

Modulo 2: Elementi di teoria degli insiemi

Francesco Cannas Aghedu

Matematica 1 - A.A. 2026/2027

Insiemi

Descrivere un insieme

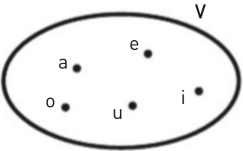
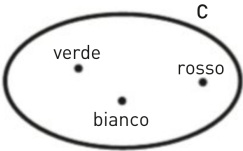
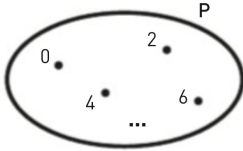
Un insieme è un raggruppamento di oggetti. Ognuno di questi oggetti è detto *elemento* dell'insieme e diciamo che *appartiene* all'insieme.

Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole $A, B, C, \dots$. Gli elementi di un insieme si indicano con lettere minuscole $a, b, c, \dots$.

Per definire un insieme serve un criterio oggettivo per stabilire quali sono i suoi elementi. Per descrivere un insieme possiamo:

- fornire la **proprietà caratteristica**, ovvero la proprietà che caratterizza univocamente gli elementi dell'insieme
- procedere per **elencazione**, scrivendo tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e fra parentesi graffe
- rappresentarlo graficamente con un **diagramma di Eulero-Venn**, detto anche, più brevemente, diagramma di Venn.

Descrivere un insieme

Proprietà caratteristica	le vocali dell'alfabeto	i colori della bandiera italiana	i numeri pari
Elencazione	$V = \{a, e, i, o, u\}$	$C = \{\text{verde, bianco, rosso}\}$	$P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
Diagramma di Venn			

Se rappresentiamo un insieme per elencazione o con un diagramma di Venn, ogni elemento deve essere presente una sola volta nell'elenco o nel diagramma e l'ordine con cui gli elementi compaiono non ha importanza.

Usiamo il simbolo $\in$, «appartiene», per dire che un oggetto è un elemento dell'insieme, e il simbolo $\notin$, che significa «non appartiene», per dire che l'oggetto non è un elemento dell'insieme: $a \in V, b \notin V$

Chiamiamo **insieme vuoto** l'insieme che non ha elementi e lo indichiamo con il simbolo

$$\emptyset = \{\}$$

Un insieme è **finito** quando ha un numero finito di elementi. L'insieme delle vocali è un insieme finito. Anche l'insieme vuoto è un insieme finito, infatti ha zero elementi. L'insieme dei numeri naturali maggiori di 3, invece, non ha un numero finito di elementi: diciamo che è un insieme **infinito**.

Per un insieme finito A il numero dei suoi elementi si dice **cardinalità** dell'insieme e si indica con

$$|A| \quad \text{oppure} \quad \#A$$

La cardinalità dell'insieme delle vocali $V = \{a, e, i, o, u\}$ è $|V| = 5$.

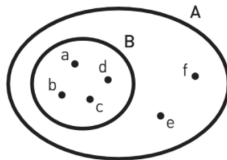
Definizione

Siano A e B due insiemi. Diciamo che B è **sottoinsieme** di A (o che B è **incluso** in A) se ogni elemento di B appartiene ad A . In simboli

$$B \subseteq A.$$

Diciamo che B è **incluso strettamente** in A se B è sottoinsieme di A e almeno un elemento di A non appartiene a B . In simboli

$$B \subset A$$



$B \subset A$ perché $B \subseteq A$ e
 $f \in A$, ma $f \notin B$.

Il simbolo $\not\subseteq$ si usa per indicare che un insieme non è sottoinsieme di un altro.

Osserviamo che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso e l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme. Quindi, per qualunque insieme A valgono le relazioni:

$$A \subseteq A \quad \text{e} \quad \emptyset \subseteq A.$$

Diciamo anche che, per un insieme A , l'insieme vuoto e l'insieme A sono **sottoinsiemi impropri**. Tutti gli altri sottoinsiemi sono detti **sottoinsiemi propri**.

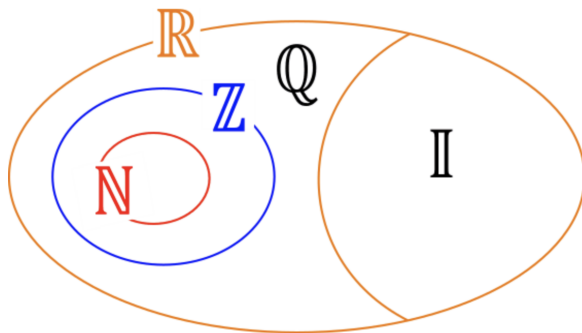
Inoltre, due insiemi A e B sono uguali (scriviamo $A = B$) se hanno gli stessi elementi.

