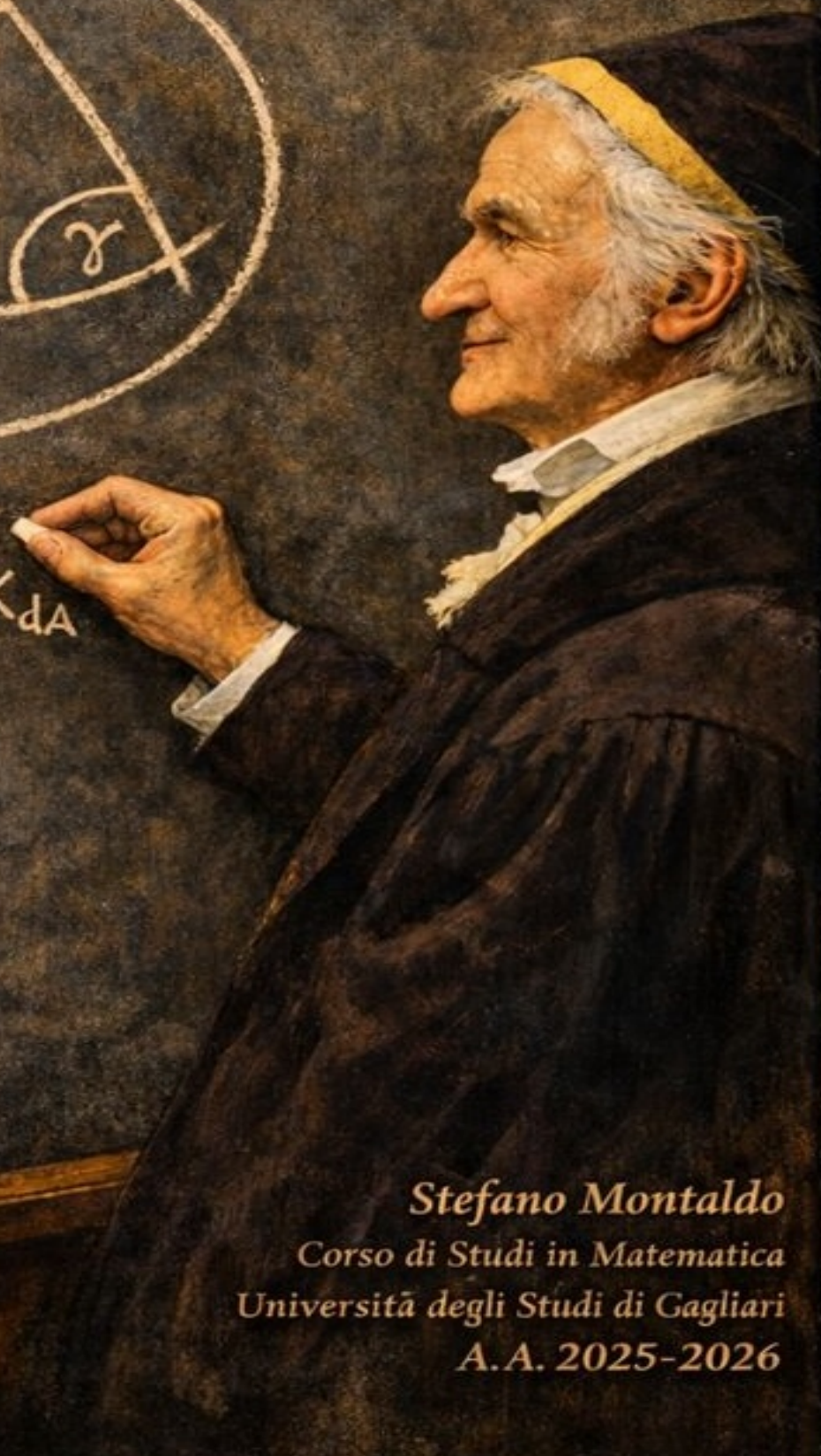


GEOMETRIA 4

La Geometria secondo Gauss



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_T K dA$$



Stefano Montaldo

Corso di Studi in Matematica

Università degli Studi di Cagliari

A.A. 2025-2026

Indice

1	Curve parametrizzate	5
1.1	Definizione ed esempi	5
1.2	Lunghezza d'arco	10
1.3	Riparametrizzazioni	12
1.4	Problemi proposti	15
2	Teoria locale delle curve piane	17
2.1	La curvatura con segno	18
2.2	La funzione angolo	22
2.3	Problemi proposti	26
3	Teoria locale delle curve nello spazio	28
3.1	Il triedro di Frenet	28
3.2	Problemi proposti	34
4	Superfici regolari	37
4.1	Differenziale di un'applicazione	37
4.2	Definizione di superficie regolare	38
4.2.1	Curve coordinate	40
4.3	Esempi di superfici regolari	40
4.4	Proprietà delle superfici regolari	46
4.5	Problemi proposti	48
5	Cambi di coordinate...	50
5.1	Cambi di coordinate	50
5.2	Funzioni e applicazioni differenziabili	52
5.3	Curve regolari, superfici parametrizzate e superfici di rotazione	55
5.4	Problemi proposti	56

6	Il piano tangente	59
6.1	Problemi proposti	62
7	La prima forma fondamentale	64
7.1	Il prodotto scalare indotto	64
7.2	Area di un dominio	70
7.3	Problemi proposti	73
8	Superfici orientabili	75
9	La seconda forma fondamentale	79
9.1	Proprietà fondamentali degli endomorfismi simmetrici	79
9.2	L'operatore di forma	81
9.3	Problemi proposti	89
10	Geometria dell'applicazione di Gauss in coordinate locali	91
10.1	Curvatura di Gauss e posizione di una superficie	93
10.2	Punti ombelicali, curve principali e curve asintotiche	97
10.3	Problemi proposti	100
11	Alcuni teoremi di rigidità	103
12	Superfici di rotazione	109
12.1	Superfici di rotazione con curvatura media costante	110
12.2	Superfici di rotazione con curvatura di Gauss costante	112
13	Geometria intrinseca delle superfici	115
13.1	Isometrie locali	115
13.2	Distanza su una superficie	120
13.3	Problemi proposti	123
14	Il Teorema Egregium di Gauss	125
14.1	I simboli di Christoffel	125
14.2	Il Teorema Egregium	127
14.3	Problemi proposti	130
15	Campi di vettori paralleli e geodetiche su una superficie	132
15.1	Geodetiche su una superficie	135
15.2	La curvatura geodetica	138
15.3	Integrazione delle geodetiche	143
15.4	Problemi proposti	148
15.5	Le equazioni di Codazzi–Mainardi - Facoltativo	149

16	L'applicazione esponenziale - Facoltativo	151
16.1	Il Teorema di Minding	154
16.2	Proprietà di minimo e Hopf-Rinow	156
17	Il Teorema di Gauss-Bonnet	160
17.1	La formula locale del Teorema di Gauss-Bonnet	161
17.2	Il Teorema globale di Gauss-Bonnet	164
17.3	Applicazioni del Teorema di Gauss-Bonnet	170

1. Curve parametrizzate

In tutto il testo consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

dove

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad w = (w_1, \dots, w_n)$$

Denotiamo con

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

la *norma* del vettore v .

1.1 Definizione ed esempi

Una funzione $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *differenziabile* (liscia) se è di classe C^∞ , nel senso che è derivabile un numero infinito di volte con derivate continue di ogni ordine per ogni $t \in (a, b)$.

Definizione 1.1 Una *curva parametrizzata* è un'applicazione differenziabile $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ nel senso che

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

e le funzioni $\alpha_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili per ogni $i = 1, \dots, n$.

Osservazione 1.1 L'intervallo (a, b) può coincidere con $\mathbb{R}$.

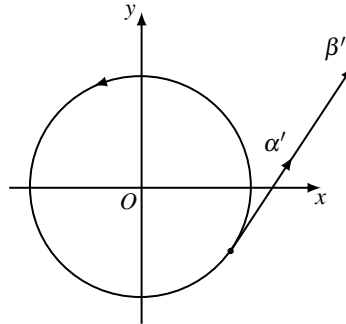
Chiamiamo il sottoinsieme $\alpha((a, b)) \subseteq \mathbb{R}^n$ la *traccia* della curva α . Il vettore

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$$

di $\mathbb{R}^n$, applicato nel punto $\alpha(t)$, rappresenta il *vettore velocità* della curva α nel punto t . Geometricamente il vettore $\alpha'(t)$ è tangente alla traccia di α .

■ **Esempio 1.1** L'applicazione $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ rappresenta una curva parametrizzata. Si verifica infatti immediatamente che α è differenziabile e che la traccia di α è una circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine privata del punto $(1, 0)$. Il vettore velocità $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ha norma $\|\alpha'(t)\| = 1$ per ogni valore di $t \in (0, 2\pi)$. La stessa traccia, come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, può essere parametrizzata utilizzando altre applicazioni differenziabili. A titolo

di esempio, si consideri la curva $\beta : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$. Anche la curva β descrive la stessa circonferenza privata del punto $(1, 0)$ ma la norma del vettore velocità è $\|\beta'\| = 2$. Si veda la figura seguente.



■ **Esempio 1.2** Si consideri la curva parametrizzata

$$\begin{aligned} \alpha : (-\infty, \infty) = \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right) \end{aligned}$$

La traccia di α è anche in questo caso una circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine privata del punto $(1, 0)$. Tuttavia, il vettore velocità

$$\alpha'(t) = \left(\frac{4t}{(1+t^2)^2}, -2 \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)^2} \right)$$

ha norma non costante

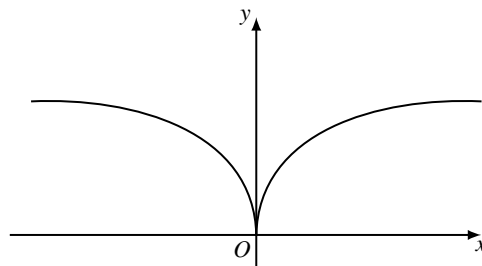
$$\|\alpha'(t)\| = \frac{2}{(1+t^2)}.$$

Questo esempio ci mostra che la traccia di una curva parametrizzata può essere parametrizzata in modi sostanzialmente differenti. Tratteremo a breve, in modo sistematico, le riparametrizzazioni delle curve parametrizzate. ■

■ **Esempio 1.3** Si consideri la curva parametrizzata

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

la cui traccia è rappresentata nella figura seguente.



Se calcoliamo il vettore velocità $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$ notiamo che, per $t = 0$, si trova $\alpha'(0) = (0, 0)$, cioè il vettore velocità si annulla. Tale circostanza si manifesta nella traccia, in questo caso, con un punto di cuspidi nell'origine. ■

Osservazione 1.2 Il metodo della radice quadrata per disegnare l'insieme degli zeri di una curva algebrica del tipo $x^2 = f(y)$ si basa sul disegnare il grafico della funzione $x = \sqrt{f(y)}$ solo per valori di y tali che $f(y) \geq 0$ e poi unire il grafico precedente con quello simmetrico rispetto all'asse y . In pratica disegnare il grafico delle due funzioni:

$$x = \pm \sqrt{f(y)}$$

in tutti i punti in cui $f(y) \geq 0$.

Ad esempio, la traccia della curva parametrizzata dell'Esempio 1.3 appartiene alla curva algebrica $x^2 = y^3$. Da cui

- $f(y) = y^3$, quindi la curva è definita per $y \geq 0$.
- I due rami sono dati da $x = \pm \sqrt{y^3}$ i cui grafici non differiscono molto da quelli della funzione cubica $x = \pm y^3$.

Si ottiene quindi facilmente l'immagine mostrata nell'Esempio 1.3.

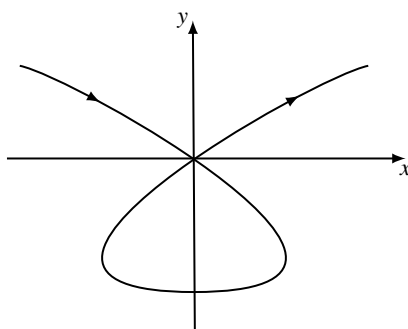
Allo stesso modo si procede se si considera una curva algebrica del tipo $y^2 = f(x)$. A titolo di esempio, è molto utile che il lettore provi a disegnare l'insieme degli zeri della curva algebrica $y^2 = x^3 - 3x + \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Troverà che vi sono almeno 4 tipi "sostanzialmente" differenti.

Definizione 1.2 Una curva parametrizzata $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *regolare* se $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$. Chiamiamo un punto $t_0 \in (a, b)$ con $\alpha'(t_0) = 0$ un punto *singolare*.

