

LEZIONE 20-10-26

AVVISO: i tutoraggi si terranno il **MERCOLEDÌ** ore **11:30-13:00** secondo calendario pubblicato online (vedersi anche EASYSTAFF) per le regole. Sarà tenuto dal dott. Aliscia Perre, 5 incontri.

Svolgimento esercizi:

1) scrivere $g(x) = |x| - 2$ come una funzione definita per casi e individuare l'eq. delle due rette che ne compongono il grafico.

Poiché $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$, si ha

$$g(x) = |x| - 2 = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightarrow y = x - 2 \\ \rightarrow y = -x - 2 \end{array}$$

2) a. $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x - 1)$

b. $(x^3 + 2x - 3) : (x - 1)$

c. $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2x - 1) : (x^3 + 2)$

a.	$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$	$x - 1$
	$-(x^4 - x^3)$	$x^3 - 2x^2 + 1$
	$// -2x^3 + 2x^2$	
	$-(-2x^3 + 2x^2)$	
	$// // +x - 1$	
	$-(x - 1)$	
	$//$	

b.	$x^3 + 2x - 3$	$x - 1$
	$-(x^3 - x^2)$	$x^2 + x + 3$
	$// x^2 + 2x$	
	$-(x^2 - x)$	
	$// 3x - 3$	
	$-(3x - 3)$	
	$//$	

$$\begin{array}{r|l}
 C. \quad x^5 - x^4 + 3x^2 + 2x - 1 & x^3 + 2 \\
 \hline
 -(x^5 + 2x^2) & x^2 - x \\
 \hline
 // \quad -x^4 + x^2 + 2x & \\
 -(-x^4 - 2x) & \\
 \hline
 // \quad x^2 + 4x - 1 &
 \end{array}$$

quoziente: $x^2 - x$

resto: $x^2 + 4x - 1$

3) risolvere, dopo aver scomposto, $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 ;$$

$$x^2(x+2) - 1(x+2) = 0 ;$$

$$(x+2)(x^2-1) = 0 ;$$

$$(x+2)(x+1)(x-1) = 0 \longrightarrow \text{legge di annullamento del prodotto:}$$

le soluzioni si ottengono uguagliando a zero i singoli fattori, ovvero

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = +1$$

Equazioni fratte: l'incognita compare al denominatore

$$\frac{x+3}{2} = 4$$

NON FRATTA

$$\frac{1}{x} - 2 = 0$$

FRATTA

Per prime cose ricordiamo che non ha senso dividere per zero, pertanto si deve imporre che l'eq. non perda significato, scrivendo quelle che sono chiamate
CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.)

Ad esempio nell'eq. fratta precedente, poiché era presente la frazione $\frac{1}{x}$ e non posso avere denominatore 0, avrò

$$\text{C.E.: } x \neq 0$$

Esempi: stabilire le C.E. per le seguenti

a. $-\frac{3}{x} = 12$; C.E.: $x \neq 0$

b. $-\frac{1}{3-x} = \frac{x}{6-2x}$; C.E.: $3-x \neq 0$, $6-2x \neq 0$

c. $\frac{2x-8}{4-3x} = 0$; C.E.: $4-3x \neq 0$

d. $\frac{x^2}{x-2} = 0$. C.E.: $x-2 \neq 0$.

Per la loro risoluzione, prima si arriva ad avere una unica frazione facendo il m.c.m., poi si risolve

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \quad \xrightarrow[\text{risolve come...}]{\text{... che si}} \quad A(x) = 0$$

perché « una frazione vale zero solo se il numeratore vale zero ».

