

LA FORMULA DI TAYLOR AL I ORDINE
CON IL RESTO DI PEANO

SE $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE IN P
E $A \subset \mathbb{R}^n$ ALLORA ESISTONO $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P)$ PER $j =$

$1, \dots, n$ E, POSTO $z(x) = f(P) + (x-P) \cdot \nabla f(P)$
 $= f(P) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \cdot (x_j - p_j)$ RISULTA

$$\frac{f(x) - z(x)}{\|x - P\|} \longrightarrow 0 \text{ QUINDI SI PUÒ SCRIVERE}$$

$$f(x) - z(x) = o(\|x - P\|), \text{ E QUINDI}$$

$$f(x) = f(P) + (x-P) \cdot \nabla f(P) + o(\|x - P\|)$$

IN PARTICOLARE, SE $n=1$, SI OTTIENE

$$f(x) = f(P) + f'(P)(x-P) + o(x-P)$$

LE DERIVATE DI UNA FUNZIONE $y = F(x)$
CON $x \in A$, $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$

POSTO $F(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x) \right)$, SE ESIS-

TONO $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ PER OGNI $i = 1, \dots, m$ ALLORA SI

$$\text{PONE } \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \right)$$

OPPURE, EQUIVALENTEMENTE, SE IL LIMITE

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t \hat{e}_j) - F(x)}{t} \text{ ESISTE (IN } \mathbb{R}^m)$$

$$\text{ALLORA } \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t \hat{e}_j) - F(x)}{t}$$

SI SUOLE DISPORRE LE DERIVATE $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ A FOR-
MARE LA MATRICE JACOBIANA

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: MOTO CIRCOLARE UNIFORME. LA LEGGE

$$\vec{e}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t) \text{ È DATA DA}$$

UN CAMPO $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ CON $A = \mathbb{R}^1$ E

$$m=2: F(t) = \vec{e}(t), f_1(t) = R \cos \omega t, f_2(t) = R \sin \omega t. \text{ LA DERIVATA DEL CAMPO È}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d\vec{e}}{dt} = (-\omega R \sin \omega t, \omega R \cos \omega t) =$$

$$= \omega R (-\sin \omega t, \cos \omega t)$$

$$\text{LA MATRICE JACOBIANA È } \begin{pmatrix} -\omega R \sin \omega t \\ \omega R \cos \omega t \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: FORZA PESO $\vec{F}(x,y) = -Mg \hat{e}_2$

DOMINIO $A = \mathbb{R}^2$ E CODOMINIO $\mathbb{R}^m$ CON $n=m=2$

$$f_1(x,y) = 0, f_2(x,y) = -Mg. \text{ MATRICE JACO-$$

$$\text{BIANA } J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSITE

VOGLIAMO DERIVARE $g(f_1(x), \dots, f_m(x))$

CON $x \in \mathbb{R}^n$. COMINCIAMO DAL CASO $n=1$:

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{df_1}{dx} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{df_m}{dx}$$

SOTTO L'IPOTESI CHE LE $f_1, \dots, f_m$ SIANO DERIVABILI, E CHE $g(y_1, \dots, y_m)$ SIA DIFFERENZIABILE.

FILE. FORMULAZIONE VETTORIALE: POSTO $F(x)$

$= (f_1(x), \dots, f_m(x))$ E QUINDI $F'(x) = (f'_1(x), \dots, f'_m(x))$ SI PUÒ SCRIVERE

$$\frac{dg}{dx}(x) = \nabla g(f_1(x), \dots, f_m(x)) \circ F'(x)$$

ESEMPIO: $g(x, y) = M y$

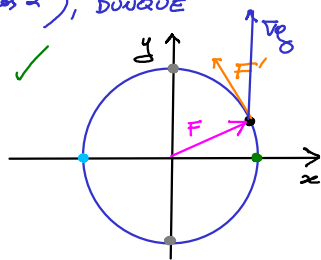
E $F(\alpha) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$. SI TROVA

$g(F(\alpha)) = M y R \sin \alpha$ E QUINDI

$\frac{dg}{d\alpha} = M y R \cos \alpha$. SI NOTA CHE: $\nabla g = M y \hat{e}_2$

E $F'(\alpha) = (-R \sin \alpha, R \cos \alpha)$, DUNQUE

$$\nabla g \cdot F' = M y R \cos \alpha \quad \checkmark$$



IL CASO IN CUI $x = (x_1, \dots, x_n)$

DALLA FORMULA PRECEDENTE SI RICAVA SUBITO

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}$$

IL CASO DI UNA $G(y) = (g_1(y), \dots, g_p(y))$

DUNQUE $G: B \rightarrow \mathbb{R}^p$, $B \in \mathbb{R}^n$

CONSIDERIAMO $\varphi(x) = G(F(x)): A \rightarrow \mathbb{R}^p$.

DALLE FORMULE PRECEDENTI SI RICAVA CHE

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} g_k(F(x)) = \\ &= \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \\ &+ \dots + \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla g_1 & \dots & \nabla g_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_m \end{pmatrix}$$

MATRICE PRODOTTO:
p RIGHE E n COLONNE
p RIGHE m COLONNE
m RIGHE n COLONNE

MA COME SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{df_1}{dx} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f_1(x), \dots, f_m(x)) \frac{df_m}{dx} \quad ?$$

SI PARTE DAL FATTO CHE IL RAPPORTO

$$\frac{g(y_1, \dots, y_m) - g(\bar{y}) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i}(\bar{y}) (y_i - \bar{y}_i)}{\|y - \bar{y}\|}$$

TENDE A ZERO PER $y \rightarrow \bar{y}$ E SI SOSTITUISCE

$y_i = f_i(x)$ PER CALCOLARE IL LIMITE

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g(F(x)) - g(F(\bar{x}))}{x - \bar{x}}$$

NOTARE CHE SE $F(x) = \bar{x} + (x - \bar{x}) \hat{v}$ SI RITROVA LA FORMULA DEL GRADIENTE.