Gli insiemi numerici sono raggruppamenti infiniti di numeri classificati in base a caratteristiche comuni. I principali insiemi numerici sono:

- $\mathbb{N}$ (**Numeri Naturali**): corrispondono all'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ (**Numeri Interi**): corrispondono all'insieme $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ (**Numeri Razionali**): corrispondono all'insieme di tutti i numeri che possono essere scritti come frazione (rapporto a/b tra due interi a e b con denominatore $b \neq 0$). Sono quindi razionali i numeri decimali finiti o periodici
- $\mathbb{I}$ (**Numeri Irrazionali**): corrispondono all'insieme di tutti i numeri che hanno uno sviluppo decimale infinito non periodico
- $\mathbb{R}$ (**Numeri Reali**): corrispondono all'insieme di tutti i numeri razionali e irrazionali
- $\mathbb{C}$ (**Numeri Complessi**): corrispondono all'insieme di tutti i numeri della forma $z = a + ib$, dove i è l'unità immaginaria, $a, b \in \mathbb{R}$

Insiemi numerici

Il legame tra gli insiemi numerici può essere rappresentato graficamente con il seguente diagramma di Eulero-Venn.



Valgono le seguenti relazioni di inclusione:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Operazioni tra insiemi

Unione e intersezione

Siano A, B, C tre insiemi.

Definizione

*L'**unione** di A e B è l'insieme $A \cup B$ degli elementi che appartengono ad A o a B .*

L'unione è un'operazione commutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

e associativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Definizione

*L'**intersezione** di A e B è l'insieme $A \cap B$ degli elementi che appartengono ad A e a B .*

Anche l'intersezione è un'operazione commutativa e associativa.

Inoltre vale la **proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

e la **proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

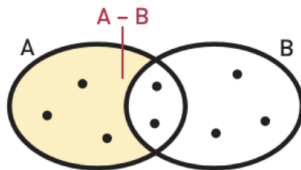
Esempi

Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e } 5 \leq x \leq 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 18\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6\}$

- verificare la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione
- verificare la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione

Definizione

Dati due insiemi A e B , la **differenza** $A \setminus B$ (indicata anche con $A - B$) è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma **non** a B .



Esempi

Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e } 5 \leq x \leq 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6\}$, verificare che $A \setminus B \neq B \setminus A$ (la differenza non è un'operazione commutativa.)

Definizione

*Dati due insiemi A e B , il **prodotto cartesiano** $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a; b)$, con $a \in A$ e $b \in B$, in simboli*

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Esempi

Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e } 5 \leq x \leq 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6\}$, verificare che $A \times B \neq B \times A$ (il prodotto cartesiano non è un'operazione commutativa.)

Esempi

Rappresentare per elencazione gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 14\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{5n+2}{2n-1}, n = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- 1 Determinare $A \cup B, A \cap B, C \setminus A$.
- 2 Verificare la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.

Esempi

Si considerino gli insiemi A , B e C definiti mediante proprietà caratteristica:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| \leq 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 1 - 2n, n = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

- 1 Rappresentare per elencazione gli insiemi A , B e C .
- 2 Determinare $A \cup B$, $A \cap C$, $B \setminus C$.
- 3 Verificare che $A \times C \neq C \times A$.

Enunciati e connettivi logici

Definizione

*Un **enunciato** è un'affermazione sensata, cioè un'affermazione che sia vera o falsa.*

Questo non significa che noi dobbiamo necessariamente essere in grado di decidere se sia vera o sia falsa. Il fatto che sia vero o che sia falso viene detto **valore di verità** dell'enunciato in questione e denotato simbolicamente con le lettere V (vero) e F (falso), o talvolta con 1 (vero) e 0 (falso).

Le affermazioni «6 è un numero primo», «un triangolo ha sei lati», «la luna è una palla di burro» sono tutti enunciati.

Non sono enunciati le affermazioni «il numero intero x è primo», «questa minestra è salata».