■ **Esempio 1.4** Sia

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4) \end{aligned}$$

La traccia della curva parametrizzata α è rappresentata nella figura seguente.



In questo caso si vede che $\alpha(2) = \alpha(-2)$, cioè α non è iniettiva. ■

Esercizio 1.1 Utilizzando il metodo della radice quadrata disegnare la traccia delle curva nell'Esempio 1.4.

Data una curva parametrizzata $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare e iniettiva si ottiene una funzione biettiva $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha((a, b)) \subseteq \mathbb{R}^n$. Se consideriamo nell'intervallo (a, b) la topologia euclidea e in $\alpha((a, b))$ la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$ ci si può chiedere se la biezione $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha((a, b))$ sia un omeomorfismo. Il prossimo esempio mostra che la risposta è negativa.

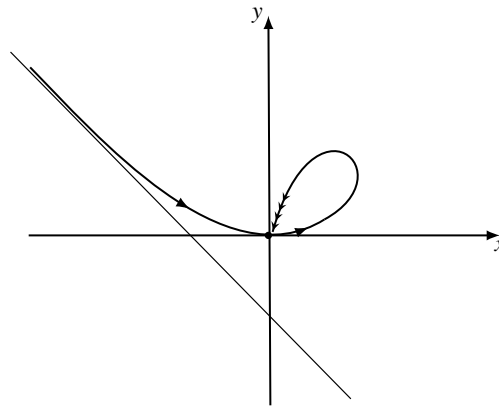
■ **Esempio 1.5 — Folium di Cartesio.** Sia

$$\begin{aligned} \alpha : (-1, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right) \end{aligned}$$

È facile verificare che α è iniettiva. Si osservi che $\alpha(0) = (0,0)$ e che

$$\lim_{t \rightarrow -1} [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)] = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t(t+1)}{1+t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3+6t}{3t^2} = -1.$$

Quindi, per $t \rightarrow -1$, la traccia della curva tende asintoticamente alla retta $x+y = -1$. Inoltre, per $t > 0$ sia l'ascissa che l'ordinata dei punti della traccia sono positive e $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = (0,0)$. Si deduce che la traccia di α è qualitativamente come riportato nella figura seguente.



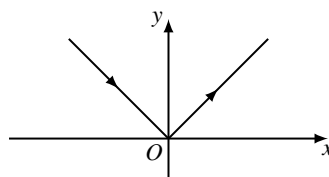
■

Consideriamo adesso la funzione biettiva $\alpha : (-1, \infty) \rightarrow \alpha((-1, \infty))$ e sia $B_\varepsilon(0)$ un intorno aperto del punto $0 \in (-1, \infty)$. L'immagine di $B_\varepsilon(0)$ tramite α è un intervallo di curva passante per l'origine che non contiene alcun punto del ramo di curva che tende all'origine quando $t \rightarrow +\infty$. Segue che $\alpha(B_\varepsilon(0))$ non è un aperto della traccia. Infatti, essendo gli aperti della traccia ottenuti come intersezione di dischi aperti del piano con la traccia stessa devono, necessariamente, contenere punti del ramo di curva che tende all'origine quando $t \rightarrow +\infty$.

■ **Esempio 1.6** In questo esempio consideriamo una curva parametrizzata che non è differenziabile in un punto. Sia

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, |t|) \end{aligned}$$

la cui traccia è la seguente



Chiaramente la curva non è differenziabile in $t = 0$. Rimane comunque differenziabile per $t < 0$ e per $t > 0$. ■

■ **Esempio 1.7 — Grafico di una funzione.** Sia $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia definita su un intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Il grafico $\Gamma(g)$ di g è la traccia della curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\alpha(t) = (t, g(t)).$$

In questo caso, essendo $\alpha'(t) = (1, g'(t))$, la curva risulta sempre regolare. ■

■ **Esempio 1.8** Diamo adesso un esempio di curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ due costanti positive e si consideri la curva parametrizzata

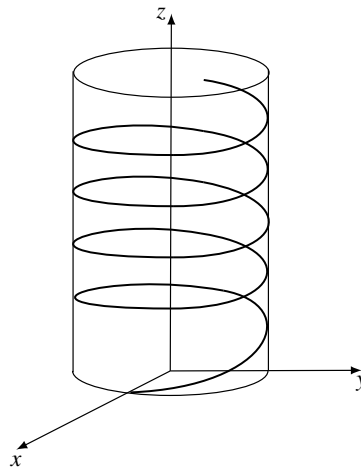
$$\begin{aligned}\alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (a \cos t, a \sin t, bt).\end{aligned}$$

Geometricamente la traccia di α si ottiene applicando al punto di coordinate $(a, 0, 0)$ il seguente gruppo ad un parametro di roto traslazioni (al variare di t)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ bt \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

L'immagine seguente mostra la traccia di α la quale prende il nome di *elica circolare retta*. Il nome è chiaramente giustificato dal fatto che la traccia di α appartiene al cilindro circolare retto

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}.$$



La curva α gode di una proprietà geometrica notevole. Se calcoliamo l'angolo ϑ tra il vettore velocità e il versore $e_3 = (0, 0, 1)$ si ottiene

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \alpha', e_3 \rangle}{\|\alpha'\| \|e_3\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{costante}$$

la quale ci permette di concludere che il vettore tangente forma con la direzione e_3 un angolo costante lungo tutto il suo percorso. Per esempio, se $a = b > 0$, l'angolo è $\vartheta = \pi/4$. Vedremo più avanti che le curve che soddisfano una tale proprietà formano una classe speciale chiamata *curve ad angolo costante*. ■

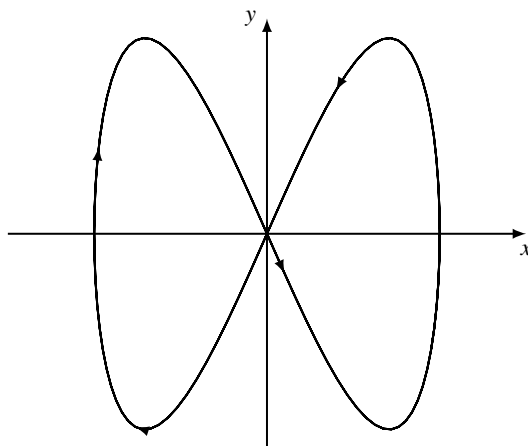
Estendiamo adesso il concetto di curva parametrizzata nel caso in cui il dominio sia un intervallo chiuso.

Definizione 1.3

1. Un'applicazione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice differenziabile in $[a, b]$ se α è la restrizione ad $[a, b]$ di un'applicazione differenziabile $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $[a, b] \subseteq (c, d)$.
2. Una curva parametrizzata $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definisce una *curva chiusa* differenziabile se α è periodica, cioè se esiste $T > 0$ tale che $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ovviamente una curva chiusa definisce una curva parametrizzata $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(0) = \alpha(T)$ la cui traccia $\alpha([0, T])$ risulta effettivamente “chiusa” nel senso figurato del termine.

■ **Esempio 1.9** L'applicazione $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, definisce una curva parametrizzata differenziabile poiché è la restrizione a $[0, 2\pi]$ dell'applicazione α definita su un qualunque intervallo aperto (a, b) che contiene $[0, 2\pi]$, quindi anche su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre α definisce una curva chiusa poiché è periodica di periodo 2π . ■

■ **Esempio 1.10** In modo analogo all'esempio precedente l'applicazione $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(2t))$, definisce una curva parametrizzata differenziabile chiusa di periodo 2π . La curva α non è però iniettiva, poiché $\alpha(\pi/2) = \alpha(3\pi/2)$. La traccia, come mostra la figura sotto, ha infatti un punto di autointersezione. Tale curva, per la forma della sua traccia, prende il nome di *curva a otto*.



Per alcune applicazioni che seguiranno nel seguito è bene sin da subito considerare anche il caso di curve parametrizzate che non sono differenziabili in tutti i punti dell'intervallo di definizione, come per l'Esempio 1.6. Se il numero di punti nei quali la curva parametrizzata α non è differenziabile è finito diamo la seguente

Definizione 1.4 Una curva parametrizzata $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *differenziabile a tratti* se α è continua in $[a, b]$, differenziabile in tutto (a, b) tranne che in un numero finito di punti $t_1, \dots, t_d \in (a, b)$. La stessa definizione si applica per curve definite su un intervallo chiuso $[a, b]$.

1.2 Lunghezza d'arco

Da ora in poi, se non esplicitamente indicato, consideriamo curve parametrizzate $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabili e regolari. Non chiederemo, tranne quando esplicitamente specificato, che la curva sia iniettiva o che sia un omeomorfismo tra I e la sua immagine.

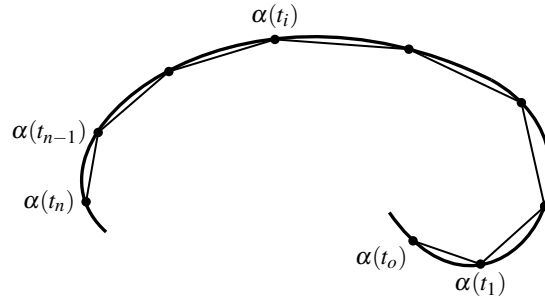
Definizione 1.5 Dato $t_o \in I$ sia $t \in I$, $t > t_o$. Definiamo la lunghezza dell'arco di curva da $\alpha(t_o)$ a $\alpha(t)$ come

$$L_{t_o}^t(\alpha) := \int_{t_o}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau. \quad (1.1)$$

Enunciamo senza dimostrazione un risultato che spiega perché la (1.1) si possa considerare una valida definizione della lunghezza dell'arco di una curva parametrizzata. Sia $\alpha : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva e sia $[a, b] \subset (c, d)$. Sia $P = \{t_o = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$. Denotiamo con

$$L_a^b(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

la lunghezza della poligonale che congiunge $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$ come illustrato in figura



Indichiamo con

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Vale il seguente risultato che illustra quanto anticipato.

Proposizione 1.1 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata e sia $[a, b] \subseteq I$, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che, per ogni partizione $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ di $[a, b]$ con $|P| < \delta$, si ha

$$\left| L_a^b(\alpha, P) - \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \right| < \varepsilon.$$

Definizione 1.6 Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata. Per ogni $t_o \in (a, b)$, la funzione

$$\begin{aligned} s : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) = \int_{t_o}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

si chiama *ascissa curvilinea*.

Il valore assoluto della funzione $s(t)$ misura la lunghezza dell'arco di curva da un punto fissato t_o . Si osservi che la derivata della funzione $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0 \quad (1.3)$$

quindi si tratta di una funzione strettamente crescente. Vale l'importante fatto

$$\|\alpha'\| = 1 \Leftrightarrow s(t) = t - t_o,$$

la cui verifica, immediata, è lasciata per esercizio. Quindi, nel caso in cui $\|\alpha'\| = 1$, il valore $|t - t_o|$ per ogni dato $t_o \in (a, b)$, misura la lunghezza dell'arco di curva dal punto $\alpha(t_o)$ al punto $\alpha(t)$.

■ **Esempio 1.11** Consideriamo la parametrizzazione della circonferenza $\alpha : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Il vettore velocità $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ha norma $\|\alpha'(t)\| = 1$. Se scegliamo $t_o = 0$ si trova che $s(t) = t$ ed ovviamente $|t|$ misura la lunghezza dell'arco di curva dal punto $\alpha(0) = (1, 0)$ al punto $\alpha(t)$. ■

Definizione 1.7 Una curva parametrizzata $\alpha(t)$ si dice *parametrizzata con velocità unitaria* se $\|\alpha'\| = 1$.

1.3 Riparametrizzazioni

Supponiamo che $\varphi : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione differenziabile in un intervallo (c, d) e che $\varphi'(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau \in (c, d)$. Allora φ' è strettamente positiva o strettamente negativa in tutti i punti di (c, d) e quindi φ è strettamente monotona su (c, d) . Pertanto $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b) = \varphi((c, d))$ è invertibile, la sua inversa φ^{-1} è derivabile su (a, b) poiché se $t = \varphi(\tau) \in (a, b)$ si ha

$$\frac{d\varphi^{-1}}{dt}(t) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau)} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\tau}(\varphi^{-1}(t))}.$$

Iterando la derivazione si ottiene, per ogni $k > 1$, la seguente formula

$$\frac{d^k \varphi^{-1}}{dt^k}(t) = \frac{(-1)^{k-1}}{\left(\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau)\right)^{2k-1}} P_k \left(\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau), \dots, \frac{d^k \varphi}{d\tau^k}(\tau) \right)$$

dove P_k è un polinomio che dipende da k . Quest'ultima garantisce che φ^{-1} sia differenziabile. Diamo la seguente

Definizione 1.8 Una funzione $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ è un *diffeomorfismo* se è differenziabile, invertibile con inversa differenziabile.

