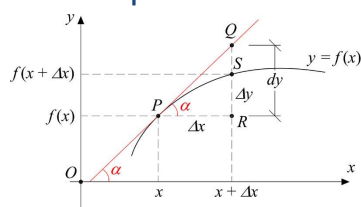


Calcolo differenziale per funzioni di una variabile



1

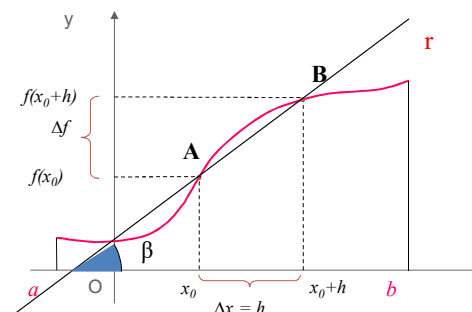
Derivata di una funzione

Rapporto incrementale e significato geometrico

Sia $x_0 \in (a, b)$: $x_0 + h \in (a, b)$

Si definisce Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \operatorname{tg} \beta$$



Derivata di una funzione

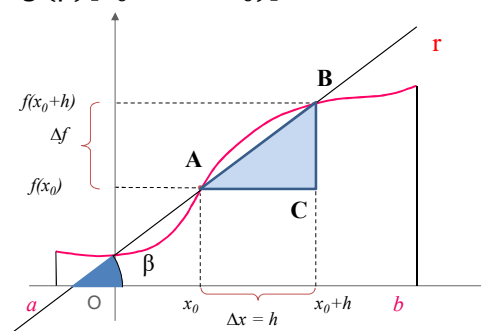
Rapporto incrementale e significato geometrico

Sia β l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x , considerando il triangolo ABC possiamo scrivere

$$f(x+h) - f(x_0) = \operatorname{tg}(\beta)[x_0+h - x_0]$$

Ossia:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata di una funzione

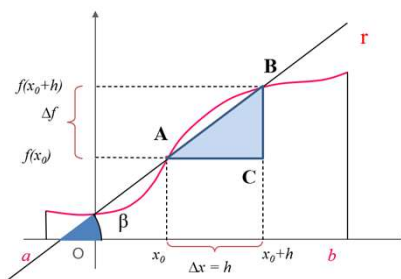
Rapporto incrementale e significato geometrico

Ma
$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

È il coefficiente angolare della retta r passante per AB

Per cui

$$\operatorname{tg}(\beta) = m$$



Ossia $\operatorname{tg}\beta$ è il coeff. Angolare della retta secante per AB

Derivata di una funzione

Derivata e significato geometrico

Def. Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce derivata di f nel punto $x_0 \in (a,b)$ il numero, se $\exists$ finito,:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0), y'(x_0), \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}, Df(x_0), Dy(x_0)$$

Derivata di una funzione

Derivata e significato geometrico

Quando $h \rightarrow 0$ il punto B si sposta sulla curva avvicinandosi ad A , la retta r diventa tangente alla curva in A e si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

coeff. angolare di t

Derivata di una funzione

Derivata e significato geometrico

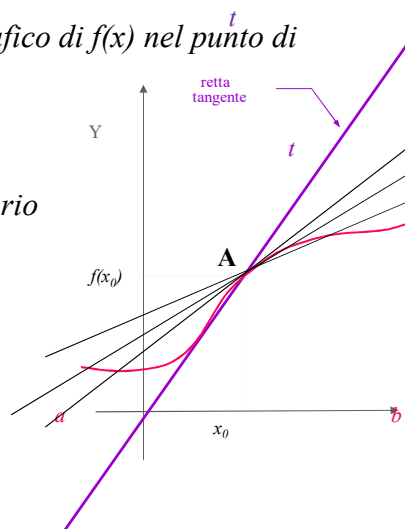
Equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Infatti tra tutte le rette del fascio proprio passanti per $A(x_0, f(x_0))$ di eq.

