

LEZIONE 21-10-2026

Svolgimento esercizi: risolvere le seguenti disequazioni:

1) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$;

2) $x^2 + 5x + 6 > 0$;

3) $-2x^2 + 3x > -5$;

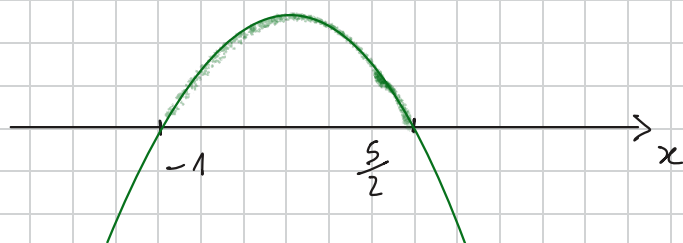
4) [Spoiler] $x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0$.

3) $-2x^2 + 3x > -5$; $-2x^2 + 3x + 5 > 0$ $\xrightarrow[\text{associata}]{\text{eq.}}$ $-2x^2 + 3x + 5 = 0$

i) concavità verso il basso poiché $a = -2 < 0$

ii) intersezioni con asse x :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2)5}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm 7}{-4} \begin{cases} \frac{-10}{-4} = +\frac{5}{2} \\ \frac{+4}{-4} = -1 \end{cases}$$



$\Rightarrow$

$$-1 < x < \frac{5}{2}$$

Problema: come risolviamo

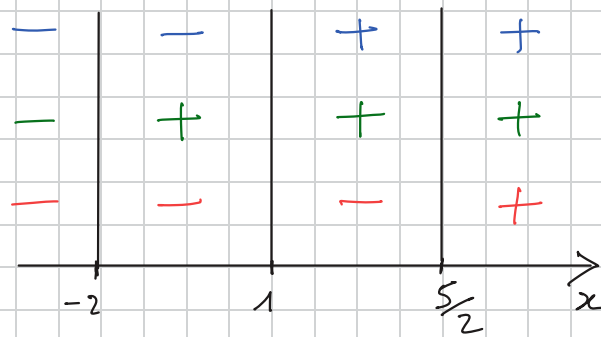
$$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right) > 0 \quad ?$$

Ci stiamo chiedendo quindi quando il prodotto è positivo.
Per capire come si comporta il prodotto dei vari fattori,
dobbiamo studiarne il segno:

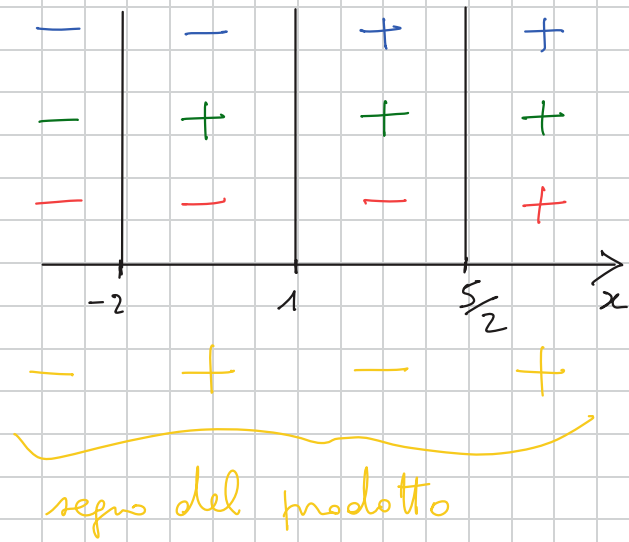
$F_1: x-1 > 0 \rightarrow x > 1$

$F_2: x+2 > 0 \rightarrow x > -2$

$F_3: x - \frac{5}{2} > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2}$



Quindi la soluzione è
la combinazione dei segni:



Poiché cerco le soluzioni
positive $((x-1)(x+2)(x-\frac{5}{2}) > 0)$,
il risultato è

$$-2 < x < 1 \quad \vee \quad x > \frac{5}{2}$$

Esempio:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0 ;$$

$$x^2(x+2) - 1(x+2) \leq 0 ;$$

$$(x+2)(x^2-1) \leq 0 ;$$

$$(x+2)(x-1)(x+1) \leq 0 .$$

Osserviamo che $x=1$ è sol.
della eq. associata, infatti:

$$1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$$

$$1 + 2 - 1 - 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

segue che il polinomio di partenza è divisibile per $(x-1)$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$// \quad 3x^2 - x$$

