

Modulo 1: Equazioni e disequazioni

Francesco Cannas Aghedu

Matematica 1 - A.A. 2026/2027

Le presenti slide costituiscono esclusivamente un supporto didattico allo studio e alla frequenza del corso. Esse non intendono fornire una trattazione completa ed esaustiva degli argomenti affrontati.

La trattazione sarà integrata e approfondita durante le lezioni attraverso spiegazioni, osservazioni, dimostrazioni, esempi ed esercizi svolti.

Ai fini della preparazione dell'esame, si raccomanda pertanto di integrare lo studio delle slide con gli appunti presi a lezione e con tutto il materiale discusso durante il corso e le esercitazioni.

Equazioni e disequazioni algebriche

Definizione

Un'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale cerchiamo gli eventuali valori che, sostituiti a una o più lettere, dette **incognite**, la rendono vera.

Esempi

- $4x - 1 = 3x + 1$ è un'equazione nell'incognita x
- $2x - y + 1 = 0$ è un'equazione con due incognite, x e y

In un'equazione chiamiamo *soluzioni* o *radici* i valori, da attribuire alle incognite, che rendono uguali il primo e il secondo membro dell'equazione. Risolvere un'equazione vuol dire trovarne tutte le soluzioni.

Il *grado* di un'equazione in una sola incognita è il massimo esponente con cui compare l'incognita.

Equazioni di primo grado

Le equazioni di primo grado sono chiamate anche **equazioni lineari**. Risoluzione: svolgiamo i calcoli nei due membri e usiamo i principi di equivalenza per giungere alla forma

$$ax = b.$$

Poi distinguiamo tre casi:

- equazione determinata, $a \neq 0$
- equazione indeterminata, $a = 0$ e $b = 0$
- equazione impossibile, $a = 0$ e $b \neq 0$

Esempi

- $(x - 4)^2 - 3(x - 2)(x + 1) = -2x(x + 1) - 4x$ è un'equazione determinata
- $8x - (2x - 3)(2x + 3) = 9 + 4(2x - x^2)$ è un'equazione indeterminata
- $x(1 + 4x) = 4(x - 1)(x + 1) + x$ è un'equazione impossibile

Definizione

Un'equazione è di **secondo grado** se, dopo aver applicato i principi di equivalenza già studiati per le equazioni di primo grado, si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

La forma $ax^2 + bx + c = 0$ è detta **forma normale**, dove x è l'incognita e a, b, c sono detti *coefficienti* dell'equazione. Il coefficiente c è detto anche *termine noto*.

- Se tutti i coefficienti sono diversi da 0, l'equazione è **completa**.
- Altrimenti è **incompleta**.

Una soluzione è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza.

Chiamiamo **discriminante**, e la indichiamo con la lettera greca Δ (“delta”), l’espressione

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

L’espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

è detta **formula risolutiva**:

- se $\Delta > 0$, l’eq. ha due soluzioni reali e distinte $x_1 \neq x_2$
- se $\Delta = 0$, l’eq. ha due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2$
- se $\Delta < 0$, l’eq. non ha soluzioni reali ed ammette due soluzioni complesse coniugate

Esempi

- $4x^2 - 7x - 2 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte
- $36x^2 - 10x = 25(2x - 1)$ ha due soluzioni reali coincidenti
- $x^2 + 3x + 6 = 0$ non ha soluzioni reali
- $3(2 - x)(x + 2) = x^2$ ha due soluzioni reali e distinte
- $(\sqrt{11} - x)(\sqrt{11} + x) = 11$ ha due soluzioni reali coincidenti
- $(x + 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte

Equazioni di grado superiore al secondo

Le soluzioni di qualunque equazione di secondo grado possono essere espresse in termini di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e radice quadrata, utilizzando la nota formula risolutiva.

Sebbene molto più complesse, formule analoghe per equazioni di terzo e quarto grado, utilizzanti radici cubiche e radici quarte (*formule per radicali*), sono note fin dal XVI secolo.

Non esistono invece formule per radicali per risolvere equazioni polinomiali di grado superiore al quarto (*Teorema di Abel-Ruffini* (Abel 1824, Ruffini 1799)).

Si può dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di grado n ammette al più n radici reali (conseguenza del *Teorema fondamentale dell'algebra*), quindi un'equazione di grado n ha in $\mathbb{R}$ un numero di soluzioni minore o uguale a n .

