad ; \quad 3^x = 3^{-1}$$

ossia $x = -1$

$$4) \quad \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} (4\sqrt{2}) = x \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2} ;$$

$$(2^{-1})^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} ; \quad 2^{-x} = 2^{2+\frac{1}{2}} \Rightarrow -x = 2 + \frac{1}{2} ;$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$5) \text{ (Esercizio) } \log_3 \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{9} \right)^5 = ?$$

Notazione: a. "ln b" sta per " $\log_e b$ " e si legge
«LOGARITMO NATURALE».

b. " $\log b$ " sta per " $\log_{10} b$ ".

Proprietà dei logaritmi:

$$i) \quad \log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$ii) \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

$$iii) \quad n \cdot \log_a b = \log_a (b^n)$$

Esempi:

$$1) \quad \log_6 9 + \log_6 48 + \log_6 3 \stackrel{(i)}{=} \log_6 (9 \cdot 48 \cdot 3) = \log_6 1296 = \times$$

$$\rightarrow 6^x = 1296 \quad ; \quad 6^x = 6^4 \Rightarrow x=4$$

ovvero $\log_6 1296 = 4$.

$$2) \quad 2 \log 5 + 3 \log 2 - \log 20 =$$

("log" the base 10)

$$\stackrel{(ii)}{=} \log 5^2 + \log 2^3 - \log 20$$

$$\stackrel{(i)}{=} \log (5^2 \cdot 2^3) - \log 20 \stackrel{(ii)}{=} \log \left(\frac{5^2 \cdot 2^3}{20} \right) = \log \left(\frac{5^2 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 5} \right) =$$

$$= \log 10 = 1.$$

$\hookrightarrow$ in generale, qualunque base io scelgo, $\log_a a = 1$.

Equazioni logaritmiche: l'incognita compare almeno una volta come argomento di un logaritmo.

$$\log_2 \sqrt{x} - x^2 = 0$$

$$3 + \log_5 (x-2) = 8$$

NON LOGARITMICA

LOGARITMICA

La prima cosa da controllare per risolvere un'eq. logaritmica è che abbia significato, ossia in particolare che tutti gli argomenti dei logaritmi siano POSITIVI (vedi osservazione (★)).

Ad esempio, in $3 + \log_5 (x-2) = 8$, chiederemo che $(x-2) > 0$. Queste saranno le C.E. per logaritmi.

Esempi: scrivere le C.E. per le seguenti equazioni

$$1) \quad \log x + \log (x-2) = 1$$

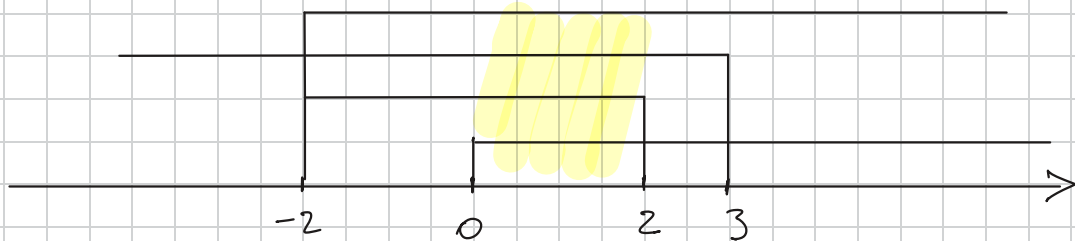
$$\text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

$$2) \log_2(2x+1) - \log_2(x+1) = 2 \quad \text{C.E.: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases}$$

$$3) \ln x - \ln(4-x^2) = \ln(3-x) - \ln(x+2)$$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ 4-x^2 > 0 \\ 3-x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < 2 \\ x < 3 \\ x > -2 \end{cases}$$

Quando queste 4 condizioni valgono contemporaneamente?



→ $0 < x < 2$ (una unica C.E. che riassume tutte le altre precedentemente scritte).

Per risolvere le eq. logaritmiche si eguagliano gli argomenti, oppure si usa la definizione.

$$\log x + \log(x-2) = 1$$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

$$\log[x(x-2)] = 1$$

$$\log[x(x-2)] = \log 10$$

⇓

$$x(x-2) = 10$$

$$x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 40}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$10^1 = x(x-2)$$

$$10 = x^2 - 2x$$

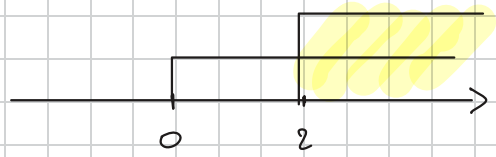
$$x^2 - 2x - 10 = 0$$

↓

[...]

Vediamo se le soluzioni trovate sono accettabili (come soddisfanno le C.E.)