$$-(3x^2 - 3x)$$

$$// \quad 2x - 2$$

$$-(2x - 2)$$

//

$$x-1$$

$$x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x^2 + 3x + 2)$$

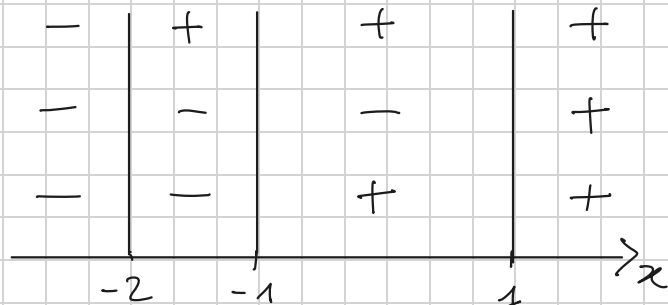
$$(x+2)(x-1)(x+1) \leq 0 .$$

Studio del segno:

$$F_1: x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$$

$$F_2: x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$F_3: x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$



La soluzione cercata è

dato dai valori **negativi**, pertanto è:

$$x \leq -2 \quad \vee \quad -1 \leq x \leq 1$$

Diseguazioni fratte: chiaramente una diseq. è **FRATTA** se l'incognita compare al denominatore di qualche frazione.

$$\frac{x}{2} - 3 \geq 0$$

NON FRATTA

$$\frac{1}{x-2} > 1$$

FRATTA

Come per le eq. fratte, la prima cosa che richiediamo è che vengano soddisfatte le **CONDIZIONI DI ESISTENZA** → tutti i denominatori devono essere diversi da zero!

Esempi:

$$1) \frac{1}{x+2} < 4-x$$

$$C.E: x+2 \neq 0$$

$$2) \frac{1}{x-2^{-1}} > 2^{-2} - \frac{1}{1-2^{-1} \cdot x}$$

$$C.E: x-2^{-1} \neq 0$$

$$1-2^{-1} \cdot x \neq 0$$

Per risolvere le diseq. fratte:

i. scrivo tutto come un'unica frazione e 1° membro (facendo il m.c.m.)

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

(oppure " $<$ ", " $\geq$ ", " $\leq$ ")

ii. studio il segno del numeratore ($A(x)$) e del denominatore ($B(x)$).

Esempi:

$$1) \frac{1}{x+2} < 4-x;$$

$$\text{C.E.: } x+2 \neq 0$$

$$\frac{1}{x+2} - 4 + x < 0;$$

← faccio il m.c.m.

$$\frac{1 - 4 \cdot (x+2) + x(x+2)}{x+2} < 0;$$

$$\frac{1 - 4x - 8 + x^2 + 2x}{x+2} < 0;$$

$$\frac{x^2 - 2x - 7}{x+2} < 0 \quad \xrightarrow{\text{studio il segno...}}$$

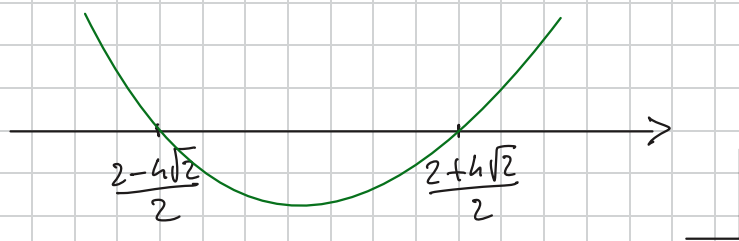
$$\text{N: } x^2 - 2x - 7 > 0 \rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

a. concavità verso l'alto

b. intersezioni con x;

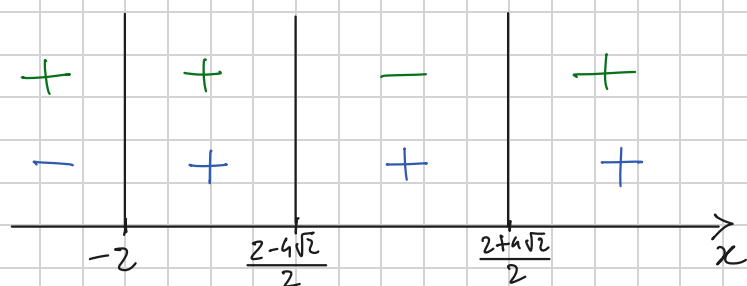
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow x < \frac{2-4\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{2+4\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{D: } x+2 > 0$$

$$\rightarrow x > -2$$



Soluzione: $x < -2 \vee \frac{2-4\sqrt{2}}{2} < x < \frac{2+4\sqrt{2}}{2}$.