Esempio:

1) $\frac{x+3}{x-2} = 0$

- è un'eq. fratta perché compare la x al denominatore ;
- scrivo le C.E.: $x-2 \neq 0$;
- riporto tutto in un'unica frazione ;
- la soluzione si ottiene uguagliando a zero il numeratore

$$\Rightarrow x+3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3$$

• verifico che la soluzione sia ACCETTABILE, ome non contraddice le C.E: per $x = -3$ infatti $x - 2 \neq 0$ poiché $(-3) - 2 \neq 0 \rightarrow -5 \neq 0 \checkmark$

$$2) -\frac{1}{3-x} = \frac{x}{6-2x}$$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} 3-x \neq 0 \\ 6-2x \neq 0 \end{cases}$$

m.c.m. tra $(3-x)$ e $(6-2x) = 2(3-x)$

$$\frac{2 \cdot (-1)}{2(3-x)} = \frac{1 \cdot x}{2(3-x)} \quad ;$$

$$\frac{-2}{2(3-x)} = \frac{x}{2(3-x)} \quad ;$$

$$\frac{-2}{2(3-x)} - \frac{x}{2(3-x)} = 0 \quad ;$$

$$\frac{-2-x}{2(3-x)} = 0 \quad ;$$

$$\Rightarrow -2-x = 0 \quad ; \quad -x = +2 \quad ;$$

$$\boxed{x = -2}$$

È accettabile? Sostituiamo $x = -2$ nelle C.E:

$$\begin{cases} 3-x \neq 0 \\ 6-2x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3-(-2) \neq 0 \\ 6-2(-2) \neq 0 \end{cases} ; \begin{cases} 5 \neq 0 \\ 10 \neq 0 \end{cases} \checkmark$$

$\Rightarrow x = -2$ è accettabile.

Ricapitolando [Equazioni e polinomi]:

se nell'eq. che stiamo studiando compaiono solo polinomi e frazioni rispetto alla variabile x , allora:

1) se è presente solo un polinomio di 1° grado, l'eq. si risolve isolando la x (a 1° membro) e mettendo i termini noti al 2° membro;

2) se è presente un polinomio di 2° grado, l'eq. si risolve portando tutto a 1° membro ($ax^2 + bx + c = 0$)

e usando la formula risolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

3) se è presente un polinomio di grado maggiore di 2, bisogna scomporlo in fattori ($F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \dots = 0$) poi usiamo il principio di annullamento del prodotto e le soluzioni si trovano uguagliando a zero i singoli fattori ($F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$, etc...

4) se è presente una frazione con la x al denominatore (come si ha un eq. fraz.), dopo aver scritto le C.E. e fatto il m.c.m. si scrive tutto in un'unica frazione uguagliata a zero $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, poi le soluzioni si ottengono da $A(x)=0$.

Esercizi:

$$1) \frac{3x+1}{x-2} = 0 ;$$

$$2) \frac{(x-1)^2 - x^2}{5x+10} = 0 ;$$

$$3) \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} ;$$

$$4) \frac{10}{4-x} = -5 ;$$

$$5) \frac{1}{2x-2} + \frac{1}{3x-3} = \frac{1}{4x+4}$$

$$6) \frac{x+2k}{3x-k} = -1$$

(Trova le soluzioni al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.)

$$3) \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{C.E.: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

m.c.m. tra $(x-1)$ e $(x-2) \rightarrow \text{m.c.m.} = (x-1)(x-2)$

$$\Rightarrow \frac{1 \cdot (x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1 \cdot (x-1)}{(x-1)(x-2)} ; \quad \text{non ha senso calcolare il risultato di } (x-1)(x-2)$$

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = 0 ;$$

$$\frac{x-2 - (x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0 ;$$

$$\Rightarrow x-2-(x-1)=0 ; \quad x-2-x+1=0 ;$$

$$x-x = +2-1 ; \quad 0 = 1 \quad \text{impossibile !}$$

Diseguazioni: per esse valgono 3 regole

1) regole del trasporto: come per le equazioni, posso sommare o sottrarre una stessa q.tà ambo i membri o, equivalentemente, spostare un termine da un membro all'altro cambiandone il segno

$$\boxed{3-x+1 > 2x \Rightarrow -x-2x > -3-1}$$

2.a) posso moltiplicare/dividere ambo i membri per una stessa q.tà **POSITIVA**, mantenendo lo stesso verso di diseguazione (il « verso » è il simbolo $>$, $<$, $\geq$ o $\leq$)

$$\boxed{3x \geq -2 \Rightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{-2}{3} \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}}$$

il verso non cambia perché ho diviso per +3 (positivo)