Da quanto illustrato sopra segue che:

Una funzione differenziabile suriettiva $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ è un *diffeomorfismo* se e solo se $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (c, d)$.

■ **Esempio 1.12** La funzione $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$, $f(t) = t^3$, è differenziabile, invertibile, ma non è un diffeomorfismo. Infatti l'inversa $f^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ non è differenziabile in 0 in accordo col fatto che $f'(0) = 0$.

La funzione $f : (1, 2) \rightarrow (1, \sqrt{2})$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$ è un diffeomorfismo. ■

Definizione 1.9 Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata e sia $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ un diffeomorfismo. Chiamiamo la curva parametrizzata $\beta = \alpha \circ \varphi : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una *riparametrizzazione* della curva α .

■ **Esempio 1.13** Sia

$$\begin{aligned} \alpha : (-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \end{aligned}$$

e sia $\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow (-\infty, \infty)$ il diffeomorfismo $\varphi(\tau) = \tan(\tau/2)$. Allora la riparametrizzazione di α tramite φ diventa

$$\begin{aligned} \beta = \alpha \circ \varphi : (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tau &\mapsto \left(\frac{1 - \tan^2(\tau/2)}{1 + \tan^2(\tau/2)}, \frac{2 \tan(\tau/2)}{1 + \tan^2(\tau/2)} \right) = (\cos \tau, \sin \tau). \end{aligned}$$

Proposizione 1.2 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata e sia $\varphi : J \rightarrow I$ un diffeomorfismo. Allora

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta).$$

dove $\beta = \alpha \circ \varphi$, $[a, b] \subset I$, $[c, d] \subset J$ e $\varphi([c, d]) = [a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $\varphi'(\tau) = d\varphi/d\tau(\tau) > 0$, da cui $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Inoltre

$$\frac{d\beta}{d\tau}(\tau) = \frac{d\alpha}{dt}(\varphi(\tau)) \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau).$$

Segue che

$$L_c^d(\beta) = \int_c^d \left\| \frac{d\beta}{d\tau} \right\| d\tau = \int_c^d \left\| \frac{d\alpha}{dt}(\varphi(\tau)) \right\| \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau = \int_a^b \left\| \frac{d\alpha}{dt}(t) \right\| dt = L_a^b(\alpha),$$

dove si è posto $t = \varphi(\tau)$. Il lettore dovrebbe fare il conto svolto sopra nel caso in cui $\varphi'(\tau) = d\varphi/d\tau(\tau) < 0$ e convincersi che continua a valere. ■

Sia $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata regolare e sia $t_o \in I$, allora la funzione ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_{t_o}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

è una funzione monotona crescente ($s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$). Segue che, ponendo $J = s(I)$, la funzione $s : I \rightarrow J$ è un diffeomorfismo. Sia

$$\begin{aligned} t : J &\rightarrow I \\ s &\mapsto t(s) \end{aligned}$$

la funzione inversa della funzione s e consideriamo la riparametrizzazione $\beta(s) = \alpha \circ t(s)$ della curva parametrizzata α . Dalla regola della catena e dalla regola della derivata della funzione inversa, si trova

$$\frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{1}{\left\| \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \right\|} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|}, \quad (1.4)$$

dove abbiamo indicato con “ $'$ ” la derivata rispetto al parametro t mentre con d/ds la derivata rispetto all'ascissa curvilinea. Segue dalla (1.4) che (omettiamo per semplificare le notazioni il punto di applicazione)

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \left\| \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \right\| = \frac{\|\alpha'\|}{\|\alpha'\|} = 1.$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente fatto

Proposizione 1.3 Sia $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata regolare e sia $t_o \in I$. Sia $t(s)$ l'inversa della funzione ascissa curvilinea. Allora la riparametrizzazione $\beta(s) = \alpha \circ t(s)$ della curva parametrizzata α ha velocità unitaria.

Si suol dire che la curva parametrizzata $\beta(s)$ è una riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea della curva parametrizzata α . Da ora in poi, se per una curva parametrizzata regolare α si ha $\|\alpha'\| = 1$, si dice che la curva α è parametrizzata con l'ascissa curvilinea e si indica il parametro con s .

■ **Esempio 1.14** Sia

$$\begin{aligned} \alpha : (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (R \cos t + c_1, R \sin t + c_2) \end{aligned}$$

la parametrizzazione di una circonferenza di raggio $R > 0$ centrata nel punto $C = (c_1, c_2)$. Sia $t_o = 0 \in (-\pi, \pi)$, allora

$$s(t) = \int_0^t R d\tau = Rt$$

da cui, $t(s) = s/R$. Segue che la riparametrizzazione di α con l'ascissa curvilinea è la curva parametrizzata

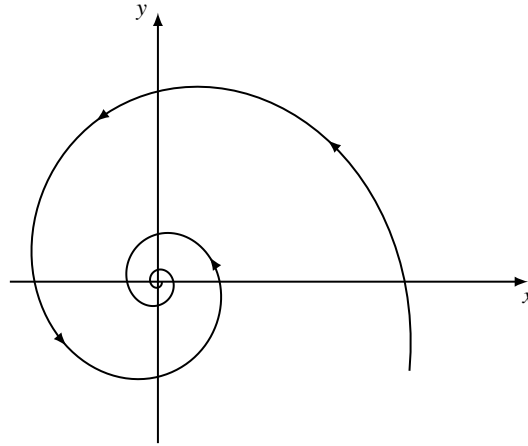
$$\begin{aligned} \beta: (-R\pi, R\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \left(R \cos \frac{s}{R} + c_1, R \sin \frac{s}{R} + c_2\right). \end{aligned}$$

■

■ **Esempio 1.15 — Spirale logaritmica.** Sia

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t) \end{aligned}$$

con $a > 0$ e $b < 0$. La traccia di α , chiamata *spirale logaritmica*, ha un andamento come mostrato nella figura seguente.



Si trova che $\|\alpha'\| = ae^{bt}\sqrt{b^2+1}$ da cui, per $t_o = 0$,

$$s(t) = \int_0^t ae^{b\tau}\sqrt{b^2+1} d\tau = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{bt}-1).$$

L'inversa di s , definita nell'intervallo $(-\infty, -\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1})$, è la funzione

$$t(s) = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{b}{a} \frac{s}{\sqrt{b^2+1}} + 1 \right).$$

La riparametrizzazione di α con l'ascissa curvilinea diviene

$$\beta(s) = \left(\frac{bs}{\sqrt{b^2+1}} + a \right) \left(\cos \left[\frac{1}{b} \ln \left(\frac{b}{a} \frac{s}{\sqrt{b^2+1}} + 1 \right) \right], \sin \left[\frac{1}{b} \ln \left(\frac{b}{a} \frac{s}{\sqrt{b^2+1}} + 1 \right) \right] \right).$$

■

■ **Esempio 1.16** Sia

$$\begin{aligned} \alpha: (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

■

con $b > a > 0$, la parametrizzazione di un'ellisse. In questo caso si trova $\|\alpha'\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$, da cui

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau} d\tau = b \int_0^t \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 \tau} d\tau.$$

L'ultimo integrale non può essere espresso come somma finita di funzioni elementari. Gli integrali della forma

$$\int_0^t \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \tau} d\tau$$

prendono il nome di *integrali ellittici di seconda specie*. Questo esempio mostra che anche per curve piuttosto semplici non è possibile determinare esplicitamente una parametrizzazione con l'ascissa curvilinea.

1.4 Problemi proposti

Problema 1.1 Trovare una curva parametrizzata $\alpha(t)$ la cui traccia è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso orario e tale che $\alpha(0) = (0, 1)$.

Problema 1.2 Sia $\alpha(t)$ una curva parametrizzata che non passa per l'origine per la quale esiste un punto $\alpha(t_0)$ la cui distanza dall'origine sia minima. Dimostrare che il vettore posizione $\alpha(t_0)$ è ortogonale a $\alpha'(t_0)$.

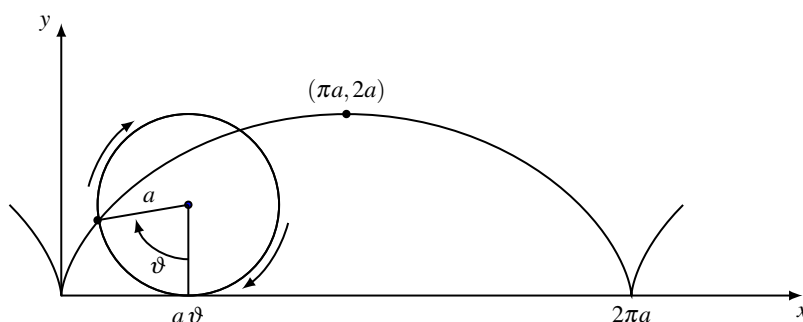
Problema 1.3 Se una curva parametrizzata $\alpha(t)$ ha la proprietà che la sua derivata seconda $\alpha''(t)$ è identicamente zero, cosa si può dire della traccia di α ?

Problema 1.4 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore dato. Si supponga che $\alpha'(t)$ sia ortogonale a v per ogni $t \in I$ e che $\alpha(0)$ sia ortogonale a v . Dimostrare che $\alpha(t)$ è ortogonale a v per ogni $t \in I$.

Problema 1.5 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, con $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Mostrare che $\|\alpha(t)\|$ è una costante diversa da zero se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale a $\alpha'(t)$ per ogni $t \in I$. Descrivere la traccia della curva α .

Problema 1.6 Mostrare che le rette tangenti alla curva parametrizzata regolare $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ formano un angolo costante con la retta $y = 0, z = x$.

Problema 1.7 Un disco circolare di raggio a nel piano xy rotola senza strisciare lungo l'asse x . La figura descritta da un punto del bordo del disco è chiamata *cicloide* (si veda la figura).



1. Determinare una curva parametrizzata $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui traccia è la cicloide e calcolare i suoi punti singolari.
2. Calcolare la lunghezza dell'arco della cicloide corrispondente ad una rotazione completa del disco.

Problema 1.8 Con riferimento alla figura sotto a sinistra, sia $OA = 2a$ il diametro di un cerchio $\mathbb{S}^1(a)$ e siano Oy e AV le tangenti a $\mathbb{S}^1(a)$ nei punti O e A , rispettivamente. Una semiretta r uscente dall'origine O incontra il cerchio $\mathbb{S}^1(a)$ in C e la retta AV in B . Sul segmento OB si tracci un punto p tale che $Op = CB$. Ruotando r attorno a O , il punto p descrive una curva chiamata *Cissoide di Diocle*.

Prendendo OA come asse x e Oy come asse y , provare che la traccia della curva parametrizzata

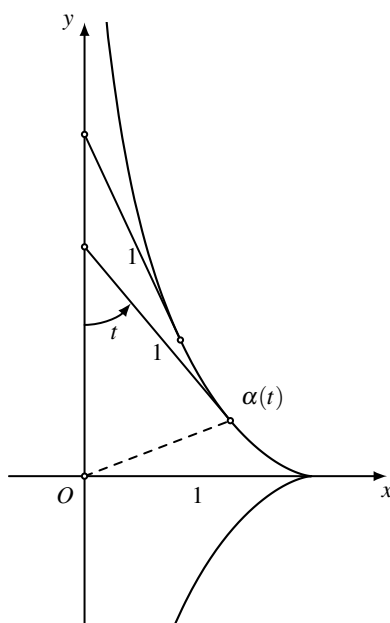
$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right)$$

è la Cissoide di Diocle ($t = \tan \theta$).

Problema 1.9 Sia $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata definita da

$$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$$

dove t è l'angolo che l'asse y forma con il vettore $\alpha'(t)$ (si veda la figura sotto). La traccia di α è chiamata *trattrice*.



Mostrare che

1. α è una curva parametrizzata differenziabile e regolare in tutti i punti tranne che in $t = \pi/2$;
2. la lunghezza del segmento sulla retta tangente alla trattrice tra il punto di tangenza e l'asse y è costante ed uguale ad 1.

Problema 1.10 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata. Sia $[a, b] \subset I$ e poniamo $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.

1. Mostrare che per ogni vettore costante v , $\|v\| = 1$,

$$\langle q - p, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

2. Si ponga

$$v = \frac{q - p}{|q - p|}$$

e si mostri che

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

L'ultima disuguaglianza mostra che la lunghezza del segmento di retta di estremi $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ è minore o uguale della lunghezza di qualsiasi altra curva parametrizzata che congiunge i due punti.