Definizione

*Un'equazione **prodotto** è un'equazione in cui il polinomio ridotto in forma normale è scomposto nel prodotto di due o più fattori.*

La risoluzione delle equazioni prodotto sfrutta la *legge di annullamento di un prodotto*:

- se un prodotto di fattori è nullo, almeno uno dei fattori è nullo
- se uno dei fattori è nullo, il prodotto è nullo

Esempi

- $2x^3 - 3x^2 + x = 0$
- $(2x + 3)(-5x + 6)(4x - 3) = 0$
- $(x^2 + 8x + 15)(x + 3)^2(7x^2 - 2x + 3) = 0$
- $x^2(2x - 3)^3(x + 5) = 0$

Definizione

Un'equazione binomia è un'equazione riconducibile alla forma

$$ax^n + b = 0$$

dove n è un numero intero positivo e $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$.

- per $n = 1$ l'eq. è di primo grado, per $n = 2$ l'eq. è di secondo grado (eq. pura)
- negli altri casi, per risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$, basta scriverla nella forma $x^n = -b/a$ e utilizzare la definizione di radice n -esima di un numero

Esempi

- l'esponente n è dispari: $x^5 + 32 = 0$, $x^5 - 32 = 0$, $x^7 + 7 = 0$
- l'esponente n è pari: $x^2 - 4 = 0$, $x^4 - 32 = 0$, $x^4 + 32 = 0$

Definizione

Un'equazione *trinomia* è un'equazione riconducibile alla forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove n è un numero intero positivo e $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a, b, c \neq 0$.

Se $n = 2$, le equazioni trinomie si chiamano *biquadratiche*. **In generale**, per risolvere un'equazione trinomia, si pone $t = x^n$ e si risolve l'equazione ausiliaria di secondo grado in t . Trovate le radici reali $t_{1,2}$ (se esistono), si risolvono le equazioni binomie $x^n = t_1$ e $x^n = t_2$.

Esempi

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0, \quad 16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$$

Definizione

*Un'equazione numerica è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore dei suoi termini.*

In generale, per risolvere un'equazione fratta si seguono questi passaggi:

- 1 determinare le condizioni di esistenza (C.E.) delle frazioni algebriche che costituiscono l'equazione per non far perdere di significato alle frazioni
- 2 risolvere l'equazione e determinare le eventuali soluzioni “candidate”
- 3 controllare che le soluzioni siano accettabili, cioè che soddisfino le C.E.; soltanto le soluzioni accettabili sono effettivamente soluzioni dell'equazione

Esempi

- $\frac{2x - 4}{x - 3} = 0$

- $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$

- $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = 0$

- $\frac{(4x^2 + 12x + 9)^2(x^2 + 4)(3x + 2)}{x^2 + 1} = 0$

- $\frac{(x^2 - 9)(x + 3)(3x - 9)}{x^2 + 3x + 9} = 0$

- $\frac{1 - x}{2x + 3} - \frac{2 + x}{2x - 3} = \frac{x^2}{4x^2 - 9}$

Definizione

Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale cerchiamo quali valori, sostituiti a una o più lettere, rendono vera la disuguaglianza stessa.

Cerchiamo i valori di x tali che

$$x - 3 > 15$$

chiamiamo:

- *soluzioni* i valori che rendono vera la disuguaglianza: ad esempio $x = 20$
- *incognite* le lettere per le quali cerchiamo le soluzioni: x

Risolvere la disequazione significa trovare tutte le soluzioni: $x > 18$.

Il grado di una disequazione in una sola incognita è il massimo esponente con cui compare l'incognita.

Rappresentazione delle soluzioni

Per scrivere o rappresentare graficamente le soluzioni di una disequazione usiamo gli *intervalli* di numeri reali.

Un intervallo può essere:

- **illimitato** se è costituito da tutti i numeri che precedono un certo numero (intervallo *illimitato inferiormente* o a sinistra) o che lo seguono (intervallo *illimitato superiormente* o a destra)
- **limitato** se è formato da tutti i valori compresi fra due numeri

$x < -5$
intervallo illimitato
inferiormente

$x > 1$
intervallo illimitato
superiormente

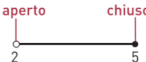
$8 < x < 10$
intervallo limitato

Rappresentazione delle soluzioni

Il numero o i numeri con i quali inizia o termina l'intervallo sono detti **estremi**. Rispetto a un estremo un intervallo può essere:

- **aperto** se non comprende l'estremo
- **chiuso** se comprende l'estremo

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ si leggono *più infinito* e *meno infinito* e si usano per indicare che un intervallo è illimitato a destra o a sinistra, rispettivamente.

Intervallo limitato, aperto a sinistra, chiuso a destra.		$2 < x \leq 5$ aperto (under 2), chiuso (under 5)	$]2; 5]$ aperto (under 2), chiuso (under 5)
Intervallo illimitato, chiuso a sinistra.		$x \geq -7$	$[-7; +\infty[$
Intervallo illimitato, aperto a destra.		$x < 3$	$] -\infty; 3[$

L'intervallo $]2; 5]$ può essere rappresentato da $(2; 5]$, analogamente per $[-7; +\infty)$ e $(-\infty; 3)$.