2.b) posso moltiplicare/dividere ambo i membri per una

stessa q.tà **NEGATIVA**, cambiando il verso di disuguaglianza

$$\left[-2x < 17 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{17}{-2} \Rightarrow x > -\frac{17}{2} \right]$$

ho invertito il segno perché ho diviso per -2 (negativo)

Risoluzione delle disuguaglianze polinomiali e fratte:
se la disuguaglianza è polinomiale di 1° grado basta isolare le x come per le equazioni.

Esempi:

$$1) -\frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{3}(x+3) \leq \frac{1}{6}(x+12) ;$$

$$-\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{3}x + 1 \leq \frac{1}{6}x + 2 ;$$

↓ uso le regole del trasporto... (1)

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x \leq \cancel{+1} - \cancel{1} + 2 ;$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x \leq +2 ;$$

$$\left(\frac{-3+2-1}{6}\right)x \leq 2 ;$$

$$-\frac{2}{6}x \leq 2 ;$$

$$-\frac{1}{3}x \leq 2 ;$$

↓ multiplico per -3 cambiando il verso... (2.b)

$$(-3)\left(-\frac{1}{3}x\right) \geq 2 \cdot (-3) ;$$

$$x \geq -6$$

2) (Esercizio) $2(x-1) - [x - (x+1)^2] \geq 1 - (1-x)(x+3)$
 $[x \geq -1]$

Se la diseq. presenta un polinomio di 2° grado, si cercano le soluzioni dell'eq. associata (quindi se avevo $ax^2 + bx + c > 0$ studio $ax^2 + bx + c = 0$) e disegno il grafico della parabola. Le soluzioni della disequazione si ottengono da esso.

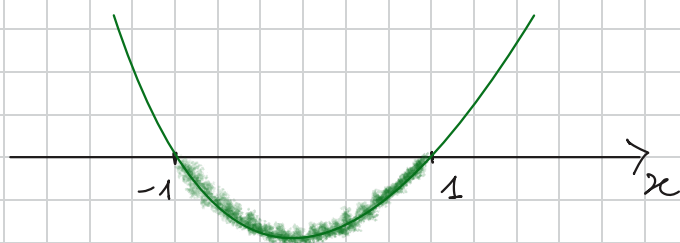
Esempio:

1) $x^2 - 1 < 0$ Studio $x^2 - 1 = 0$ e disegno la parabola

• concavità verso l'alto perché $a = 1 > 0$;

• intersezioni con l'asse x : $[a=1 \quad b=0 \quad c=-1]$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm \sqrt{4}}{2} = \frac{\pm 2}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$



Poiché cerco le soluzioni di $x^2 - 1 < 0$, devo considerare la porzione negativa della parabola, cioè

quella parte di grafico che sta sotto l'asse delle x .

In questo caso corrisponde ai valori tra -1 e 1 e si scrive

$$\underline{-1 < x < 1}$$

$\ll x \text{ compresi tra } -1 \text{ e } 1 \gg$

Note: può capitare che l'eq. associata sia impossibile ma la disequazione abbia soluzioni. Ad esempio $x^2 + 1 > 0$ ha eq. associata $x^2 + 1 = 0$ che è impossibile, infatti

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2} \quad \leftarrow \text{non si può fare!}$$

$$[a=1, b=0, c=1]$$

tuttavia possiamo comunque disegnare il grafico:



Pertanto dal grafico si evince che $x^2 + 1 > 0$ SEMPRE, ossia la soluzione della disequazione è $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizi: risolvere le seguenti disequazioni:

1) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$;

2) $x^2 + 5x + 6 > 0$;

3) $-2x^2 + 3x > -5$;

4) [Spoiler] $x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0$.