Esercizi:

1) $\frac{2x-8}{4-3x} \leq 0$;

2) $-\frac{1}{3-x} < \frac{x}{6-2x}$;

3) $-\frac{3}{x} \geq 12$;

4) $-\frac{x+3}{x+4} > -1$.

Potenze ed equazioni/disequazioni esponenziali.

Un'eq./diseq. è detta **ESPONENZIALE** se l'incognita compare come esponente di qualche potenza.

$$x^2 - 2^{-1} = 0$$

NON ESPONENZIALE

$$4^{x+2} - 3 < 0$$

ESPONENZIALE

Note: considereremo sempre e solo potenze con base **POSITIVA**

~~$$(-2)^x$$~~

Ripasso sulle proprietà delle potenze:

1) $a^m \cdot a^l = a^{m+l}$

2) $a^m : a^l = a^{m-l}$

3) $(a^m)^l = a^{m \cdot l}$

4) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

5) $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Esempio: ridurre la seguente espressione

$$\begin{aligned} & \left[(7^4)^3 \cdot (7)^5 \right] : \left[7^7 \cdot 7^2 \right] = \left[7^{12} \cdot 7^5 \right] : \left[7^9 \right] = \\ & = 7^{17} : 7^9 = 7^8 \end{aligned}$$

Si possono usare più in generale esponenti in $\mathbb{Q}$: se ho esponente:

- i) una frazione $\frac{a}{b} \Rightarrow$
- elevo alla "a"
 - faccio la radice "b"-esima

Esempio: $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}$

- ii) un numero negativo $-n \Rightarrow$
- faccio il reciproco della base
 - elevo alla $+n$

Esempio: $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$

Esempio: $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2} - (-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$

$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-1} = 3^{\frac{1}{3} + (-1)} = 3^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

Attenzione: non può mai capitare che la base diventi negativa!

~~$3^{-2} = (-3)^2$~~

Le equazioni esponenziali si risolvono portando tutte le potenze ad avere stessa base, poi si eguagliano gli esponenti.

$25^x = 25^2 \Rightarrow x = 2$

Esempi:

1) $2^{2x+1} = 2^3 \Rightarrow 2x+1 = 3 ; 2x = 3-1 ; 2x = +2$

$x = +1$

Infatti: $2^{2 \cdot 1 + 1} = 2^3 ; 2^3 = 2^3 \checkmark$

$$2) \frac{9}{3^x} = 81 ; \quad \frac{3^2}{3^x} = 3^4 ; \quad 3^{2-x} = 3^4 \Rightarrow 2-x=4 ;$$

$$-x=4-2 ; \quad \boxed{x=-2} \quad \text{Infatti: } \frac{3^2}{3^{-2}} = 3^4 ; \quad 3^{2-(-2)} = 3^4 \quad \checkmark$$

$$3) e^{x^2+5x-6} = 1 ; \quad e^{x^2+5x-6} = e^0 \Rightarrow x^2+5x-6=0 \quad [...]$$

$$4) \frac{3^{2x}}{3^{x+1}} = \sqrt{3} ;$$

$$5) 4^x \cdot \sqrt{2^x} = 8^{x-1} ;$$

$$6) \frac{\sqrt[3]{2^{x-1}}}{\sqrt{4^{x+1}}} = \sqrt{8} ;$$

$$7) e^x \cdot e^{-2x+3} = \sqrt{\frac{1}{e}} .$$

Note: $e \approx 2,71$ é la costante DI NEPERO.

Diseguazioni esponenziali: anche qui ci riconduciamo a potenze con la stessa base "a" ambo i membri, poi:

i) se $a > 1$, passo alle disuguaglianze tra gli esponenti mantenendo lo stesso verso;

ii) se $0 < a < 1$, passo alle disuguaglianze tra gli esponenti cambiando il verso.

$$2^x > 2^3 \Rightarrow x > 3 \quad \dots \text{applico (i)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow x < 3 \quad \dots \text{applico (ii)}$$

Esercizi:

$$1) 2^x \cdot \sqrt{4^x} < 8 ;$$

$$2) e^{x^2-4x} \geq \frac{1}{e^3} ;$$

$$3) 2^x - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0 ;$$

$$4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - \frac{16}{9} > 0 .$$