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

per $m = f'(x_0)$
si ottiene l'equazione di t



Derivata di una funzione

Derivata prima e derivabilità in un intervallo chiuso

Se $f'(x)$ è definita $\forall x \in (a, b)$, allora $f(x)$ è derivabile in (a, b) e risulta definita la funzione $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, detta **derivata prima** di $f(x)$.

Una funzione $f(x)$ si dice derivabile in $[a, b]$ se è derivabile $\forall x \in (a, b)$, ammette derivata destra in $x = a$ (indicata con $f'_+(a)$) e ammette derivata sinistra in $x = b$ (indicata con $f'_-(b)$)



Derivata di una funzione

Definizione

Derivata destra:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

Derivata sinistra:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, allora f è derivabile in x_0 .



Derivata di una funzione

Teorema - Continuità e derivabilità

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$, allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione

Sia $h \neq 0$ con $x_0, x_0 + h \in (a, b)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \cdot h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Da cui: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Che esprime la continuità di f in x_0

Quindi: **derivabilità $\Rightarrow$ continuità**

Derivata di una funzione

Continuità e derivabilità

Non è vero il viceversa

Es. $y=|x|$ è continua ma non è derivabile in $x=0$.

Infatti $y=|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ e $y' = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$$

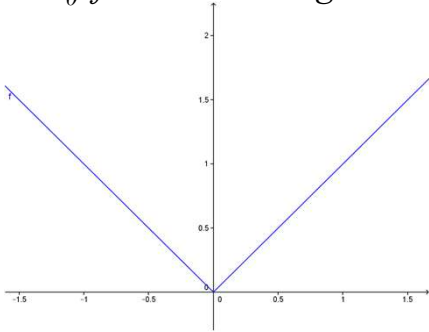
Derivata di una funzione

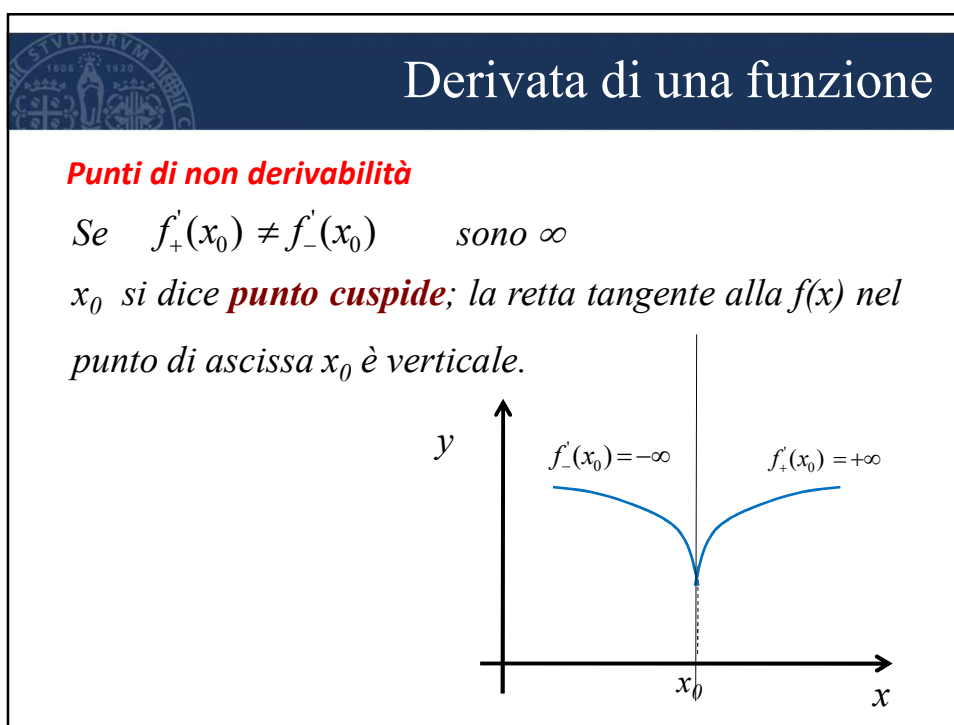
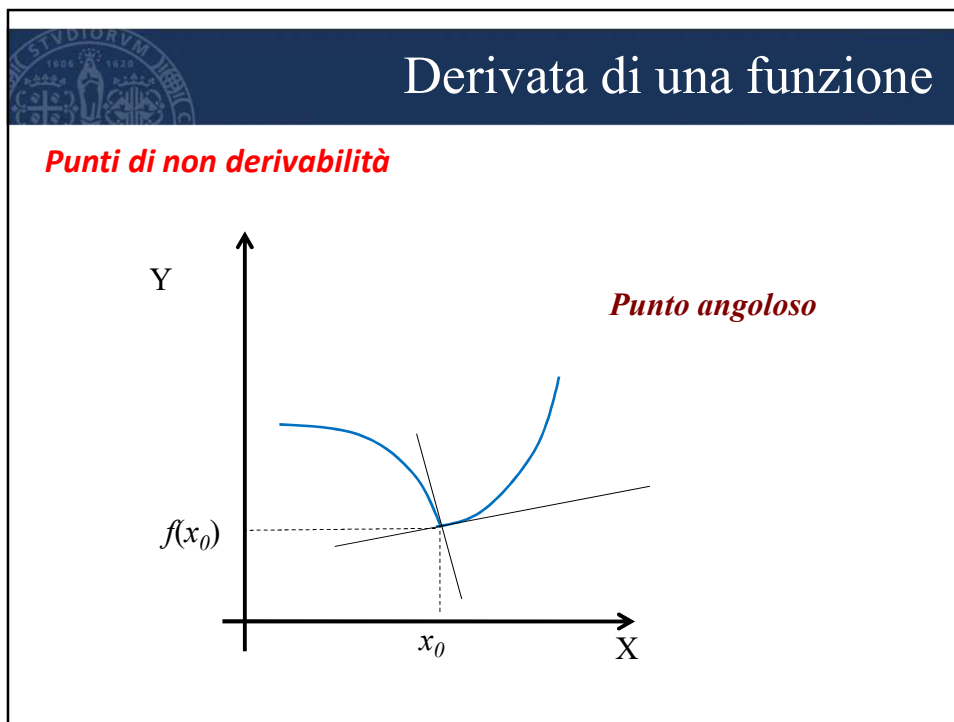
Punti di non derivabilità

Se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ e almeno una $\exists$ finita x_0 si dice **punto angoloso**, in quanto le rette tangenti alla $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 formano un angolo.

Es.

$f(x) = |x|$

$$f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$$


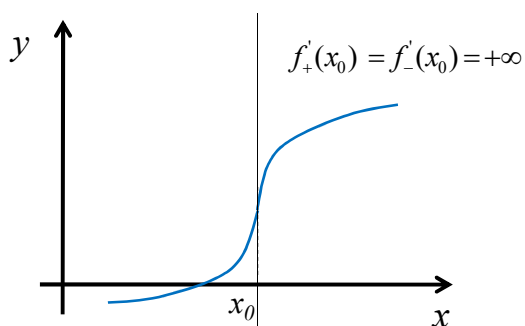


Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \pm\infty$ sono ∞

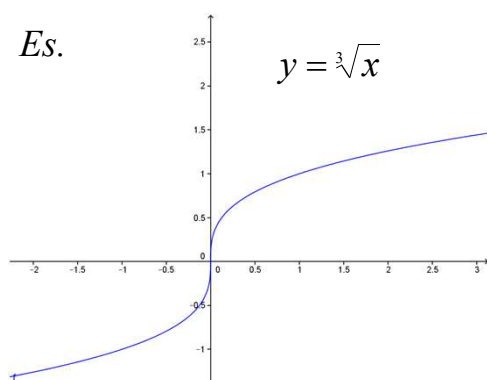
x_0 si dice **punto di flesso a tangente verticale**; la retta tangente alla $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 è verticale.



Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Es.