Disequazioni intere di primo grado

Per risolvere una disequazione di primo grado numerica intera, dobbiamo svolgere i calcoli nei due membri e giungere a una delle forme

$$ax < b, \quad ax \leq b, \quad ax > b, \quad ax \geq b$$

e poi, quando possibile, dividere ambo i membri per il coefficiente a di x .

In base al tipo di insieme delle soluzioni, una disequazione può essere: *determinata*, *impossibile* (nessuna soluzione) o *sempre verificata* (infinite soluzioni).

Esempi

- $x - 6 > 3x$ è una disequazione determinata
- $2(x + 3) - 3x < 1 - x$ è una disequazione impossibile
- $(x + 1)^2 - 2x > x^2 - 6$ è una disequazione sempre verificata

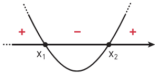
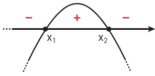
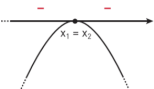
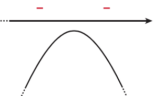
Disequazioni intere di secondo grado

Definizione

Una disequazione è di **secondo grado** se, ridotta in forma normale, si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c > (<, \leq, \geq) 0, \quad a \neq 0.$$

In generale, per risolvere una disequazione di secondo grado, troviamo le radici x_1 e x_2 dell'equazione associata e studiamo il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Esempi

- $x^2 - 1 \geq 0$
- $-x^2 - x + 12 > 0$
- $x^2 + 7 \leq 0$
- $x^2 + 4 \geq 0$
- $x^2 - 9 \leq 0$
- $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

Disequazioni prodotto

Definizione

Una **disequazione prodotto** è una disequazione in cui il polinomio ridotto in forma normale può essere scomposto in un prodotto di due o più fattori irriducibili.

Si risolvono studiando il segno del prodotto (utilizzando le ben note regole dei segni).

Esempi

- $(x - 4)(2x + 1) \leq 0$
- $(x + 2)^2(3 - x) > 0$
- $2x^3 - 3x^2 + x > 0$
- $(2x + 3)(-5x + 6)(4x - 3) \leq 0$
- $x^2(2x - 3)^3(x + 5) \geq 0$

Disequazioni numeriche fratte

Definizione

Una disequazione numerica è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore dei suoi termini.

In generale, per risolvere una disequazione fratta:

- 1 trasformiamo la disequazione in una delle forme normali:

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} < 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$$

con $N(x)$ e $D(x)$ polinomi nell'incognita x .

- 2 studiamo il segno della frazione per determinare le soluzioni della disequazione (in una disequazione in forma normale non possiamo eliminare il denominatore, come si fa con le equazioni. Infatti, moltiplicare per un'espressione di segno incognito può invertire il verso della disequazione).

Esempi

- $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$

- $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$

- $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} > 0$

- $\frac{(1-x)^4(x-2)^3}{x(x-3)^2} > 0$

- $\frac{(x^2 - 9)(x+3)(3x-9)}{x^2 + 3x + 9} < 0$

- $\frac{1-x}{2x+3} - \frac{2+x}{2x-3} \geq \frac{x^2}{4x^2-9}$

Definizione

*Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni, nella stessa incognita, per le quali cerchiamo tutte le soluzioni comuni.*

Un sistema può avere un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (sistema impossibile)

In generale, per risolvere un sistema di disequazioni:

- 1 risolviamo ognuna delle disequazioni
- 2 costruiamo uno schema grafico con gli intervalli che rappresentano gli insiemi delle soluzioni
- 3 determiniamo l'intersezione degli insiemi delle soluzioni, colorando la zona del grafico in cui abbiamo soluzioni comuni a tutte le disequazioni

Esempi

- $$\begin{cases} x - 1 < 3 \\ 3x + 15 \geq 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2(5x - 3) > 3(x - 1) \\ \frac{1}{2}x - 1 < \frac{2x - 3}{3} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x^2 - 5 < 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \frac{3}{x - 2} > 1 \\ \frac{x - 5}{x - x^2} < 0 \end{cases}$$

Definizione

Il **valore assoluto** di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero, se questo è negativo. In formule:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto è quindi sempre positivo o nullo.