2. Teoria locale delle curve piane

In questo capitolo descriviamo la geometria locale delle curve nel piano. Sia

$$\begin{aligned}\alpha: I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \alpha(s) = (x(s), y(s))\end{aligned}$$

una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea nel piano $\mathbb{R}^2$. Poniamo $T = d\alpha/ds = \alpha' = (x', y')$, il quale rappresenta il vettore tangente unitario e sia

$$\begin{aligned}J: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-y, x)\end{aligned}$$

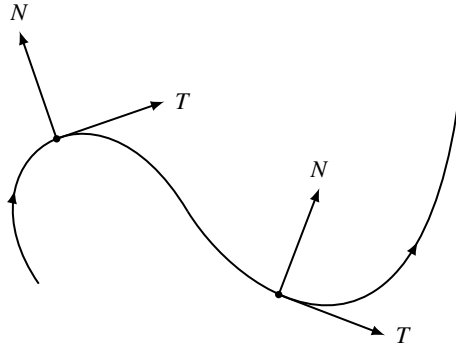
la rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario. La funzione J è un'applicazione lineare che, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, ha matrice associata

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si verifica facilmente che $JJ^\top = \text{Id}$, quindi J è una matrice ortogonale. Il vettore $JT = (-y', x') := N$ è un vettore unitario perpendicolare a T lungo la curva parametrizzata α . Quindi $\{T, N\}$ forma un riferimento ortonormale di $\mathbb{R}^2$ lungo i punti della curva parametrizzata. Inoltre, in accordo con la definizione che una base di $\mathbb{R}^2$ è positiva se è orientata coerentemente con la base canonica $\{e_1, e_2\}$, la base $\{T, N\}$ è positiva. Infatti, basta verificare che la matrice delle componenti di T e N rispetto alla base canonica abbia determinante positivo. Poiché la matrice di passaggio è

$$\begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix}$$

il determinante risulta $(x')^2 + (y')^2 = 1 > 0$. Si veda la figura sotto.



Il riferimento ortonormale positivo $\{T, N\}$ è chiamato *riferimento mobile*.

2.1 La curvatura con segno

Per studiare la geometria locale della curva parametrizzata α analizziamo come varia il riferimento mobile lungo la curva. A tal scopo calcoliamo le derivate rispetto ad s dei vettori $T(s)$ e $N(s)$ decomponele rispetto al riferimento mobile $\{T, N\}$. Poiché $\{T, N\}$ è un riferimento ortonormale vale la decomposizione

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = T' = \langle T', T \rangle T + \langle T', N \rangle N \\ \frac{dN}{ds} = N' = \langle N', T \rangle T + \langle N', N \rangle N. \end{cases}$$

Tenendo in considerazione che

$$\|T\|^2 = \|N\|^2 = 1 \quad \wedge \quad \langle T, N \rangle = 0$$

si ottiene, derivando rispetto ad s ,

$$\langle T', T \rangle = \langle N', N \rangle = 0 \quad \wedge \quad \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0.$$

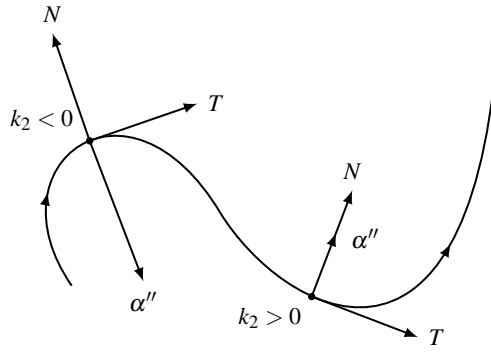
Segue che $T' = k_2(s)N$ dove abbiamo posto $k_2(s) = \langle T', N \rangle$. Inoltre, da $\langle T, N' \rangle = -\langle T', N \rangle = -k_2(s)$, si trova $N' = -k_2 T$. In conclusione si hanno le seguenti formule

$$\begin{cases} T' = k_2 N \\ N' = -k_2 T \end{cases} \quad (2.1)$$

che possono essere riscritte in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix}.$$

La funzione $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama *curvatura con segno*. Il segno di k_2 dipende dai versi dei vettori $T' = \alpha''$ e $N = J(T)$. Ricordiamo che α'' rappresenta il vettore accelerazione il quale, essendo perpendicolare a T , ha solo una componente centripeta. Segue che la curvatura k_2 è positiva se percorrendo la curva “giriamo verso sinistra” mentre è negativa se “giriamo verso destra”. Si veda la figura sotto.



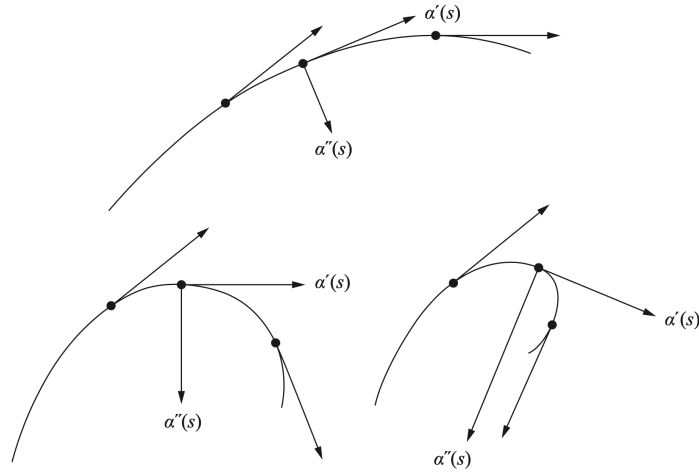
Se esplicitiamo il valore di k_2 si ottiene

$$k_2(s) = \langle T', N \rangle = \langle \alpha'', J\alpha' \rangle = \det(\alpha', \alpha'') = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y'. \quad (2.2)$$

Osserviamo inoltre che $|k_2(s)| = \|\alpha''\|$. Infatti, poiché la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea si ha $(x')^2 + (y')^2 = 1$ la quale, derivata rispetta ad s , implica $x'x'' + y'y'' = 0$. Utilizzando quest'ultima si trova dalla (2.2)

$$\begin{aligned} k_2^2 &= (x'y'')^2 + (x''y')^2 - 2x'y''x''y' = (x'y'')^2 + (x''y')^2 + (x'x'')^2 + (y'y'')^2 \\ &= (x'')^2(x'^2 + y'^2) + (y'')^2(x'^2 + y'^2) = (x'')^2 + (y'')^2 = \|\alpha''\|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

■ **Esempio 2.1** Sia $\alpha(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\|a\| = 1$, una parametrizzazione con ascissa curvilinea di una retta. Allora $\alpha'' = 0$ da cui $k_2(s) = 0$. Viceversa, se una curva parametrizzata $\alpha(s)$ ha curvatura con segno identicamente nulla, allora $|k_2(s)| = \|\alpha''\| = 0$. Segue che $\alpha'' = 0$ da cui $\alpha(s) = as + b$. Quindi, intuitivamente, il valore assoluto della curvatura $|k_2(s)| = \|\alpha''(s)\|$ misura di quanto una curva si discosta dall'essere una retta, la figura sotto mette in evidenza questo fatto.



■ **Esempio 2.2** Sia $\alpha(s) = (R\cos(s/R) + c_1, R\sin(s/R) + c_2)$ una parametrizzazione con ascissa curvilinea della circonferenza di raggio R centrata in $C = (c_1, c_2)$ percorsa in senso anti orario. Allora

$$k_2(s) = x'y'' - x''y' = \frac{1}{R}.$$

Quindi la curvatura con segno di una circonferenza è costante pari al reciproco del raggio. Si noti che, se si cambia il verso di percorrenza della circonferenza, la curvatura diviene $k_2 = -1/R$ quindi negativa. ■

Se la curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ non è parametrizzata con l'ascissa curvilinea definiamo la curvatura con segno in un punto $t \in I$ come $k_2^\alpha(t) = k_2^\beta(s(t))$ dove $\beta(s) = \alpha(t(s))$ è la riparametrizzazione di α con ascissa curvilinea. Per il calcolo si procede nel modo seguente. Sia $\beta(s) = \alpha(t(s))$ allora definiamo il vettore tangente unitario ad α in t come il vettore velocità della riparametrizzazione β nel punto $s(t)$:

$$\frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}(t(s)) := T(t(s)),$$

dove abbiamo indicato con “'” la derivata rispetto a t . Analogamente

$$N(t(s)) = JT(t(s)).$$

Inoltre

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'\|} \frac{dT}{dt}$$

che confrontato con $N(t(s))$ rivela, in accordo con la (2.1), il valore di k_2^α . Vediamo un esempio concreto.

■ **Esempio 2.3** Sia $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Si trova

$$\alpha' = (1 - \cos t, \sin t) = (2 \sin^2(t/2), 2 \sin(t/2) \cos(t/2)) = 2 \sin(t/2) (\sin(t/2), \cos(t/2))$$

da cui $\|\alpha'\| = 2 \sin(t/2)$ e $T = (\sin(t/2), \cos(t/2))$. Adesso

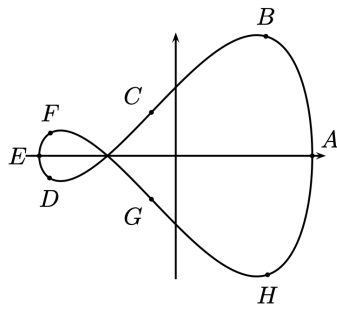
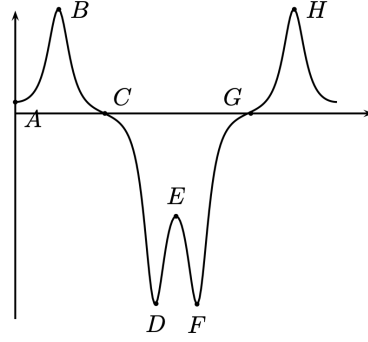
$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \frac{1}{\|\alpha'\|} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2 \sin(t/2)} (1/2 \cos(t/2), -1/2 \sin(t/2)) \\ &= -\frac{1}{4 \sin(t/2)} (-\cos(t/2), \sin(t/2)) \\ &= -\frac{1}{4 \sin(t/2)} JT = -\frac{1}{4 \sin(t/2)} N. \end{aligned}$$

Quindi $k_2 = -\frac{1}{4 \sin(t/2)}$. ■

■ **Esempio 2.4** Per aiutare il lettore ad avere un'intuizione della funzione di curvatura con segno di una curva piana, si consideri la curva parametrizzata chiusa

$$\alpha(t) = (2 \cos t, \sin(2t) + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

La figura sotto mostra fianco a fianco la traccia della curva parametrizzata e il grafico della sua funzione di curvatura, insieme ad alcuni punti utili come riferimenti. Si può vedere che la funzione di curvatura è positiva quando percorrendo la curva si gira il volante a sinistra e negativa quando si gira a destra. La curvatura è 0 quando si passa da girare a sinistra a girare a destra, o viceversa. Inoltre, la funzione di curvatura presenta i massimi e minimi locali proprio dove è necessario *sterzare di più o di meno*.

La traccia di α Il grafico di k_2

Proposizione 2.1 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata regolare (non necessariamente parametrizzata con l'ascissa curvilinea) allora

$$k_2(t) = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^3}.$$

Dimostrazione. Per definizione $k_2^\beta(t) = k_2^\beta(s(t))$ dove $\beta(s) = \alpha(t(s))$ è la riparametrizzazione di α con ascissa curvilinea. Adesso

$$k_2^\beta(s(t)) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}, J \frac{d\beta}{ds} \right\rangle$$

e, dalla (1.4), si ha

$$\frac{d\beta}{ds} = \alpha' \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}.$$

Al fine di calcolare $\frac{d^2\beta}{ds^2}$ calcoliamo prima $\frac{d^2t}{ds^2}$. Ricordando che $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'\|}$ e derivando rispetto a s la condizione

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^2},$$

si trova

$$2 \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \right) \frac{dt}{ds} = -2 \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle^2} \frac{dt}{ds}$$

dalla quale segue che

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^4}. \quad (2.4)$$

Si osservi che la (2.4) vale per una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$, non abbiamo in questo calcolo utilizzato che la curva sia in $\mathbb{R}^2$. Infine,

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\alpha' \frac{dt}{ds} \right) = \frac{\alpha''}{\|\alpha'\|^2} - \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^4} \alpha'$$

da cui

$$k_2^\beta(s(t)) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}, J \frac{d\beta}{ds} \right\rangle = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^3}.$$

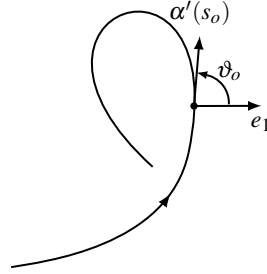
2.2 La funzione angolo

Proposizione 2.2 Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Allora esiste una funzione differenziabile $\vartheta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$T(s) = \alpha'(s) = \cos \vartheta(s) e_1 + \sin \vartheta(s) e_2.$$

Se ϑ_1 e ϑ_2 sono due di queste funzioni, allora differiscono per un multiplo intero di 2π , cioè $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ costante. In particolare, se $[c, d] \subset (a, b)$, allora la differenza $\vartheta(d) - \vartheta(c)$ è determinata in modo univoco da α .

