



Massimo e minimo di una funzione

Massimo e minimo assoluto

Definizione

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che M è **massimo assoluto** (o **globale**) di f in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ è punto di massimo se

$$f(x_0) = M \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

In modo analogo:

Si dice che m è un **minimo assoluto** (o **globale**) di f in $[a, b]$ e $x_1 \in [a, b]$ è punto di minimo se

$$f(x_1) = m \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Massimo e minimo di una funzione

Massimo e minimo relativo

Definizione

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in [a, b]$ è un punto di

massimo relativo (o **locale**) per $f(x)$ se $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I(x_0, \delta)$$

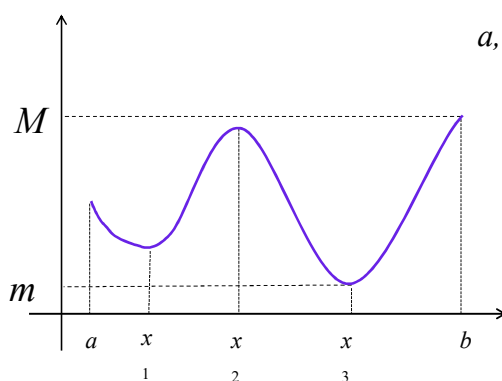
In modo analogo:

Si dice che $x_1 \in [a, b]$ è un punto di **minimo relativo** (o

locale) per $f(x)$ se $\exists I(x_1, \delta)$:

$$f(x_1) \leq f(x), \quad \forall x \in I(x_1, \delta)$$

Massimo e minimo di una funzione



a, b, x_2 punti di massimo relativo

x_1, x_3 punti di minimo relativo

x_3 punto di minimo assoluto

b punto di massimo assoluto

x è di max o min relativo in un intorno di x_0

Def. I punti in cui $f(x)$ ha derivata nulla ($f'(x) = 0$)

Si dicono punti **stazionari** o **critici**.

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Fermat

Sia $f(x)$ definita in $[a,b]$ e derivabile in $x_0 \in (a,b)$.

Se x_0 è un punto di estremo locale allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Sia x_0 un punto di massimo relativo, cioè $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \quad \forall h: |h| < \delta \quad (\text{ossia } f(x_0 + h) - f(x_0))$$

$$\text{si ha: } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

Massimo e minimo di una funzione

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \geq 0$$

Ma essendo $f(x)$ derivabile in x_0 :

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Massimo e minimo di una funzione

Estensione del Teorema di Fermat ai punti di frontiera $[a, b]$

Se $x_0 = a$ allora $0 < h < \delta$ e se x_0 è un punto di massimo relativo si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \leq 0$$

Mentre, nel caso di minimo relativo in $x_0 = a$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \geq 0$$

In modo analogo: se $x_0 = b$ è punto di massimo relativo (con $-\delta < h < 0$) allora $f'(b) \geq 0$, se invece $x_0 = b$ è un punto di minimo relativo, allora $f'(b) \leq 0$.

Massimo e minimo di una funzione

Esercizio

Calcolare i punti critici per $f(x)$ classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x^3 \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = x |\ln x|$$

Esercizio

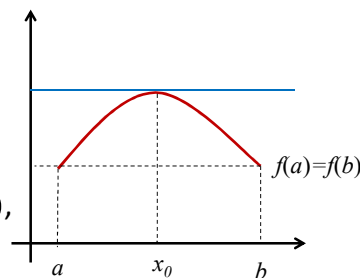
Calcolare la derivata di $f(x) = x^{\ln x}$

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Rolle

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1. f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$,
2. f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$.



Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che: $f'(x_0) = 0$

Significato geometrico: Per il Teorema di Rolle esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale (parallela all'asse x).

Massimo e minimo di una funzione

Dimostrazione

Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, per il

Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluti in $[a, b]$.

Esistono cioè due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b]$$

- **Caso 1:** se almeno uno tra il punto di minimo x_1 e il punto di massimo x_2 è interno all'intervallo $[a, b]$ per il **Teorema di Fermat** si ha: $f'(x_1) = 0$

Analogo ragionamento vale se $x_2 \in (a, b)$, ottenendo $f'(x_2) = 0$.

Massimo e minimo di una funzione

Dimostrazione

- **Caso 2:** Se nessuno dei due punti di estremo è interno ad $[a, b]$, il massimo che il minimo vengono assunti agli estremi dell'intervallo, cioè: $x_1 = a$ e $x_2 = b$ (oppure $x_1 = b$ e $x_2 = a$)

Poiché $f(a) = f(b)$, si ha che "valore minimo e massimo coincidono" per cui la funzione è costante in tutto l'intervallo $[a, b]$, ossia, $f(x) = c$, $\forall x \in [a, b]$

Di conseguenza, la derivata

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

Massimo e minimo di una funzione

Esercizio

Dire se la funzione $f(x) = \ln |x|$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$ e in caso affermativo calcolare il punto (o i punti) del Teorema.