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$$



Le soluzioni trovate sono $x = \frac{2-2\sqrt{11}}{2} = \frac{\cancel{2}(1-\sqrt{11})}{\cancel{2}} = 1-\sqrt{11}$

e $x = \frac{2+2\sqrt{11}}{2} = \frac{\cancel{2}(1+\sqrt{11})}{\cancel{2}} = 1+\sqrt{11}$

Poiché $1-\sqrt{11} \approx -2,5$ non soddisfa le C.E. $\rightarrow$ NON ACCETT.
 $1+\sqrt{11} \approx 4,5$ soddisfa le C.E. $\rightarrow$ ACCETTABILE.

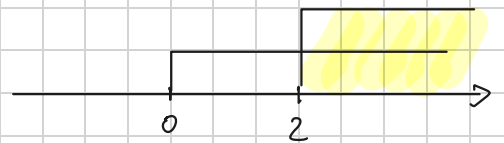
Esempi: risolvere le seguenti eq.

1) $\ln(1-x) + \ln(-2x) = 2$

(Esercizio)

2) $2\log_2 x - \log_2(2x-4) = 0$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ 2x-4 > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$$



$$\log_2 x^2 - \log_2(2x-4) = 0 ; \quad \log_2 \frac{x^2}{2x-4} = 0 ;$$

$$2^0 = \frac{x^2}{2x-4} ; \quad 1 - \frac{x^2}{2x-4} = 0 ; \quad \frac{2x-4-x^2}{2x-4} = 0 ;$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 ; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{-2}$$

impossibile.

Osservazione: abbiamo parlato di eq. fratte, esponenziali e logaritmiche, ma in generale tratteremo COMPOSIZIONI di esse. Ad esempio,

$$\log_5 \left(\frac{x+3}{x} \right) = 0$$

è un'equazione in fratte e logaritmica.

In particolare ho composto una frazione (PRIMA) con un logaritmo (DOPO). Lo stesso discorso vale con le funzioni $y = f(x)$: se consideriamo

$$y = e^{x^2+3x-4}$$

funzione in esponenziale
in polinomiale

abbiamo composto un polinomio (PRIMA) con una potenza (DOPO).

Disuguaglianze logaritmiche: analoghe alle disuguaglianze esponenziali per via del comportamento rispetto alla base "a".

a. $a > 1 \rightarrow$ il verso delle disuguaglianze tra logaritmi resta invariato tra gli argomenti;

b. $0 < a < 1 \rightarrow$ il verso delle disuguaglianze tra logaritmi viene invertito tra gli argomenti.

Esempi:

1) $\ln x < \ln(x+2)$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

(2) $\downarrow$ la base è $e \approx 2,71 > 1$

$$x < x+2 \quad ; \quad x-x < 2 \quad ; \quad 0 < 2$$

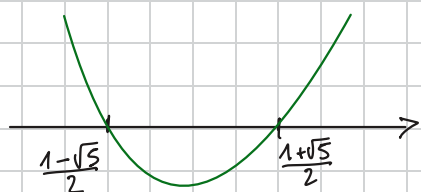
che ha soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$. Controllo le condizioni di esistenza $\Rightarrow$ otteniamo $\boxed{x > 0}$.

$$2) \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x-1) \geq 0 ; \quad \text{C.E.: } \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} [x(x-1)] \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \quad \leftarrow \text{In generale posso scrivere } 0 = \log_a 1.$$

(b) $\downarrow$ poiché la base è $\frac{1}{2} < 1$, cambio verso prendendo agli argomenti.

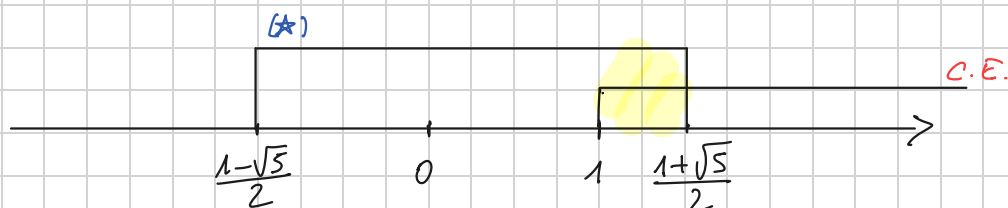
$$x(x-1) \leq 1 ; \quad x^2 - x - 1 \leq 0 ; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



Le soluzioni di $x^2 - x - 1 \leq 0$ sono

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\star)$$

Vediamo quali sono ACCETTABILI:



$\Rightarrow$ le soluzioni accettabili sono

$$1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esercizi:

$$1) \log(x-1) + \log(x+3) < \log(2-x) ;$$

$$2) \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+2}{x-2} \leq 1 ;$$

$$3) \log_2 x^3 \leq 2 \log_2 x ;$$

$$4) [\text{Difficile}] \ln(\ln(x^2-1)) < 0 ;$$

$$5) [\text{Difficile}] e^{2 \ln x} \geq 3 ;$$

$$6) [\text{Difficile}] \log_x (2-x) \leq 1.$$