Dimostrazione. L'applicazione $\alpha'(s)$ è differenziabile ed inoltre $\alpha'(s) = x'(s)e_1 + y'(s)e_2$ con $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Sia $s_o \in (a, b)$ allora $\alpha'(s_o) = \cos \vartheta_o e_1 + \sin \vartheta_o e_2$ dove ϑ_o è l'angolo che e_1 forma con $\alpha'(s_o)$. Si veda la figura sotto.



Si consideri adesso la funzione differenziabile

$$\vartheta(s) = \vartheta_o + \int_{s_o}^s (x'y'' - y'x'') du.$$

Per costruzione $x'(s_o) = \cos \vartheta_o = \cos \vartheta(s_o)$ e $y'(s_o) = \sin \vartheta_o = \sin \vartheta(s_o)$. Dobbiamo mostrare che $x'(s) = \cos \vartheta(s)$ e $y'(s) = \sin \vartheta(s)$ per ogni $s \in (a, b)$. A tal scopo è sufficiente mostrare che, per ogni $s \in (a, b)$,

$$(x'(s) - \cos \vartheta(s))^2 + (y'(s) - \sin \vartheta(s))^2 = 2 - 2(x'(s) \cos \vartheta(s) + y'(s) \sin \vartheta(s)) = 0$$

cioè che

$$A(s) = x'(s) \cos \vartheta(s) + y'(s) \sin \vartheta(s) = 1, \quad \forall s \in (a, b).$$

Utilizzando le identità $x'x'' = -y'y''$ e $\vartheta' = x'y'' - y'x''$ si ottiene facilmente che $A'(s) = 0$. Quindi $A(s)$ è una funzione costante con $A(s_o) = 1$ segue che $A(s) = 1$ per ogni $s \in (a, b)$.

Se ϑ_1 e ϑ_2 fossero due funzioni differenziabili tali che

$$x'(s) = \cos \vartheta_1(s) \quad y'(s) = \sin \vartheta_1(s)$$

e

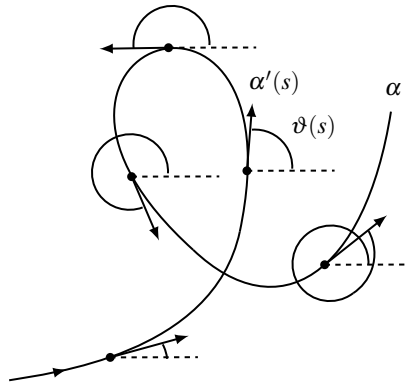
$$x'(s) = \cos \vartheta_2(s) \quad y'(s) = \sin \vartheta_2(s)$$

si dovrebbe avere, per ogni $s \in (a, b)$, che

$$\vartheta_1(s) = \vartheta_2(s) + 2k(s)\pi, \quad k(s) \in \mathbb{Z}.$$

Se $k(s)$ non fosse costante, essendo $k(s) \in \mathbb{Z}$, la funzione $\vartheta_1(s) - \vartheta_2(s) = 2k(s)\pi$ non sarebbe neanche continua, contro l'ipotesi che $\vartheta_1(s)$ e $\vartheta_2(s)$ sono differenziabili. Segue quindi il risultato desiderato che $\vartheta_1(s) = \vartheta_2(s) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. ■

La funzione $\vartheta(s)$ misura l'angolo descritto dal versore e_1 e dal vettore velocità $\alpha'(s)$ man mano che si percorre la curva al variare di $s \in (a, b)$. Si osservi che, punto per punto, ogni vettore unitario può essere scritto, banalmente, nella forma $\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2$. L'affermazione importante della Proposizione 2.2 è che l'angolo ϑ può essere scelto in modo da risultare una funzione liscia del parametro s . Tuttavia, questa funzione angolo è unica a meno di multipli interi di 2π . Alternativamente si potrebbe determinare, per ogni $s \in (a, b)$, in modo univoco l'angolo tra e_1 e $\alpha'(s)$ richiedendo che appartenga all'intervallo $[0, 2\pi)$. Ma seguendo questa procedura la funzione ϑ presenterebbe delle discontinuità (salti) in quei punti in cui il vettore velocità ha completato un giro. Si veda la figura seguente per capire bene come è descritta la funzione angolo differenziabile $\vartheta(s)$.



Dalla dimostrazione della Proposizione 2.2 si ricava immediatamente anche il seguente fatto che, per completezza, preferiamo enunciare come una proposizione e rifarne la dimostrazione.

Proposizione 2.3 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea e sia $\vartheta(s)$ la funzione angolo descritta nella Proposizione 2.2. Allora

$$k_2(s) = \vartheta'(s).$$

Dimostrazione. Se $\alpha(s)$ è una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea allora, dalla Proposizione 2.2, il vettore tangente $T(s)$ si scrive come $T(s) = \cos \vartheta(s) e_1 + \sin \vartheta(s) e_2$ con $\vartheta(s)$ funzione differenziabile. Si ha quindi

$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s))$$

la cui derivata diviene

$$\alpha''(s) = (x''(s), y''(s)) = (-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)) \vartheta'(s).$$

Infine, dalla (2.2), si conclude

$$k_2(s) = x'y'' - x''y' = \vartheta'(s).$$

■

Diamo la seguente definizione

Definizione 2.1 Sia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata periodica con periodo L . Sia $\vartheta(s)$ la funzione angolo descritta nella Proposizione 2.2. Allora il numero

$$\omega_\alpha := \frac{1}{2\pi} [\vartheta(L) - \vartheta(0)]$$

■ è chiamato *numero di rotazione* di α .

Si osservi che il numero di rotazione è sempre un numero intero. Infatti, sia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata periodica con periodo L e sia $\vartheta(s)$ la funzione angolo. Allora $\alpha'(0) = \alpha'(L)$ da cui $\cos \vartheta(L) = \cos \vartheta(0)$ e $\sin \vartheta(L) = \sin \vartheta(0)$. Segue che $\vartheta(L) - \vartheta(0) = 2\pi k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

■ **Esempio 2.5** L'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R))$, definisce una curva parametrizzata periodica di periodo $2\pi R$ la cui traccia è la circonferenza di raggio R centrata nell'origine. Se consideriamo $s_0 = 0$, la funzione angolo in questo caso diventa

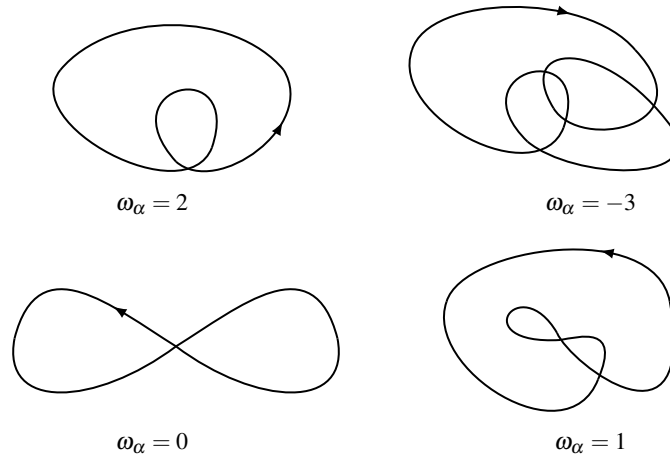
$$\vartheta(s) = \vartheta_0 + \int_0^s (x'y'' - y'x'') du = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{R}.$$

Segue che

$$\omega_\alpha := \frac{1}{2\pi} [\vartheta(2\pi R) - \vartheta(0)] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi R}{R} - \frac{\pi}{2} \right] = 1.$$

■

Non è difficile convincersi, in modo intuitivo senza adoperare una parametrizzazione, dei seguenti valori del numero di rotazione



Ci si aspetta che una curva chiusa con numero di rotazione, in valore assoluto, maggiore o uguale a 2 debba presentare delle autointersezioni. Cioè se una curva prima di chiudersi compie almeno due rotazioni complete deve necessariamente autointersecarsi. Questo fatto, che appare intuitivo, rappresenta l'annuncio del seguente famoso teorema del quale non daremo qui la dimostrazione

Teorema 2.1 Una curva parametrizzata piana chiusa e semplice ha numero di rotazione 1 o -1 .

Il teorema è dovuto a *H. Hopf* il quale l'aveva battezzato con il nome *Umlaufsatz* (dal tedesco *umlauf* = circolazione e *satz* = teorema). L'elegante dimostrazione data da *H. Hopf* si trova nell'articolo pubblicato su *Compositio Math.* 2 (1935), 50–62.

Osservazione 2.1 Sia $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un movimento rigido diretto, cioè $M(P) = AP + b$ dove $A \in SO(2)$ è una matrice ortogonale con $\det(A) = 1$ e $b \in \mathbb{R}^2$ un vettore costante. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea e sia $\beta(s) = M(\alpha(s)) = A\alpha(s) + b$ la curva parametrizzata ottenuta componendo α con il movimento rigido. Allora

$$\beta' = A\alpha' \quad \wedge \quad \beta'' = A\alpha''$$

da cui

$$k_2^\beta = \langle \beta'', J\beta' \rangle = \langle A\alpha'', JA\alpha' \rangle = \langle A\alpha'', AJ\alpha' \rangle = \langle \alpha'', J\alpha' \rangle = k_2^\alpha,$$

dove si è utilizzato che una matrice ortogonale A preserva il prodotto scalare ed inoltre, se $\det(A) = 1$, commuta con J (verificare per esercizio). Quindi la curvatura con segno è un invariante per movimenti rigidi diretti di $\mathbb{R}^2$.

Il seguente teorema garantisce il viceversa dell'Osservazione 2.1, cioè la curvatura k_2 determina la curva parametrizzata a meno di movimenti rigidi diretti.

Teorema 2.2 — Teorema Fondamentale delle curve nel piano. Sia $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora esiste una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $k_2^\alpha(s) = k_2(s)$ per ogni $s \in I$. Inoltre, se $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'altra curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea con $k_2^\beta(s) = k_2(s)$ per ogni $s \in I$, allora esiste un movimento rigido diretto $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\beta = M \circ \alpha$.

Dimostrazione. Sia $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e si scelga $s_o \in I$. Definiamo una funzione $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\vartheta(s) = \int_{s_o}^s k_2(u) du.$$

Sia adesso

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_o}^s \cos \vartheta(u) du, \int_{s_o}^s \sin \vartheta(u) du \right)$$

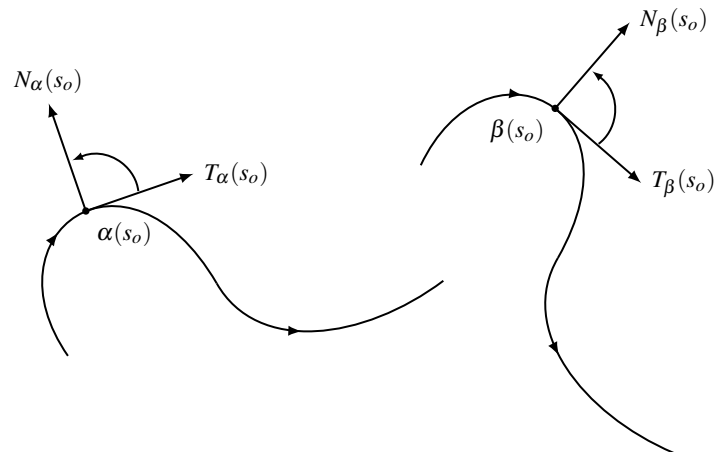
una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Si trova

$$T = \alpha' = (\cos \vartheta, \sin \vartheta), \quad T' = \alpha'' = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta) \vartheta' = \vartheta' JT = \vartheta' N$$

da cui, tenendo conto della (2.1), si trova $k_2^\alpha = \vartheta' = k_2$. Abbiamo dimostrato l'esistenza. Dimostriamo adesso l'unicità. Sia $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'altra curva parametrizzata con $k_2^\beta(s) = k_2(s) = k_2^\alpha(s)$. Fissato $s_o \in I$, consideriamo i due riferimenti ortonormali positivi

$$\{T_\alpha(s_o), N_\alpha(s_o)\}, \quad \{T_\beta(s_o), N_\beta(s_o)\},$$

come mostrati nella figura seguente.