Se invece della variabile x consideriamo un'espressione $A(x)$, detta *argomento*, abbiamo:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

Equazioni del tipo $|A(x)| = a$, con $a \in \mathbb{R}$

In generale, $|A(x)| = a$:

- se $a > 0$ è equivalente ad $A(x) = \pm a$
- se $a = 0$ è equivalente ad $A(x) = 0$
- se $a < 0$ l'equazione non ha soluzioni

Esempi

- $|2x + 10| = 0$
- $|3 - x| = -7$
- $|6 - 12x| = 1$
- $|x^2 - 2x| = 1$
- $\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right| = 0$

Disequazioni del tipo $|A(x)| < a$, con $a \in \mathbb{R}$

In generale, $|A(x)| < a$:

- se $a > 0$ è equivalente ad $-a < A(x) < a$, cioè a risolvere il sistema
$$\begin{cases} A(x) < a \\ A(x) > -a \end{cases}$$
- se $a < 0$ la disequazione non ha soluzioni

Esempi

- $|3 - x| < -7$
- $|x + 3| < 2$
- $|6 - 12x| < 1$
- $|x^2 - 2x| < 1$
- $|2x + 10| \leq 0$

Disequazioni del tipo $|A(x)| > a$, con $a \in \mathbb{R}$

In generale, $|A(x)| > a$:

- se $a > 0$ è equivalente ad $A(x) < -a \vee A(x) > a$
- se $a < 0$ la disequazione è sempre verificata

Esempi

- $|3 - x| > -7$
- $|6 - 12x| > 1$
- $|2x + 10| \geq 0$
- $|x^2 - 2x| > 1$
- $\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right| > 0$

Definizione

Un'equazione (disuguaglianza) è **irrazionale** se in essa ci sono radicali contenenti l'incognita.

Consideriamo un'equazione irrazionale del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

con $n \geq 2$ naturale. Distinguiamo due casi:

- 1 se n è dispari, l'equazione si risolve elevando alla potenza n -esima entrambi i membri, cioè:

$$A(x) = [B(x)]^n$$

- 2 se n è pari, è necessario studiare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

Esempi

- $\sqrt[3]{x+3} = 2$
- $\sqrt[3]{x(x^2+5)} - 1 - x = 0$
- $\sqrt{x+3} = 2$
- $\sqrt{x^2-4} = -3$
- $\sqrt{x+1} - x - 1 = 0$
- $\sqrt{2x^2+x+4} = 2x-1$
- $\sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}} = 0$

Disequazioni del tipo $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ o $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$

Se n è **dispari**, le disequazioni si risolvono elevando alla potenza n -esima entrambi i membri, ottenendo così una disequazione equivalente a quella data, cioè:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \text{è equivalente a} \quad A(x) < [B(x)]^n;$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \text{è equivalente a} \quad A(x) > [B(x)]^n.$$

Esempi

- $\sqrt[3]{6 - x + x^3} \leq x$
- $\sqrt[3]{x^2 + 1} \geq 0$
- $\sqrt[3]{x^2 - 1} < 2$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

Se $n = 2$, la disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

Esempi

- $\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$
- $\sqrt{x + 2} < 3$
- $\sqrt{x^2 + 6x} \leq 3$
- $\sqrt{x^2 - 9} < -3$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Se $n = 2$, l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Esempi

- $\sqrt{x-1} > x-3$
- $\sqrt{x^2-1} \geq 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{x+2} > 3$
- $\sqrt{x^2-9} > -7$

Equazioni e disequazioni esponenziali

Potenze con esponente razionale

Sia a un numero reale ed n un numero razionale. Definiamo le potenze di *base* a ed *esponente* n nel modo seguente:

- esponente naturale:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a, \quad n - \text{volte},$$

poniamo $a^1 = a$ e $a^0 = 1$ per $a \neq 0$

- esponente intero negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

- esponente razionale:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0.$$

Osserviamo che l'introduzione degli esponenti razionali richiede che la base delle potenze sia positiva per evitare alcune contraddizioni.

Potenze con esponente reale

Come possiamo definire $3^{\sqrt{2}}$? L'esponente

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379 \dots$$

come ogni numero irrazionale, può essere approssimato per eccesso o per difetto da due successioni di numeri decimali finiti:

$$1,4 = \frac{14}{10} \quad 1,41 = \frac{141}{100} \quad 1,414 = \frac{1414}{1000} \quad 1,4142 = \frac{14142}{10000} \quad \dots \quad \text{per difetto}$$

e

$$1,5 = \frac{15}{10} \quad 1,42 = \frac{142}{100} \quad 1,415 = \frac{1415}{1000} \quad 1,4143 = \frac{14143}{10000} \quad \dots \quad \text{per eccesso}$$

Consideriamo ora le seguenti successioni di potenze con base 3:

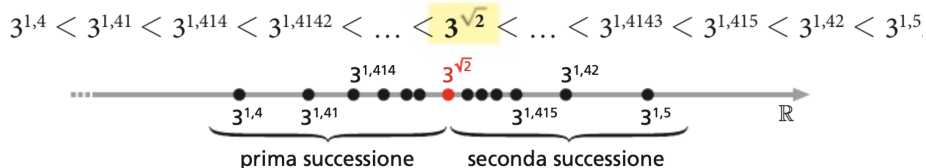
$$3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414}, \quad 3^{1,4142} \quad \dots$$

e

$$3^{1,5} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,415}, \quad 3^{1,4143} \quad \dots$$

Potenze con esponente reale

Si può dimostrare che esiste un unico numero reale, che indichiamo con $3^{\sqrt{2}}$, più grande di tutti gli elementi della prima successione e più piccolo di tutti quelli della seconda:



Definizione

La potenza a^x di un numero reale $a > 0$ con esponente reale $x > 0$ è l'unico numero reale:

- maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto se $a > 1$ o per eccesso se $0 < a < 1$;
- minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso se $a > 1$ o per difetto se $0 < a < 1$.

