

IL PIANO TANGENTE

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

IL PIANO TANGENTE NEL PUNTO $(0, y_0, f(0, y_0))$ HA EQUAZIONE

$$z = 2y_0 y - y_0^2$$

IN GENERALE, L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE

$$z = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - P_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - P_2)$$

AMMESSO CHE f SIA DIFFERENZIABILE NEL PUNTO DI TANGENZA P . LA $f(x,y) = x^2 + y^2$ HA LE

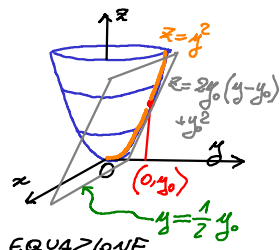
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ E $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ CONTINUE, QUINDI È DIFFERENZIABILE ED IL PIANO TANGENTE IN $P = (x_0, y_0)$ HA EQUAZIONE

$$z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

IN PARTICOLARE, SE $x_0 = 0$, SI OTTIENE

$$z = y_0^2 + 2y_0(y - y_0) \text{ E CIOÈ}$$

$$z = 2y_0 y - y_0^2 \quad \checkmark$$

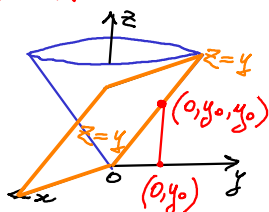


2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$, QUINDI IL SUO GRAFICO NON HA PIANO TANGENTE NEL PUNTO $(0,0,0)$.

INOLTRE, ESSENDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ E}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ PER } (x,y) \neq (0,0), \text{ E QUINDI}$$



ESSENDO $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ E $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ CONTINUE,

LA $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ È DIFFERENZIABILE IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ E L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE IN (x_0, y_0) È

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0(x - x_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + \frac{y_0(y - y_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

IN PARTICOLARE, SE $x_0 = 0$ E $y_0 > 0$, DIVENTA

$$z = y_0 + (y - y_0), \text{ CIOÈ } z = y.$$

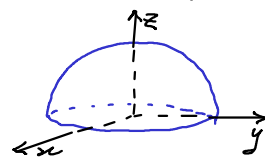
3. CON LA STESSA TECNICA SI PUÒ STUDIARE

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

CON $R \in (0, +\infty)$

E STABILIRE QUANTO SEGUE:

1. IN QUALI PUNTI ESISTE IL PIANO TANGENTE?
2. TROVARLO IN UN PUNTO GENERICO (x_0, y_0)
3. TROVARLO NEI PUNTI $(0, y_0)$ CON $y_0 \in [0, R]$.



IL DIFFERENZIALE

SE $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN $P = (P_1, P_2)$

RESTA DEFINITO IL DIFFERENZIALE df_P CHE È

UN'APPLICAZIONE LINEARE DEFINITA SU $\mathbb{R}^2$. PER SCRIVERLO, INDICHIAMO CON $h = (h_1, h_2)$ LA VARIABILE IN $\mathbb{R}^2$, ED ABBIAMO:

$$df_P(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P)h_2.$$

QUAL È LA SUA IMPORTANZA? SICCOME

$$\frac{f(x,y) - \left[f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - P_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - P_2) \right]}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow P} 0$$

SI HA CHE

$$\frac{f(x,y) - f(P) - df_P(x - P_1, y - P_2)}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow P} 0.$$

$$\text{POSTO } o(1) = \frac{f(x,y) - f(P) - df_P(x - P_1, y - P_2)}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}}$$

POSSIAMO SCRIVERE

$$\Delta f = f(x,y) - f(P) = df_P(x - P_1, y - P_2) + o\left(\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}\right)$$

ESEMPI

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P = (0, y_0)$,

$$df_P : h = (h_1, h_2) \mapsto 2x_0 h_1 + 2y_0 h_2 = 2y_0 h_2$$

$$\Delta f = x^2 + y^2 - y_0^2 = 2y_0(y - y_0) + o\left(\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

$$\text{VERIFICA: } \frac{x^2 + y^2 - y_0^2 - 2y_0 y + 2y_0^2}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{x^2 + (y - y_0)^2 - 2y_0 y + 2y_0^2}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \xrightarrow{} 0$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ in } P = (0, y_0), y_0 > 0$$

$$df_P : h_1 \mapsto \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} h_1 + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} h_2 =$$

$$= h_2 \text{ E SI HA CHE}$$

$$\Delta f = f(x, y) - f(0, y_0)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} - y_0 = df_P(x - 0, y - y_0)$$

$$+ o(\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2})$$

$$\text{cioè } \sqrt{x^2 + y^2} - y_0 = y - y_0$$

$$+ o(\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2})$$

VERIFICA:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y_0 - (y - y_0)}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} 0$$

MOLTIPLICANDO NUMERATORE E DENOMINATORE PER

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y \text{ SIAMO CONDOTTI A}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0$$

LIMITATA, PERCHÉ

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}$$