Esercizio

Dire se la funzione $f(x) = \ln |x|$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-e, e]$.

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

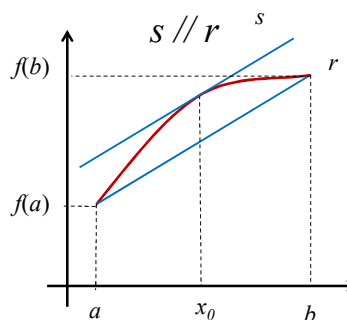
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. f è **continua** in $[a, b]$,
2. f è **derivabile** in (a, b) .

Allora esiste almeno un punto $x_0 \in$

(a, b) tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Per il Teorema di Lagrange esiste almeno un punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico di $f(x)$, con $x_0 \in (a, b)$, in cui la retta tangente s è parallela alla retta r secante passante per i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione

Si consideri la funzione ausiliaria $g(x)$ ottenuta sottraendo a $f(x)$ l'equazione della retta secante r passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]}_{\text{Equazione della retta secante } r}$$

Per la funzione $g(x)$ valgono tutte le ipotesi del **Teorema di Rolle** su $[a, b]$



Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione

- 1. Continuità:** $g(x)$ è continua in $[a, b]$ poiché somma di $f(x)$ (continua per ipotesi) e di una funzione lineare.
- 2. Derivabilità:** $g(x)$ è derivabile in (a, b) per le stesse ragioni.
- 3. Uguaglianza agli estremi:**
 - $g(a) = f(a) - [f(a) + 0] = 0$
 - $g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] = f(b) - f(b) = 0$
 - Quindi $g(a) = g(b) = 0$.



Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione

Essendo verificate le ipotesi del Teorema di Rolle per $g(x)$, **esiste almeno un punto** $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$g'(x_0) = 0$$

ossia:

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Dalla quale si ricava direttamente la tesi:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Esempio applicativo

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ definita nell'intervallo $[a, b]$.

Poiché $f(x)$ è un polinomio, è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Per il Teorema di Lagrange, **esiste almeno un punto**

$x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Calcoliamo le quantità coinvolte:

- $f(a) = a^2; f(b) = b^2$
- $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$

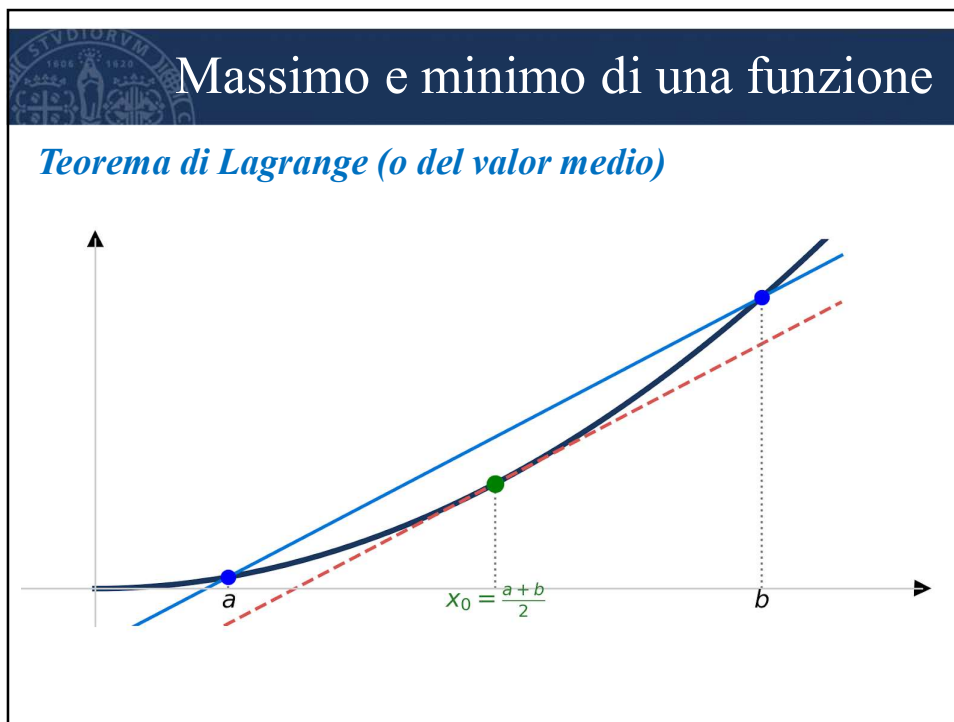
$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2x_0$$

Scomponendo il numeratore come differenza di quadrati

$$\left(\frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a \right)$$

$$b + a = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{a + b}{2}$$

Media aritmetica di a e b



Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Esercizio

Dire se è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \arcsin x$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e in caso affermativo calcolare i punti del teorema.

Esercizio

Determinare un intervallo in cui è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right|$