Si definiscono poi:

- $1^x = 1$ per qualunque numero reale x
- $0^x = 0$ per qualunque numero reale x positivo
- $a^0 = 1$ per qualunque numero reale a positivo;

Anche per le potenze con esponente reale valgono le ben note proprietà:

- prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$
- potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$

Definizione

Un'equazione è **esponenziale** se contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Consideriamo l'equazione esponenziale in forma canonica

$$a^x = b, \quad \text{con } a > 0, a \neq 1.$$

- Se $b \leq 0$, l'equazione è *impossibile* perché a^x è sempre positivo.
- Se $b > 0$, l'equazione ha sempre una e una sola soluzione: è possibile risolvere l'equazione in modo immediato, se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base.

Esempi

- $25^x = 125$
- $3^x = -9$
- $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$
- $\frac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}$
- $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$, porre $t = 2^x$
- $4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$, porre $t = 2^x$
- $(2^x - 1)(9^x - 3)(3^{2x} - 3^x - 6) = 0$

Definizione

Una disequazione è **esponenziale** se contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Ricordando che a^x è sempre positivo, alcune disequazioni esponenziali sono immediate. Ad esempio, sono sempre verificate le disequazioni:

$$3^x > -5, \quad e^x > 0, \quad 5^{-x+3} > -1,$$

sono impossibili le disequazioni:

$$e^x < -2, \quad 3^x < 0, \quad 3^{-x} < -3.$$

Per quelle non immediate valgono osservazioni analoghe a quelle fatte sulle equazioni esponenziali, ricordando che:

- se $a > 1$, $a^t > a^z$ se e solo se $t > z$
- se $0 < a < 1$, $a^t > a^z$ se e solo se $t < z$

Esempi

- $8^{x+2} > 32^{4x+1}$

- $8 \cdot 2^x \leq 3^{x+3}$

- $\frac{3^{x+1}}{27^{2x}} < \frac{1}{3^{x^2+5}}$

- $\frac{4^x \cdot 16^{x+1}}{8^{x-3}} < 1$

- $\frac{e^x - 1}{9^x - 3} \geq 0$

- $|2^x - 4| < 4$

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Definizione

*Dati due numeri reali positivi a e b , con $a \neq 1$, chiamiamo **logaritmo in base a di b** l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b :*

$$\log_a b = x \quad \text{se e solo se} \quad a^x = b.$$

Il numero b viene detto *argomento* del logaritmo.

Dalla definizione otteniamo:

- $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$
- $a^{\log_a b} = b$, perché $\log_a b$ è l'esponente a cui elevare a per ottenere b

Indicheremo con $\log$ il logaritmo decimale (in base 10) e con $\ln$ il logaritmo naturale (in base e).

Logaritmo di un prodotto

Teorema

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei due fattori:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad \text{con } b > 0, c > 0.$$

Dimostrazione. Poniamo: $x = \log_a b$, $y = \log_a c$. Per la definizione di logaritmo:

$$a^x = b, \quad a^y = c.$$

Moltiplichiamo membro a membro le due uguaglianze:

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c,$$

] prodotto di due potenze di uguale base

$$a^{x+y} = b \cdot c,$$

] definizione di logaritmo

$$x + y = \log_a(b \cdot c),$$

] sostituzione: $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c),$$

] e per simmetria $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$

Logaritmo di un quoziente

Teorema

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad \text{con } b > 0, c > 0.$$

Dimostrazione. Poniamo $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$. Per la definizione di logaritmo, $a^x = b$ e $a^y = c$. Dividiamo membro a membro le due uguaglianze e per le proprietà delle potenze

$$a^{x-y} = \frac{b}{c},$$

] definizione di logaritmo

$$x - y = \log_a \frac{b}{c},$$

] sostituzione: $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c},$$

] e per simmetria

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Teorema

Il logaritmo della potenza di un numero positivo elevato a un esponente reale è uguale al prodotto di quell'esponente per il logaritmo del numero positivo:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b, \quad \text{con } b > 0, \quad n \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Data l'uguaglianza $a^x = b$, elevando a n i due membri, otteniamo:

$$(a^x)^n = b^n,$$

] potenza di una potenza

$$a^{nx} = b^n,$$

] definizione di logaritmo

$$nx = \log_a b^n,$$

] sostituzione: $x = \log_a b$

$$n \log_a b = \log_a b^n,$$

] e per simmetria $\log_a b^n = n \log_a b.$

Applicare le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo.

