

1. LE DERIVATE SECONDE
2. LA MATRICE HESSIANA
3. TEOREMA DI SCHWARZ
4. CONSEGUENZE
5. IL DIFFERENZIALE SECONDO
6. FORMULA DI TAYLOR AL II ORDINE

1. LE DERIVATE SECONDE

SE $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ CON $A \subset \mathbb{R}^n$ AMMETTE LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ IN $B_r(P) \subset A$, E SE ESISTE $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ NEL PUNTO P LA SI INDICA CON

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) \text{ (NEL TESTO) O ANCHE CON } f_{x_i x_j} \text{ O ANCHE CON } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ O CON } f_{x_i x_j}(P)$$

TEOREMA DI SCHWARZ: SE LE DERIVATE SECONDE $f_{x_i x_j}$ E $f_{x_j x_i}$ ESISTONO IN $B_r(P)$ E SONO CONTINUE IN P , ALLORA

$$f_{x_i x_j}(P) = f_{x_j x_i}(P).$$

È LEGITTIMO CHE $i=j$ NEL QUAL CASO SI SCRIVE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ DERIVATA

SECONDA PURA. SE $i \neq j$ SI PARLA DI DERIVATA MISTA.

2. LA MATRICE HESSIANA

SE ESISTONO LE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ PER $i, j = 1, \dots, n$

SI COSTRUISCE LA MATRICE HESSIANA

$$D^2 f = H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: SE $f(x,y) = ax + by + c$ ALLORA È OVVIO CHE $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ E $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ QUINDI $D^2 f = 0$ (MATRICE NULLA).

ESEMPIO: SE $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + g$ ALLORA $D^2 f = D^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)$, QUINDI CALCOLIAMO:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2ax + 2by$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2bx + 2cy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2a$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2b$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2c$$

$$\text{E CONCLUDIAMO CHE } D^2 f = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \text{ NOTARE CHE } f(x,y) =$$

$$= g + (d,e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= g + (d,e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x,y) D^2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

SE f SODDISFA IPOTESI CHE VEDREMO (COME LA CONTINUITÀ DI $D^2 f$) SI DIMOSTRA CHE

$$f(x,y) = f(P) + (x-P_1, y-P_2) \cdot \nabla f(P) + \frac{1}{2} (x-P_1, y-P_2) D^2 f(P) \begin{pmatrix} x-P_1 \\ y-P_2 \end{pmatrix} + o\left((x-P_1)^2 + (y-P_2)^2\right)$$

IL POLINOMIO OMOGENEO DEFINITO PER OGNI h_1, h_2 DA $(h_1, h_2) D^2 f(P) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ SI CHIAMA « DIFFERENZIALE SECONDO » E SI DENOTA CON $d^2 f_P$

LA DIFFERENZIABILITÀ SECONDA

SE $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE IN $B_\varepsilon(P)$
 $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ALLORA ESISTE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ IN $B_\varepsilon(P)$

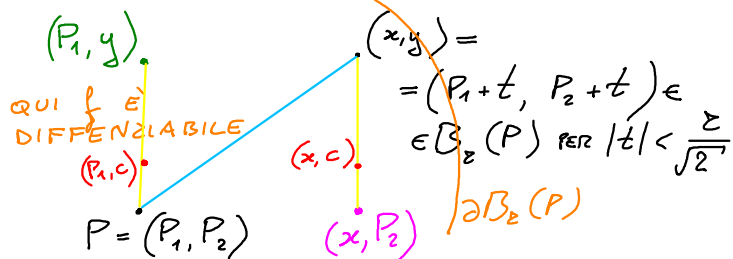
PER OGNI $i=1, \dots, n$. SE LE $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ SONO DIFFERENZIABILI IN P SI DICE CHE f È INI DIFFERENZIABILE DUE VOLTE, LA MATRICE $D^2 f$ IN P RISULTA SIMMETRICA, E SI DEFINISCE IL DIFFERENZIALE SECONDO $d^2 f_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ TRAMITE

$$d^2 f_P: h \longmapsto h \cdot D^2 f(P) \cdot h^T \text{ PER}$$

$$h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n. \text{ DIMOSTRIAMO LA SIMMETRIA DI } D^2 f(P).$$

NON È RESTRITTIVO PENSARE

$n=2$ RAGIONANDO NEL PIANO x_i, x_j OVERO PONEENDO x PER x_i ED y PER x_j .



$$\text{CONSIDERIAMO } \Delta = \Delta(x, y) = \Delta(t) = f(P) + f(x, y) - f(x, P_2) - f(P_1, y)$$

E VERIFICHIAMO CHE

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P). \text{ SCRIVIAMO } \Delta =$$

$$f(P) - f(x, P_2) - [f(P_1, y) - f(x, y)],$$

$$\text{PONIAMO } \varphi(s) = f(P_1, s) - f(x, s) \text{ E DIVENTA}$$

$$\Delta = \varphi(P_2) - \varphi(y) = \varphi'(c)(P_2 - y)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(P_1, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, c) \right] (P_2 - y)$$

ESSENDO $\frac{\partial f}{\partial y}$ DIFFERENZIABILE IN P SI HA CHE

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_1, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(P)(P_1 - P_1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(P)(c - P_2) + o(c - P_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(P)(x - P_1) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(P)(c - P_2) + o(\sqrt{(x - P_1)^2 + (c - P_2)^2})$$

$$\text{MA } o(c - P_2) = o(y - P_2) = o(t)$$

$$E \quad o(\sqrt{(x - P_1)^2 + (c - P_2)^2}) = o(\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}) = o(\sqrt{t^2 + t^2}) = o(t)$$

$$\text{QUINDI } \left[\frac{\partial f}{\partial y}(P_1, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, c) \right] (P_2 - y)$$

$$= -t \left[o(t) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(P)(x - P_1) \right] = -t o(t) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(P) t^2$$

$$\frac{\Delta}{t^2} = -\frac{o(t)}{t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(P) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(P)$$