Esiste quindi una matrice $A \in SO(2)$ tale che

$$T_\beta(s_o) = AT_\alpha(s_o) \quad \wedge \quad N_\beta(s_o) = AN_\alpha(s_o).$$

Sia adesso $b = \beta(s_o) - A\alpha(s_o)$ e si consideri il movimento rigido diretto $M(P) = AP + b$. Mostriamo che $\gamma(s) = M(\alpha) = A\alpha + b$ coincide con $\beta(s)$. Ovviamente $\gamma(s_o) = A\alpha(s_o) + b = \beta(s_o)$, inoltre

$$T_\gamma(s_o) = A\alpha'(s_o) = AT_\alpha(s_o) = T_\beta(s_o), \quad N_\gamma(s_o) = JT_\gamma(s_o) = JT_\beta(s_o) = N_\beta(s_o) \quad (2.5)$$

e, tenendo conto dell'Osservazione 2.1,

$$k_2^\gamma(s) = k_2^\alpha(s) = k_2^\beta(s) = k_2(s). \quad (2.6)$$

Definiamo la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(s) = \frac{1}{2} [\|T_\beta(s) - T_\gamma(s)\|^2 + \|N_\beta(s) - N_\gamma(s)\|^2].$$

Derivando la funzione f ed utilizzando la (2.1) e la (2.6), si trova

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle T'_\beta(s) - T'_\gamma(s), T_\beta(s) - T_\gamma(s) \rangle + \langle N'_\beta(s) - N'_\gamma(s), N_\beta(s) - N_\gamma(s) \rangle \\ &= k_2 \langle N_\beta(s) - N_\gamma(s), T_\beta(s) - T_\gamma(s) \rangle - k_2 \langle T_\beta(s) - T_\gamma(s), N_\beta(s) - N_\gamma(s) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

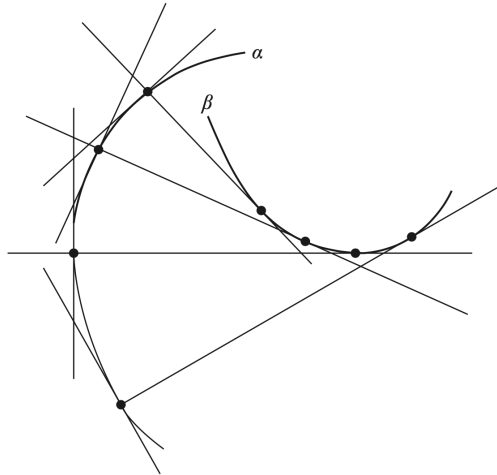
Quindi $f = \text{costante}$, ma, dalla (2.5), $f(s_o) = 0$ quindi $f = 0 \quad \forall s \in I$. Segue che $T_\beta(s) = T_\gamma(s)$, cioè $\beta' = \gamma'$. Integrando si ottiene $\gamma(s) = \beta(s) + C$, $C \in \mathbb{R}^2$. Infine, $\beta(s_o) = \gamma(s_o)$ implica che $C = 0$ da cui $\beta(s) = \gamma(s)$. ■

2.3 Problemi proposti

Problema 2.1 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata piana, non necessariamente con l'ascissa curvilinea, e sia k_2 la curvatura con segno. Supponiamo che $k_2(t) \neq 0, \forall t \in I$. La curva parametrizzata

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_2(t)} N(t), \quad t \in I$$

è chiamata l'*evoluta* di α .



1. Mostrare che le rette tangenti all'evoluto in t sono normali alla curva α in t .
2. Considerare le rette normali per due punti vicini $t_1 \neq t_2$. Far tendere t_1 a t_2 e mostrare che i punti di intersezione delle normali convergono in un punto sulla traccia dell'evoluto di α .

Problema 2.2 La traccia della curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove t è un parametro arbitrario, quindi non è l'ascissa curvilinea, è chiamata la *catenaria*.

1. Mostrare, utilizzando il metodo descritto nell'Esempio 2.3, che la curvatura con segno della catenaria è:

$$k_2(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

2. Determinare la parametrizzazione dell'evolvente della catenaria e calcolarne la curvatura con segno.

Problema 2.3 Si considerino coordinate polari (ρ, ϑ) nel piano. Una curva in coordinate polari è descritta dall'assegnazione di ρ come funzione di ϑ , $\rho = \rho(\vartheta)$, con $\vartheta \in [a, b]$.

1. Mostrare che la lunghezza della curva è

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\vartheta$$

dove $'$ denota la derivata rispetto a ϑ .

2. Mostrare che la curvatura con segno è data da

$$k_2(\vartheta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Problema 2.4 Il sottoinsieme dei punti del piano che soddisfano $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ è chiamato *astroide*. Mostrare che $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ è una parametrizzazione dell'astroide. Mostrare che la parametrizzazione è regolare tranne quando t è un multiplo intero di $\pi/2$. Disegnare l'astroide e segnare i punti singolari della parametrizzazione. Determinare la lunghezza dell'astroide tra i valori dei parametri $t = 0$ e $t = \pi/2$. Calcolare la curvatura con segno dell'astroide nei punti regolari.

Problema 2.5 Sia α una curva parametrizzata piana regolare e sia λ un numero reale. La corrispondente curva parallela ad α è data da $\alpha^\lambda = \alpha + \lambda N$. Mostrare che, nel caso $k_2^\alpha \lambda \neq 1$, la curvatura con segno di α^λ è data da

$$k_2^\lambda = \frac{k_2^\alpha}{|1 - k_2^\alpha \lambda|}$$

Problema 2.6 Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata piana regolare parametrizzata con velocità unitaria. Si supponga che esista $t_o \in (a, b)$ tale che la funzione $d : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $d(t) = \|\alpha(t)\|$ (distanza dell'origine dalla traccia di α), abbia un massimo in t_o . Dimostrare che la curvatura k_2 di α in t_o soddisfa $|k_2(t_o)| \geq 1/\|\alpha(t_o)\|$.

Problema 2.7 Sia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea periodica di periodo L . Dimostrare che

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^L k_2(s) ds.$$

Problema 2.8 Calcolare la curvatura con segno della parametrizzazione dell'ellisse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ con $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$. Determinare i punti in cui la curvatura presenta un punto stazionario (tali punti sono chiamati *vertici*).

Problema 2.9 Calcolare la curvatura con segno della curva $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = ((1 + 2 \sin(t)) \cos(t), (1 + 2 \sin(t)) \sin(t))$ e dire quanti vertici presenta. Provare a descrivere la traccia di α .

Problema 2.10 Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Sia $s_o \in (a, b)$ con $k_2(s_o) \neq 0$. Il *cerchio osculatore* a α in s_o è la circonferenza di centro $\alpha(s_o) + 1/k_2(s_o)N(s_o)$ e raggio $|1/k_2(s_o)|$ (tale raggio è chiamato *raggio di curvatura*). Mostrare che se il cerchio è parametrizzato con l'ascissa curvilinea e l'orientamento è scelto correttamente, allora il cerchio osculatore è tangente alla curva α nel punto $\alpha(s_o)$ al secondo ordine, cioè la prima e la seconda derivata coincidono.

3. Teoria locale delle curve nello spazio

Prima di trattare la teoria delle curve nello spazio $\mathbb{R}^3$ ricordiamo alcune utili formule che riguardano il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 3.1 Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* di u e v è il vettore $u \wedge v$ definito da

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w), \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$$

Valgono le seguenti proprietà

1. $u \wedge v = -v \wedge u$
2. $u \wedge v$ è bilineare
3. $u \wedge v = 0 \iff u, v$ sono linearmente dipendenti
4. $\langle u \wedge v, u \rangle = \langle u \wedge v, v \rangle = 0$

Inoltre, dalla relazione

$$\det(u, v, u \wedge v) = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2$$

segue che se u, v sono linearmente indipendenti, allora $\{u, v, u \wedge v\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$.

Il lettore, per riprendere familiarità con il prodotto vettoriale, dovrebbe dimostrare le seguenti utili identità:

$$\langle u \wedge v, w \wedge z \rangle = \begin{vmatrix} \langle u, w \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle u, z \rangle & \langle v, z \rangle \end{vmatrix}, \quad \forall u, v, w, z \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

La prossima formula mette in evidenza che il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, infatti $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vale:

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u. \quad (3.3)$$

Infine, se $u = u(t)$ e $v = v(t)$ sono vettori che dipendono in modo differenziabile da un parametro reale t , si ha

$$\frac{d}{dt}(u \wedge v) = \frac{du}{dt} \wedge v + u \wedge \frac{dv}{dt}. \quad (3.4)$$

3.1 Il triedro di Frenet

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea e sia $T = \alpha'$ il vettore tangente.

Definizione 3.2 Definiamo la *curvatura* di α come la funzione non negativa

$$k(s) = \|T'\| = \|\alpha''\|.$$

Se $k(s) = 0, \forall s \in I$, allora $\alpha'' = 0$ in I e la curva parametrizzata, come nel caso delle curve piane, è la parametrizzazione di una retta $\alpha(s) = as + b$.

Se $k(s_0) = 0$ in un punto isolato non si può concludere che la curva sia parte di una retta. Inoltre, in tale situazione il vettore $\alpha''(s_0)$ è identicamente nullo. Per ovviare a tale problema, nel seguito, assumeremo che la curvatura $k(s)$ sia diversa da zero in tutti i punti di I .

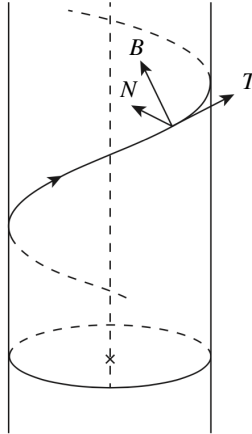
Sia quindi $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea con $k(s) = \|T'\| > 0$. Poiché $T' = \alpha''$ è perpendicolare a T possiamo considerare il vettore

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{1}{k(s)} T'$$

che chiamiamo *vettore normale*. Inoltre definiamo, tramite il prodotto vettoriale, il vettore $B = T \wedge N$ chiamato *vettore binormale*. Si ottiene in questo modo un riferimento mobile lungo la curva

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

il quale per ogni punto $s \in I$ forma una base positiva di $\mathbb{R}^3$. Tale riferimento mobile prende il nome di *triedro di Frenet*. Si veda nella figura sotto il triedro di Frenet lungo un'elica.



Calcoliamo adesso, come già fatto per le curve piane, le derivate T', N', B' espresse nel riferimento di Frenet. Per definizione si ha $T' = k(s)N$. Sia adesso $B = T \wedge N$, da cui $\|B\| = 1$ e $\langle B', B \rangle = 0$. Segue che

$$B' = \langle B', T \rangle T + \langle B', N \rangle N.$$

Dalla definizione di $B = T \wedge N$ e tenendo conto che $T' \parallel N$ si ottiene $B' = T' \wedge N + T \wedge N' = T \wedge N'$. Quindi $\langle B', T \rangle = \langle T \wedge N', T \rangle = 0$. Risulta pertanto che B' è parallelo a N , cioè esiste una funzione $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$B' = \tau(s)N.$$

La funzione τ prende il nome di *torsione*. Vediamo adesso N' . In primo luogo $\|N\| = 1$ implica $\langle N', N \rangle = 0$. Inoltre, derivando $\langle N, T \rangle = 0$ si ottiene $\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -k$. Infine, $\langle N, B \rangle = 0$ implica che $\langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = -\tau$. Segue che

$$N' = -kT - \tau B.$$

Possiamo concludere dicendo che lungo una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea con curvatura $k > 0$ valgono le seguenti equazioni note come *Equazioni di Frenet*

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) = \tau(s)N(s) \end{cases} \quad (3.5)$$

o, in forma vettoriale,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Proposizione 3.1 Una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva piana (nel senso che esiste un piano affine che la contiene) se e solo se $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I$.

Dimostrazione.

“ $\Rightarrow$ ” Sia $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ una curva piana. Allora $\alpha(s)$ soddisfa l'equazione di un piano affine, cioè esiste un vettore unitario $n \in \mathbb{R}^3$ ed un numero $d \in \mathbb{R}$ tale che $\langle \alpha(s), n \rangle = d$, $\forall s \in I$. Derivando l'ultima condizione rispetto a s si trova

$$\langle \alpha'(s), n \rangle = 0, \quad \langle \alpha''(s), n \rangle = 0.$$

Segue che B , essendo perpendicolare sia a α' che a α'' , è parallelo a n . Inoltre, da $\|B\| = \|n\| = 1$ si ha $B = \pm n$ da cui, essendo n un vettore costante, $B' = 0$. La terza equazione in (3.5) implica che $\tau(s) = 0$, $\forall s \in I$.