Esempi

- $\log 100 + 2 \log 2 - \log 40$
- $\log_2 50 - \log_2 300 + \log_2 3$
- $\frac{1}{2} \log 81 - \log \frac{9}{7} + \log \frac{10}{7}$
- $\frac{1}{3} \log 27 + \log 3 - \log 9$
- $\frac{1}{4} \log_2 81 + 2 \log_2 \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{9} + \log_2 2$
- $\log_3 \frac{9}{7} - \log_3 \frac{27}{7} + \log_3 \sqrt{3}$

Definizione

Un'equazione è **logaritmica** se contiene l'incognita nell'argomento di almeno un logaritmo.

In generale, per risolvere una equazione logaritmica:

- 1 si determinano le condizioni di esistenza (Argomento > 0) di tutti i logaritmi contenenti l'incognita
- 2 si applicano le proprietà dei logaritmi per ricondurre l'equazione data alla forma canonica $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, dove $A(x)$ e $B(x)$ indicano due argomenti nell'incognita x
- 3 dal momento che

$$\log_a A(x) = \log_a B(x) \quad \text{se e solo se} \quad A(x) = B(x)$$

per determinare le soluzioni dell'equazione logaritmica è sufficiente cercare le soluzioni di $A(x) = B(x)$ che soddisfino le condizioni di esistenza.

Esempi

- $\log_3(2x + 4) = 2$
- $\log_2(x - 2) + \log_2 x = \log_2(9 - 2x)$
- $4.30 = -\log(1.2 \cdot 10^{-2}) + \log \frac{2.8}{x}$
- $4.30 = -\log(1.2 \cdot 10^{-2}) + \log \frac{x}{0.0117}$
- $\ln x + 2 \ln x = 1$
- $\log_3(x^2 + x) - \log_3(x^2 - x) = 1$
- $\log_3 \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = 1$
- $\ln \frac{x + 1}{x - 1} = 0$
- $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0$
- $2 \log_{1/2}^2 x - 5 \log_{1/2} x + 2 = 0$

Disequazioni logaritmiche

Definizione

Una disequazione è **logaritmica** se contiene l'incognita nell'argomento di almeno un logaritmo.

In generale, per risolvere una disequazione logaritmica:

- 1 si determinano le condizioni di esistenza (Argomento > 0) di tutti i logaritmi contenenti l'incognita
- 2 si applicano le proprietà dei logaritmi per ricondurre la disequazione data alla forma canonica $\log_a A(x) < \log_a B(x)$ (o $\log_a A(x) > \log_a B(x)$), dove $A(x)$ e $B(x)$ indicano due argomenti nell'incognita x
- 3 dal momento che
 - per $a > 1$, $\log_a A(x) < \log_a B(x)$ se e solo se $A(x) < B(x)$
 - per $0 < a < 1$, $\log_a A(x) < \log_a B(x)$ se e solo se $A(x) > B(x)$

per determinare le soluzioni della disequazione logaritmica si risolve il sistema formato dalle condizioni di esistenza trovate al punto 1 e la disequazione che si ottiene dal punto 3.

Esempi

- $\log_{1/3}(2x + 1) > 0$
- $\ln(x - 3) < 1$
- $\log_{11}(2 - x) - \log_{11}(x + 2) > 0$
- $\ln \frac{x + 1}{x - 1} > 0$
- $\ln^2 x + \ln x < 0$
- $\frac{\log(x - 1)}{\log x - 1} \leq 0$

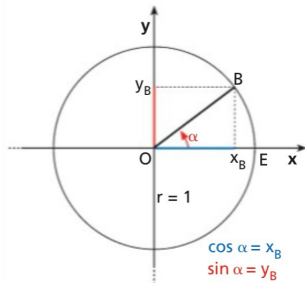
Equazioni e disequazioni goniometriche

Definizione di seno e coseno

Definizione

Consideriamo la circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$ e un angolo orientato α . Sia B il punto della circonferenza goniometrica associato ad α . Definiamo **coseno** e **seno** dell'angolo α , rispettivamente, il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto B :

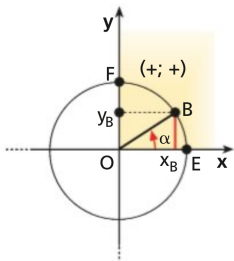
$$\cos \alpha = x_B \quad \sin \alpha = y_B$$



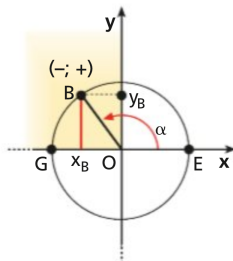
Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1 , quindi dalla definizione segue immediatamente che:

- $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, per ogni angolo α
- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, per ogni angolo α
- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ detta **prima relazione fondamentale**

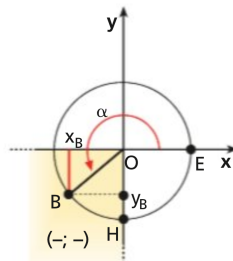
Variazioni del seno e coseno sulla circonferenza goniometrica



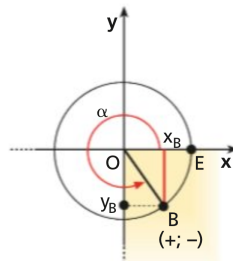
a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza e si trova nel **primo quadrante**, la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive. Man mano che B si avvicina al punto F , l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In F , $x_F = 0$, $y_F = 1$.



b. Quando B percorre la circonferenza nel **secondo quadrante**, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Mentre B si avvicina a G , sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono. In G , $x_G = -1$, $y_G = 0$.



c. Se B si trova nel **terzo quadrante**, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che B si avvicina a H , l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce. In H , $x_H = 0$, $y_H = -1$.



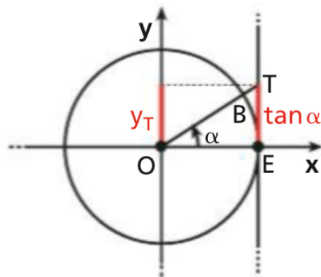
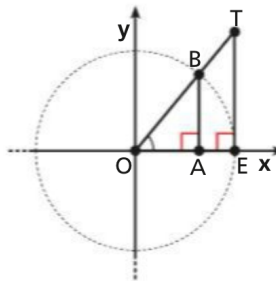
d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, nel **quarto quadrante**, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a E , sia l'ascissa sia l'ordinata di B aumentano. In E , $x_E = 1$, $y_E = 0$.

Definizione di tangente

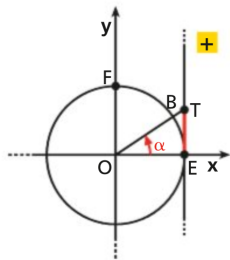
Definizione

Consideriamo un angolo orientato α sulla circonferenza goniometrica. Sia B il punto della circonferenza goniometrica associato ad α . Definiamo **tangente** dell'angolo α , il rapporto

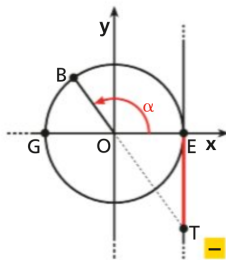
$$\tan \alpha = \frac{y_B}{x_B} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



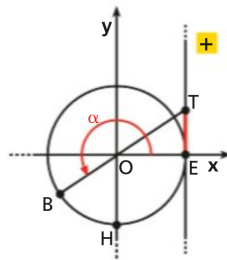
Variazioni della tangente sulla circonferenza goniometrica



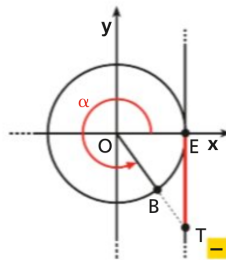
a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, nel **primo quadrante**, l'ordinata di T è positiva e aumenta man mano che B si avvicina al punto F . Quando $B \equiv F$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e la tangente non esiste.



b. Quando B percorre la circonferenza nel **secondo quadrante**, l'ordinata di T è negativa e aumenta fino a quando $B \equiv G$, in cui $y_T = 0$.

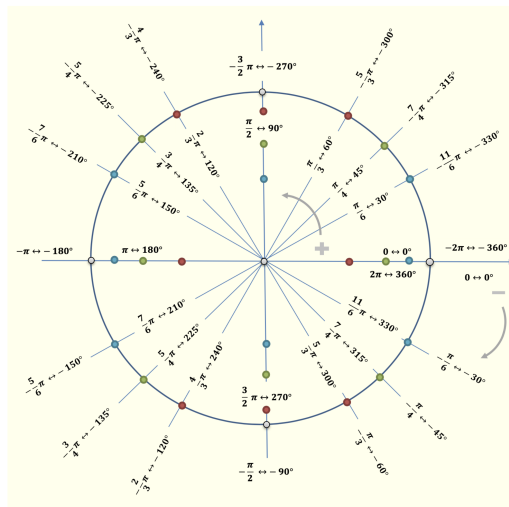


c. Se B si trova nel **terzo quadrante**, l'ordinata di T è di nuovo positiva e aumenta fino a quando $B \equiv H$ e T non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.