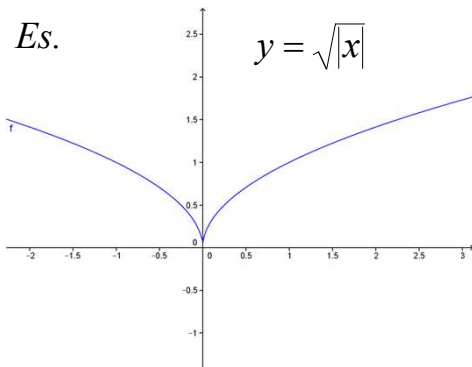


$$f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$$

Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Es.



$$y = \sqrt{|x|}$$

$$f'_-(0) = -\infty$$

$$f'_+(0) = +\infty$$

Derivata di una funzione

Derivata delle funzioni elementari

$D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$	$D(k) = 0$
$D(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$	$D(\ln x) = \frac{1}{x}$
$D(a^x) = a^x \ln a$	$D(e^x) = e^x$
$D(\sin x) = \cos x$	$D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$D(\cos x) = -\sin x$	



Derivata di una funzione

Derivata delle funzioni trigonometriche inverse

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2}$$


Derivata di una funzione

Esercizio
Utilizzando la definizione calcolare la derivata di

1) $f(x)=k$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

2) $f(x)=e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$$



Derivata di una funzione

3. $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

(Nota: ponendo $t = \frac{h}{x}$, per $h \rightarrow 0$ si ha $t \rightarrow 0$, si riconduce al limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$).



Derivata di una funzione

4. $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] =$$

$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

Derivata di una funzione

5. $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] =$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Derivata di una funzione

5. $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \right]}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \right]}{\left(\frac{h}{x}\right)x} = \frac{x^n}{x} n = nx^{n-1}$$



Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Se f e g sono derivabili in x , allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (con il denominatore $\neq 0$) e si ha:

- a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad g \neq 0$



Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \pm f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$



Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Per ipotesi f e g sono derivabili, quindi continue in x , perciò:

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x),$$

$$(f \cdot g)' = \dots = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$


Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo la c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x) \cdot h} = \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) \pm f(x)g(x)}{g(x+h)g(x) \cdot h} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Aggiungo e tolgo} \\ f(x)g(x) \end{array} \\ &= \frac{[(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]]}{g(x+h)g(x) \cdot h} \end{aligned}$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo la c)

$$= \frac{\frac{[(f(x+h) - f(x))g(x)]}{h} - \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$\xrightarrow{f'(x)}$ $\xrightarrow{g'(x)}$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

In quanto per l'ipotesi di continuità di $g(x)$ si ha che $g(x+h) = g(x)$

Derivata di una funzione

Esercizio.

1) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin x \ln x$

$$f'(x) = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

2) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di eq

$f(x) = 2e^{x\sqrt[3]{x}}$ nel punto di ascissa $x=1$

$$f'(x) = 2e^{x\sqrt[3]{x}} + 2\frac{e^x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$



Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Sia $g(x)$ una funzione derivabile in x , e se $f(x)$ è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x , e si ha:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$


Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Dimostrazione

Se $g(x+h) \neq g(x)$ per $h \rightarrow 0$

Consideriamo il rapporto incrementale della funzione composta $(f \circ g) = f(g(x))$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Moltiplicando e dividendo per $g(x+h) - g(x) \neq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$



Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Dimostrazione

Ponendo $k = g(x + h) - g(x)$, per la continuità di $g(x)$ si ha che $k \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Il limite si spezza nel prodotto dei due limiti:

$$\begin{aligned}
 &= \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right) \\
 &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$


Derivata di una funzione

Esercizio.

1) Calcolare la derivata di $f(x) = \ln(\sin x)$.

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotg x$$

2) Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}}$

$$f'(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}} \frac{6x^2 + 1}{2\sqrt{2x^3+x}}$$



Derivata di una funzione

Esercizio.

3) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$


Derivata di una funzione

Esercizio.

Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $f(x) = (xe^{2x} - 1)^3$ nel punto di ascissa $x=0$

Eq. retta tang. a $f(x)$ in $x = x_0$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Per noi $x_0=0$

$$f'(x) = 3(xe^{2x} - 1)^2(e^{2x} + 2xe^{2x}) \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$f(0) = -1$$

Quindi l'equazione è: $y = 3x - 1$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

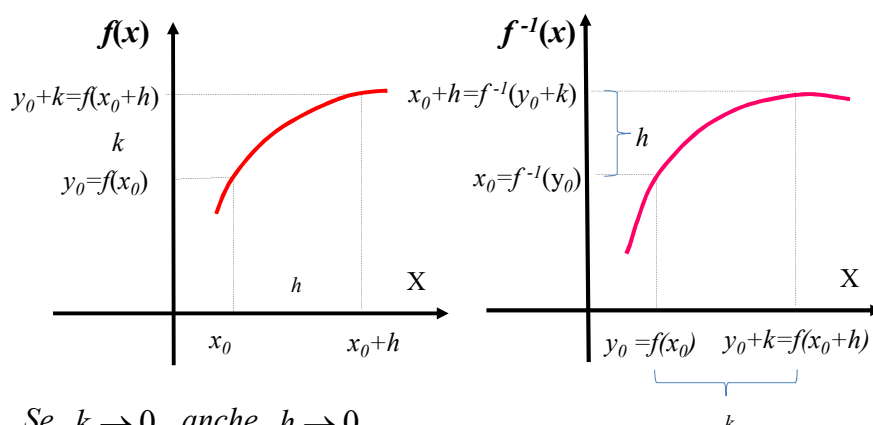
Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente monotona in $[a, b]$. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e se $f'(x_0) \neq 0$, allora anche la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$, e la derivata vale:

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Dimostrazione. Si ha

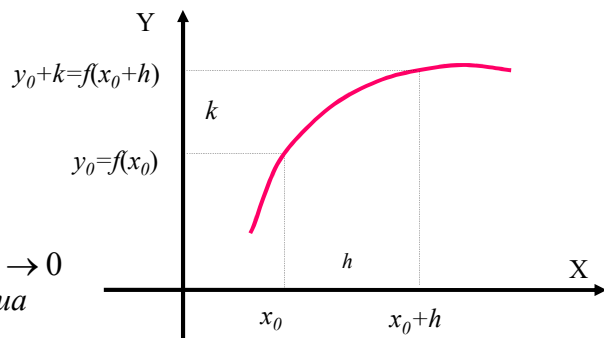


Se $k \rightarrow 0$ anche $h \rightarrow 0$
in quanto f è continua

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Si ha

$$\frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0)}$$


Se $k \rightarrow 0$ anche $h \rightarrow 0$
in quanto f^1 è continua

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Esercizio. Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che:

$$D[\arcsin(y)] = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$x = \arcsin(y)$ è la funzione inversa di $y = \sin(x)$

quest'ultima è invertibile per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Applichiamo il teorema della funzione inversa,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$[\arcsen(y)]' = \frac{1}{[\sen(x)]'} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Ma sappiamo che: $\cos x = \sqrt{1 - \sen^2 x}$

$$[\arcsen(y)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$



Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, di mostrare che $D[e^y] = e^y$

Per $x > 0$, la funzione $f(x) = \ln x$ è strettamente crescente e derivabile, con:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Sia $y = \ln x$, la cui funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = e^y$ per il teorema della derivata della funzione inversa si ha:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (e^y)' = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Poiché $x = e^y$, risulta: $(e^y)' = e^y$



Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Sia $f(x) = \operatorname{tg} x$, definita nell'intervallo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La sua funzione inversa è:

$$x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$

Per il teorema della derivata della funzione inversa si ha:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$


Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

La derivata della funzione trigonometrica è:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Sostituendo l'espressione della derivata e tenendo conto che $\operatorname{tg} x = y$:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Passando alla variabile indipendente usuale x , si conclude che:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$