“ $\Leftarrow$ ” Supponiamo che $\tau(s) = 0$. Quindi $B'(s) = 0$, cioè $B(s) = b_o$ è un vettore unitario costante. Dalla relazione $\langle \alpha(s), b_o \rangle' = \langle \alpha'(s), b_o \rangle = 0$ si conclude che $\langle \alpha(s), b_o \rangle = d = \text{costante}$, quindi $\alpha(s)$ soddisfa l'equazione di un piano affine. ■

Osservazione 3.1 Per una curva parametrizzata nello spazio $\mathbb{R}^3$ la curvatura k è, per definizione, non negativa. Diversamente la curvatura con segno k_2 , definita per le curve piane, può assumere valori sia positivi che negativi. Si può subito osservare (si veda la (2.3)) che se una curva parametrizzata è piana allora $k(s) = \|\alpha''\| = |k_2(s)|$. La torsione invece può assumere sia valori positivi che negativi. La torsione, in accordo con la Proposizione 3.1, misura di quanto una curva non sia piana.

Definizione 3.3 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea con $k(s) > 0$.

1. Chiamiamo il piano affine per $\alpha(s)$ con giacitura $L(T, N)$ il *piano osculatore*;
2. Chiamiamo il piano affine per $\alpha(s)$ con giacitura $L(T, B)$ il *piano rettificante*;
3. Chiamiamo il piano affine per $\alpha(s)$ con giacitura $L(B, N)$ il *piano normale*.

■ **Esempio 3.1** Sia

$$\alpha(s) = \left(a \cos \left[\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right], a \sin \left[\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right], \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad a, b > 0$$

la parametrizzazione con l'ascissa curvilinea di un'elica circolare retta. Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(-a \sin \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], a \cos \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], b \right) \\ T' &= \frac{-a}{a^2+b^2} \left(\cos \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], \sin \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], 0 \right) \end{aligned}$$

da cui

$$k = \|T'\| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} N = \frac{1}{k} T' &= - \left(\cos \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], \sin \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], 0 \right) \\ B = T \wedge N &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(b \sin \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], -b \cos \left[\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right], a \right) \end{aligned}$$

da cui

$$B' = \frac{-b}{a^2+b^2} N \Rightarrow \tau = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Quindi l'elica circolare retta ha curvatura e torsione costanti. ■

■ **Esempio 3.2** Siano k e τ due costanti positive. Ci proponiamo di integrare le Equazioni di Frenet (3.5) per ottenere una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea con curvatura $k^\alpha = k$ e torsione $\tau^\alpha = \tau$. Se una tale curva esiste allora il corrispondente triedro di Frenet deve soddisfare il sistema

$$\begin{cases} T'(s) = kN(s) \\ N'(s) = -kT(s) - \tau B(s) \\ B'(s) = \tau N(s) \end{cases}$$

dove, in questo caso, k e τ sono costanti. Derivando N' ed utilizzando le altre due si trova

$$N''(s) + (k^2 + \tau^2)N(s) = 0.$$

Ponendo $\omega = \sqrt{k^2 + \tau^2}$ la soluzione della ODE sopra è

$$N(s) = A_1 \cos(\omega s) + A_2 \sin(\omega s), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}^3$$

Siccome $N(s)$ è unitario si deduce che $\|A_1\| = \|A_2\| = 1$ e $\langle A_1, A_2 \rangle = 0$ e, a meno di un movimento rigido dello spazio, possiamo supporre che

$$A_1 = (-1, 0, 0) \quad \wedge \quad A_2 = (0, -1, 0)$$

Segue che

$$N(s) = (-\cos(\omega s), -\sin(\omega s), 0) = \frac{1}{k} \alpha''$$

Integrando si ottiene

$$\alpha' = \left(-\frac{k}{\omega} \sin(\omega s), \frac{k}{\omega} \cos(\omega s), \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

con

$$1 = \|\alpha'\|^2 = \frac{k^2}{\omega^2} + \lambda^2,$$

cioè

$$\lambda^2 = 1 - \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\tau^2}{\omega^2}.$$

Integrando α' e scegliendo $\lambda = \frac{-\tau}{\omega}$, si perviene a

$$\alpha(s) = \left(\frac{k}{\omega^2} \cos(\omega s), \frac{k}{\omega^2} \sin(\omega s), -\frac{\tau}{\omega} s \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}^3$$

Se poniamo

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

si trova

$$\omega^2 = k^2 + \tau^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad \frac{k}{\omega^2} = a, \quad -\frac{\tau}{\omega} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

da cui la parametrizzazione α , a meno di una traslazione, coincide con quella dell'elica dell'Esempio 3.1. ■

L'esempio precedente suggerisce che la curvatura k e la torsione τ determinano, a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$, un'unica curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Vale infatti il seguente

Teorema 3.1 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $k_o, \tau_o : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili con $k_o > 0, \forall s \in I$. Allora esiste una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $k^\alpha(s) = k_o(s)$ e $\tau^\alpha(s) = \tau_o(s)$ per ogni $s \in I$. Inoltre, la curva α è unica a meno di movimenti rigidi diretti di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Consideriamo il sistema matriciale di equazioni differenziali ordinarie

$$X'(s) = AX(s) \tag{3.6}$$

dove

$$X(s) = \begin{bmatrix} x_1(s) & x_2(s) & x_3(s) \\ x_4(s) & x_5(s) & x_6(s) \\ x_7(s) & x_8(s) & x_9(s) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & k_o & 0 \\ -k_o & 0 & -\tau_o \\ 0 & \tau_o & 0 \end{bmatrix}.$$

Siano

$$t_o = (a_1, a_2, a_3), \quad n_o = (a_4, a_5, a_6), \quad b_o = (a_7, a_8, a_9)$$

tre vettori costanti che formano una base ortonormale positiva e sia

$$X_o = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Sia

$$F(s) = \begin{bmatrix} f_1(s) & f_2(s) & f_3(s) \\ f_4(s) & f_5(s) & f_6(s) \\ f_7(s) & f_8(s) & f_9(s) \end{bmatrix}$$

una soluzione del sistema (3.6) con condizione iniziale $F(s_o) = X_o$, $s_o \in I$. Tale soluzione esiste ed è unica in un intervallo aperto di s_0 di I in virtù del Teorema di Esistenza e Unicità delle equazioni differenziali ordinarie con date condizioni iniziali (Teorema di Picard-Lindelöf). Poiché il sistema è lineare con coefficienti lisci su I , la soluzione si estende a tutto I . Definiamo

$$t(s) = (f_1, f_2, f_3), \quad n(s) = (f_4, f_5, f_6), \quad b(s) = (f_7, f_8, f_9)$$

Segue che

$$\begin{cases} t' = k_o n \\ n' = -k_o t - \tau_o b \\ b' = \tau_o n \end{cases} \quad (3.7)$$

Supponiamo per un momento che $\{t(s), n(s), b(s)\}$ sia un riferimento ortonormale positivo $\forall s \in I$, allora la curva parametrizzata

$$\alpha(s) = \int_{s_o}^s t(u) du$$

è una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea con curvatura $k^\alpha = k_o$ e torsione $\tau^\alpha = \tau_o$. Infatti, $\alpha' = t(s)$ e $\|\alpha'\| = 1$. Inoltre, essendo $\{t(s), n(s), b(s)\}$ un riferimento ortonormale positivo che soddisfa (3.7), si ha

$$T = \alpha' = t \Rightarrow T' = \alpha'' = t' = k_o n \Rightarrow N(s) = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{t'}{\|t'\|} = n(s) \quad e \quad k_o = \|T'\| = k^\alpha.$$

Inoltre

$$B = T \wedge N = t \wedge n = b \Rightarrow B' = b' \Rightarrow \tau^\alpha N = \tau_o n \Rightarrow \tau^\alpha = \tau_o.$$

In conclusione, per dimostrare l'esistenza dobbiamo verificare che $\{t(s), n(s), b(s)\}$ sia un riferimento ortonormale positivo $\forall s \in I$. A tal scopo, si osservi che la soluzione $F(s)$ del Sistema (3.6) soddisfa alle condizioni

$$F(s)[F(s)]^\top = \begin{bmatrix} \langle t, t \rangle & \langle t, n \rangle & \langle t, b \rangle \\ \langle n, t \rangle & \langle n, n \rangle & \langle n, b \rangle \\ \langle b, t \rangle & \langle b, n \rangle & \langle b, b \rangle \end{bmatrix} \quad e \quad F(s_0) \cdot [F(s_0)]^\top = [F(s_0)]^\top \cdot F(s_0) = I_3$$

Adesso, poiché $F(s)$ è una soluzione del Sistema (3.6), si ottiene

$$\begin{aligned} ([F(s)]^\top \cdot F(s))' &= ([F(s)]^\top)' \cdot F(s) + [F(s)]^\top \cdot (F(s))' = [F(s)]^\top \cdot A^\top \cdot F(s) + [F(s)]^\top \cdot A \cdot F(s) \\ &= [F(s)]^\top \cdot [A^\top + A] \cdot F(s) = 0_3 \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che la matrice A è anti simmetrica, cioè $A^\top + A = 0_3$. Quindi la matrice $[F(s)]^\top F(s)$ è costante ed essendo $[F(s_0)]^\top F(s_0) = I_3$, segue che $[F(s)]^\top F(s) = I_3$ per ogni $s \in I$. Quindi $F(s)$ è una matrice ortogonale per ogni $s \in I$. Inoltre, per tutti i valori di $s \in I$ il $\det(F(s))$ vale, per continuità, sempre 1 o sempre -1 . Poiché $\det(F(s_0)) = 1$ si conclude che $\det(F(s)) = 1$, $\forall s \in I$.

Si osservi che il ragionamento sopra, cioè che se la soluzione del Sistema (3.6) è ortogonale in s_o rimane ortogonale per ogni $s \in I$, vale grazie alla anti simmetria della matrice A . Quindi lo stesso ragionamento si può applicare ad un qualsiasi sistema differenziale del tipo (3.6) a patto che la matrice A sia anti simmetrica.

Per dimostrare la seconda parte, cioè l'unicità, si procede come nel caso delle curve piane. Sia $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'altra curva parametrizzata con $k^\beta(s) = k^\alpha(s)$ e $\tau^\beta(s) = \tau^\alpha(s)$. Fissato $s_o \in I$, consideriamo i due riferimenti positivi

$$\{T_\alpha(s_o), N_\alpha(s_o), B_\alpha(s_o)\}, \quad \{T_\beta(s_o), N_\beta(s_o), B_\beta(s_o)\}.$$

Esiste una matrice $A \in SO(3)$ tale che $T_\beta(s_o) = AT_\alpha(s_o)$, $N_\beta(s_o) = AN_\alpha(s_o)$, $B_\beta(s_o) = AB_\alpha(s_o)$. Sia adesso $b = \beta(s_o) - A\alpha(s_o)$ e si consideri il movimento rigido diretto $M(P) = AP + b$. Mostriamo che $\gamma(s) = M(\alpha(s)) = A\alpha(s) + b$ coincide con $\beta(s)$. Ovviamente $\gamma(s_o) = A\alpha(s_o) + b = \beta(s_o)$, inoltre si verifica facilmente che

$$T_\gamma(s_o) = T_\beta(s_o), \quad N_\gamma(s_o) = N_\beta(s_o), \quad B_\gamma(s_o) = B_\beta(s_o) \quad (3.8)$$

e, in virtù del Problema 3.3,

$$k^\gamma(s) = k^\beta(s), \quad \tau^\gamma(s) = \tau^\beta(s). \quad (3.9)$$

Definiamo la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(s) = \frac{1}{2} [\|T_\beta(s) - T_\gamma(s)\|^2 + \|N_\beta(s) - N_\gamma(s)\|^2 + \|B_\beta(s) - B_\gamma(s)\|^2].$$

Si verifica, come nel caso delle curve piane, che $f'(s) = 0$ e $f(s_o) = 0$, da cui $f(s) = 0, \forall s \in I$. Segue che $T_\beta(s) = T_\gamma(s)$ il che implica $\beta' = \gamma' \Rightarrow \gamma(s) = \beta(s) + C, C \in \mathbb{R}^3$, ma $\beta(s_o) = \gamma(s_o) \Rightarrow C = 0$. In conclusione $\beta = \gamma$. ■

3.2 Problemi proposti

Problema 3.1 Si consideri la parametrizzazione di un elica

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

1. Mostrare che s è l'ascissa curvilinea.
2. Determinare la curvatura e la torsione.
3. Determinare il piano osculatore.
4. Mostrare che le rette di direzione $N(s)$ passanti per $\alpha(s)$ incontrano l'asse z sotto un angolo pari a $\pi/2$.
5. Mostrare che le direzioni delle rette tangenti ad α formano un angolo costante con la direzione dell'asse z .