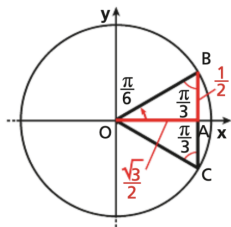
d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza nel **quarto quadrante**, l'ordinata di T ritorna negativa e aumenta fino allo 0.

Posizione di angoli ricorrenti sulla circonferenza goniometrica

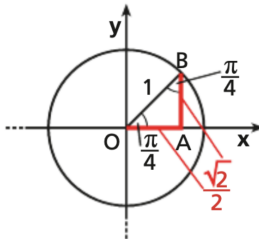


Angoli particolari

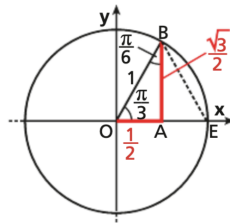
Mediante le proprietà delle figure geometriche riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.



$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan \frac{\pi}{4} &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \tan \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Equazioni goniometriche elementari

Definizione

Un'equazione è detta **goniometrica elementare** se è del tipo

$$\sin x = a, \quad \cos x = b, \quad \tan x = c,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

L'equazione $\sin x = a$

- ammette sempre soluzione con $-1 \leq a \leq 1$
- è impossibile quando $a > 1$ oppure $a < -1$

analogamente, l'equazione $\cos x = b$

- ammette sempre soluzione con $-1 \leq b \leq 1$
- è impossibile quando $b > 1$ oppure $b < -1$.

L'equazione $\tan x = c$ ammette sempre soluzioni.

Equazioni goniometriche elementari

- $\sin x = a$:

se $-1 \leq a \leq 1$, $x = \alpha + 2k\pi \vee$
 $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$;

se $a < -1 \vee a > 1$, impossibile.

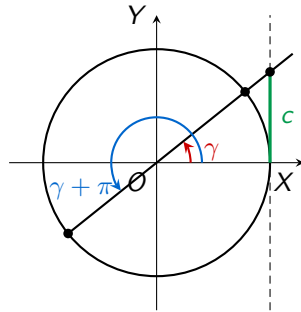
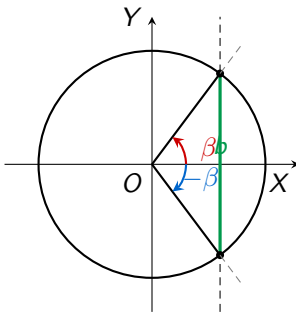
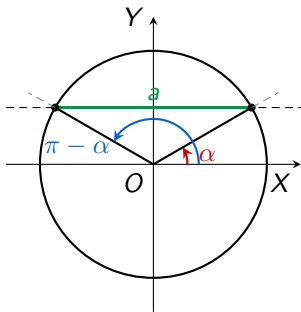
- $\cos x = b$:

se $-1 \leq b \leq 1$,
 $x = \pm\beta + 2k\pi$;

se $b < -1 \vee b > 1$, impossibile.

- $\tan x = c$:

determinata $\forall c \in \mathbb{R}$,
 $x = \gamma + k\pi$.



Esempi

- $\sin x = 0$
- $\sin x = 1$
- $2 \sin x = \sqrt{3}$
- $\sqrt{8} \sin x = 2$
- $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$
- $3 \sin x - 1 = 0$
- $2 \sin x - 4 = 0$
- $2 \sin(x - \pi/6) - \sqrt{3} = 0$
- $\cos x = 0$
- $\cos x = -1$
- $2 \cos x + 1 = 0$
- $8 \cos x - 4 = 0$
- $2(1 + \cos x) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$
- $2 \cos(5x) - \sqrt{2} = 0$
- $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$
- $3 \tan x - \sqrt{3} = 0$
- $\tan x = -3$
- $3 \tan(x + \pi/3) - 3\sqrt{3} = 0$
- $2 \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$
- $2(\tan x + 1) - (\tan^2 x + 4) + 3 = -\tan x(\tan x + 1) + 4 \tan x + 2$

Disequazioni goniometriche elementari

Definizione

Una disequazione è detta **goniometrica elementare** se è del tipo

$$\sin x > a, \quad \cos x > b, \quad \tan x > c, \quad \text{o analoghe con } \geq, <, \leq .$$

Esempi

- $\sin x < 0$
- $\sin x \geq 1$
- $2 \sin x - 1 < 0$
- $2 \sin x - \sqrt{3} \geq 0$
- $2(\tan x + 1) - (\tan x + 2)^2 < -\tan x(\tan x + 1) - 3$
- $4 \cos x + 2 < 0$
- $2 \cos x - 1 \geq 0$
- $\cos x + 1 \geq 0$
- $2 \cos x + \sqrt{3} \geq 0$
- $2 \cos(x + \pi/3) \geq \sqrt{2}$
- $\tan x > 1$
- $\tan x \geq 1$
- $3 \tan x + \sqrt{3} < 0$