I **connettivi logici** svolgono, nell'ambito della logica formale, il ruolo svolto dalle congiunzioni grammaticali nei linguaggi naturali.

Essi per l'appunto connettono insieme uno o più enunciati per ottenere un nuovo enunciato. Poiché di un enunciato interessa solo il suo valore di verità, ogni connettivo sarà univocamente determinato non appena si sia indicato

- se esso è unario, binario, ternario,... cioè se esso agisce su uno, due, tre,... enunciati per volta
- la sua tavola di verità, cioè la descrizione completa dei valori di verità che competono all'enunciato composto in corrispondenza delle possibili attribuzioni di valori di verità agli enunciati componenti

Definizione

*Dato un enunciato A , la **negazione** di A è l'enunciato che è vero se A è falso, è falso se A è vero. La indichiamo con $\bar{A}$ oppure $\neg A$ oppure $\text{NOT } A$, che leggiamo «non A ».*

La negazione è l'unico connettivo unario che merita attenzione. Questo connettivo è descritto dalla tavola di verità:

A	$\bar{A}$
V	F
F	V

L'enunciato A : «sta piovendo» ha per negazione $\neg A$: «non sta piovendo».

Congiunzione: e

Definizione

*Dati gli enunciati A e B , la **congiunzione** di A e B è l'enunciato che è vero se A e B sono entrambi veri, altrimenti è falso. La indichiamo con $A \wedge B$, che leggiamo « A e B ».*

La congiunzione è un connettivo binario descritto dalla tavola di verità:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se A : «Oggi ho studiato inglese» e B : «Oggi ho studiato storia», l'enunciato $A \wedge B$: «Oggi ho studiato inglese e storia» è vero solo se oggi ho studiato sia inglese sia storia.

Definizione

*Dati gli enunciati A e B , la **disgiunzione** di A e B è l'enunciato che è falso se A e B sono entrambi falsi, altrimenti è vero. La indichiamo con $A \vee B$, che leggiamo « A o B ».*

La disgiunzione è un connettivo binario descritto dalla tavola di verità:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

L'enunciato $A \vee B$: «Oggi ho studiato inglese o storia» è vero se ho studiato solo inglese, se ho studiato solo storia, ma anche se ho studiato sia inglese sia storia.

Implicazione semplice: se.... allora

Definizione

*Dati gli enunciati A e B , l'**implicazione semplice** $A \rightarrow B$ che leggiamo « A implica B » (oppure «Se A allora B ») è l'enunciato che è falso se A è vero e B è falso, altrimenti è vero.*

L'implicazione semplice è un connettivo binario descritto dalla tavola di verità:

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Utilizziamo «se A allora B » quando vogliamo dire che tutte le volte che è vera la proposizione A è vera anche la B , ma se è vera la B non è detto che invece sia vera la A . Dicendo «se nevicava allora non mi muovo di casa» non escludo di restare in casa anche se non nevicava.

Doppia implicazione: se e solo se

Definizione

*Dati gli enunciati A e B , la **doppia implicazione** $A \leftrightarrow B$ che leggiamo « A se e solo se B » è l'enunciato che è vero se A e B sono entrambi veri o entrambi falsi, altrimenti è falso.*

La doppia implicazione è un connettivo binario descritto dalla tavola di verità:

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L'enunciato «ti faccio un regalo se e solo se hai preso 30 nell'esame di Matematica 1» è vero se hai preso 30 in Matematica 1 e ti faccio un regalo oppure se non hai preso 30 in Matematica 1 e non ti faccio un regalo.

Connettivi logici e insiemi

Siano A e B due insiemi. Vediamo alcune delle definizioni già introdotte in termini di connettivi logici.

- **Unione:** $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Intersezione:** $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **Differenza:** $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Prodotto cartesiano:** $A \times B := \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Quantificatori

- Il **quantificatore universale** serve per affermare che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un insieme. Lo indichiamo con $\forall$, che leggiamo «per ogni» o «qualsiasi»
- Il **quantificatore esistenziale** serve per affermare che una proprietà è vera almeno in un caso, e dunque che esiste almeno un elemento dell'insieme considerato per cui la proprietà è vera. Lo indichiamo con $\exists$, che leggiamo «esiste un» o «esiste almeno un»

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'enunciato « $\forall x \in A, x$ è un numero primo» è un enunciato falso, mentre l'enunciato « $\exists x \in A \mid x$ è un numero dispari» è un enunciato vero.