Problema 3.2 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata non necessariamente con l'ascissa curvilinea e sia $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione di $\alpha(I)$ con l'ascissa curvilinea $s = s(t)$ misurata da un punto $t_o \in I$. Definiamo la curvatura e la torsione di $\alpha(t)$ in un punto $t \in I$ come la curvatura e la torsione di $\beta(s)$ nel punto $s = s(t)$. Sia $t = t(s)$ l'inversa della funzione $s(t)$. Poniamo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'; \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''.$$

Mostrare che

- 1.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|}; \quad \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4};$$

2. la curvatura di α in $t \in I$ è

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3};$$

3. la torsione di α in $t \in I$ è

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2};$$

Problema 3.3 Sia $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimento rigido diretto, cioè $M(P) = AP + b$ dove $A \in SO(3)$ è una matrice ortogonale con $\det(A) = 1$ e $b \in \mathbb{R}^3$ un vettore costante. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea e sia $\beta(s) = M(\alpha(s)) = A\alpha(s) + b$ la curva parametrizzata ottenuta componendo α con il movimento rigido. Dimostrare che

$$k^\alpha(s) = k^\beta(s), \quad \tau^\alpha(s) = \tau^\beta(s)$$

Problema 3.4 Si assuma che $\tau(s) \neq 0$ e $k'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Mostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché la traccia di α appartenga ad una sfera è che

$$R^2 + \frac{(R')^2}{\tau^2} = \text{costante}$$

dove $R = 1/k$.

Problema 3.5 Una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice ad *angolo costante* se le rette tangenti formano un angolo costante con una direzione fissata dello spazio. Si assuma che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Mostrare che α è una curva parametrizzata ad angolo costante se e solo se $k/\tau = \text{costante}$.

Problema 3.6 Due curve regolari $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ in $\mathbb{R}^3$ sono dette *coppie di Bertrand* se, per ogni valore di parametro t , la retta che passa per $\alpha(t)$ con direzione $N_\alpha(t)$ coincide con la retta che passa per $\beta(t)$ in direzione $N_\beta(t)$. Dimostrare che se $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono coppie di Bertrand allora:

1. l'angolo tra $T_\alpha(t)$ e $T_\beta(t)$ è indipendente da t ;
2. $\beta(t) = \alpha(t) + rN_\alpha(t)$ per qualche numero reale costante r .

Problema 3.7 Data l'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

1. Dimostrare che α è differenziabile.
2. Dimostrare che α è regolare per ogni $t \in \mathbb{R}$ e che la curvatura $k(t) \neq 0$, per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ e $k(0) = 0$.
3. Mostra che il limite del piano osculatore per t che tende a 0 da destra è il piano $y = 0$ mentre il limite del piano osculatore per t che tende a 0 da sinistra è il piano $z = 0$ (questo implica che il vettore normale è discontinuo in $t = 0$ il che mostra perché abbiamo escluso i punti dove $k = 0$).
4. Mostrare che la torsione può essere definita in modo che sia zero, anche se α non è una curva piana.

Problema 3.8 Data la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \varphi(t)), \quad t > 0$$

1. Calcolare la curvatura e la torsione
2. Determinare la funzione φ affinché la curva sia piana

Problema 3.9 Data la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (2t, t^2, \log t), \quad t \geq 1$$

1. Determinare la funzione ascissa curvilinea con punto iniziale $t = 1$
2. Calcolare curvatura e torsione

Problema 3.10 Dato $\lambda > 0$, l'applicazione lineare $F_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$F_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

è detta omotetia di fattore λ . Data una curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, si consideri la curva

$$\beta(t) = F_\lambda(\alpha(t))$$

ottenuta componendo α con l'omotetia F_λ .

1. Calcolare $k_\beta(t)$ e $\tau_\beta(t)$ in funzione di $k_\alpha(t)$ e $\tau_\alpha(t)$.
2. È vero che la proprietà di essere una curva piana è invariante per omotetie?

Problema 3.11 Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con velocità qualunque con α' e α'' linearmente indipendenti per ogni valore del parametro $t \in (a, b)$. Dimostrare che il Triedo di Frenet lungo α è dato da:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = \frac{\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \alpha')}{\|\alpha'\| \|\alpha'' \wedge \alpha'\|}, \quad B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$

4. Superfici regolari

4.1 Differenziale di un'applicazione

Sia

$$\begin{aligned} \varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\varphi^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi^m(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

un'applicazione differenziabile definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$. Il differenziale $d\varphi_p$ di φ in un punto $p \in A$ è l'applicazione $d\varphi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita nel modo seguente. Sia $v_p = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata differenziabile con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v_p$ (tale curva esiste poiché si può scegliere $\alpha(t) = p + tv_p$). Allora $\varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definisce una curva parametrizzata differenziabile in $\mathbb{R}^m$ e definiamo

$$d\varphi_p(v_p) := \frac{d}{dt} \varphi(\alpha(t)) \Big|_{t=0}.$$

Quindi $d\varphi_p(v_p)$ è definito come il vettore velocità in $t = 0$ della curva $\varphi \circ \alpha$.

In coordinate, se $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ si trova

$$\varphi(\alpha(t)) = (\varphi^1(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)), \dots, \varphi^m(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)))$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \varphi(\alpha(t)) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_i}(\alpha(t)) \alpha'_i(t), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_i}(\alpha(t)) \alpha'_i(t) \right)$$

che valutata in $t = 0$ restituisce

$$\begin{aligned} d\varphi_p(v_p) = \frac{d}{dt} \varphi(\alpha(t)) \Big|_{t=0} &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_i}(p) \alpha'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_i}(p) \alpha'_i(0) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_i}(p) v_i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_i}(p) v_i \right) \\ &= (\langle \text{grad} \varphi^1(p), v_p \rangle, \dots, \langle \text{grad} \varphi^m(p), v_p \rangle). \end{aligned} \quad (4.1)$$

La (4.1) mostra che l'applicazione $d\varphi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare. Inoltre, se denotiamo con $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, si trova

$$\begin{cases} d\varphi_p(e_1) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \dots + \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_1} \bar{e}_m \\ \vdots \\ d\varphi_p(e_n) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_n} \bar{e}_1 + \dots + \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_n} \bar{e}_m \end{cases}$$

Quindi la matrice di $d\varphi_p$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ è la matrice Jacobiana

$$J\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Vale la seguente proprietà utile nel proseguo del testo.

Proposizione 4.1 Siano

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

e

$$G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

due applicazioni differenziabili, dove U e V sono insiemi aperti tali che $F(U) \subset V$. Allora $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un'applicazione differenziabile e vale la relazione:

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U$$

Dimostrazione. Il fatto che $G \circ F$ sia differenziabile è una conseguenza della regola della catena per le funzioni. Sia $w_1 \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo una curva

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w_1$. Poniamo $dF_p(w_1) = w_2$ e osserviamo che

$$dG_{F(p)}(w_2) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)|_{t=0}.$$

Allora:

$$d(G \circ F)_p(w_1) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)|_{t=0} = dG_{F(p)}(w_2) = dG_{F(p)} \circ dF_p(w_1).$$

■

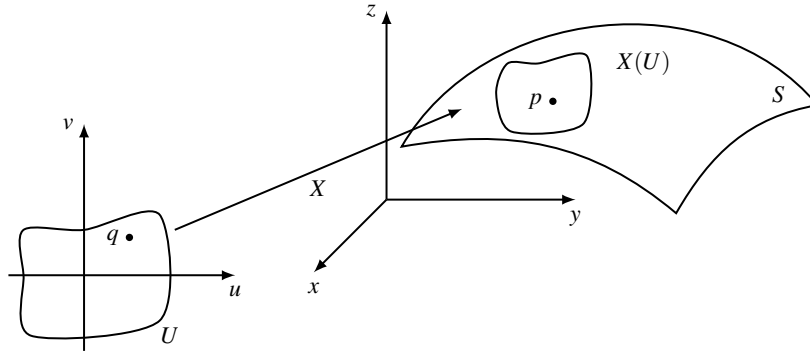
4.2 Definizione di superficie regolare

Definizione 4.1 Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$, dotato della topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$, è una *superficie regolare* se per ogni $p \in S$ esistono un aperto V di S con $p \in V$, un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, e un'applicazione

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow V \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

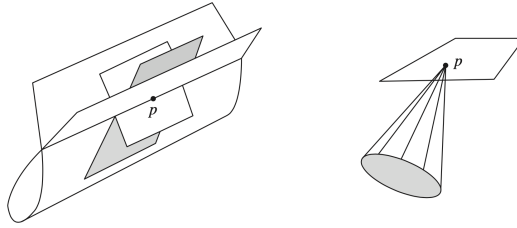
tale che:

- (a) X è differenziabile;
- (b) $X : U \rightarrow X(U) = V$ è un omeomorfismo;
- (c) per ogni $q \in U$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettiva.



Un'applicazione X che soddisfa (a), (b) e (c) è detta *parametrizzazione regolare*. La coppia (U, X) è chiamata una *carta locale* della superficie S . L'insieme di tutte le carte locali $\{U_a, X_a\}_{a \in A}$ prende il nome di *atlante*.

La condizione (a) è molto naturale se prevediamo di utilizzare il calcolo differenziale su S . L'inniettività di X , nella condizione (b), ha lo scopo di prevenire che una superficie regolare presenti autointersezioni. Ciò è chiaramente necessario se vogliamo definire, ad esempio, il piano tangente in un punto $p \in S$ (si veda la figura sotto).



La condizione che X sia un omeomorfismo ha uno scopo più sottile che sarà spiegato più avanti. Per il momento, menzioneremo che questa condizione è essenziale per dimostrare che determinati oggetti definiti in termini di una parametrizzazione non dipendono da questa parametrizzazione ma solo dall'insieme S stesso. Infine, come mostreremo nel seguito, la condizione (c) garantirà l'esistenza di un *piano tangente* in tutti i punti di S (si veda la figura sopra (b) dove non appare definibile il piano tangente nel vertice del cono). Vediamo subito che la condizione (c) può essere riscritta in modi equivalenti utili nella pratica. Sia $q = (u, v) \in U$. Dalla (4.2) la matrice Jacobiana associata a dX_q è

$$JX(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Segue che dX_q è iniettiva se e solo se $JX(q)$ ha rango massimo, cioè 2. In altri termini se i vettori (omettiamo di indicare il punto q per semplificare le notazioni)

$$dX_q(e_1) = \frac{\partial x}{\partial u} \bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u} \bar{e}_3, \quad dX_q(e_2) = \frac{\partial x}{\partial v} \bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v} \bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial v} \bar{e}_3$$

sono linearmente indipendenti. Se poniamo

$$X_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad X_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

allora la condizione (c) dice che X_u, X_v sono linearmente indipendenti, equivalentemente, che $X_u \wedge X_v \neq 0$.

Un altro modo per verificare la condizione (c) è assicurarsi che i determinanti dei tre Jacobiani seguenti non siano tutti simultaneamente nulli:

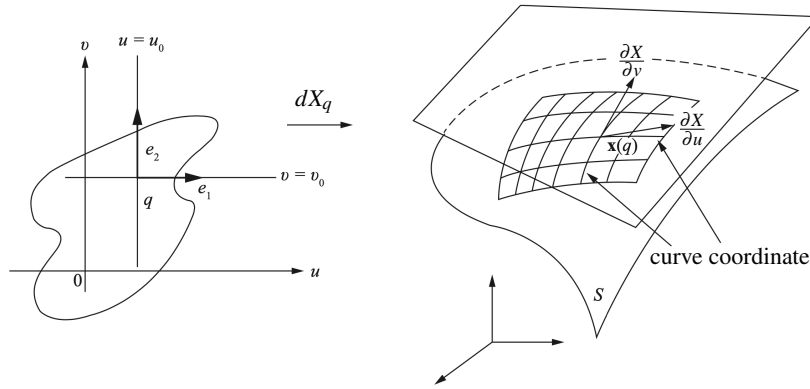
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

4.2.1 Curve coordinate

Sia

$$\begin{aligned} X: U &\rightarrow V \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

una parametrizzazione locale di una superficie regolare S e sia $q = (u_o, v_o) \in U$. Allora la curva $u \mapsto (u_o + u, v_o)$ ha come vettore tangente il vettore $e_1 = (1, 0)$, mentre la curva $v \mapsto (u_o, v_o + v)$ ha come vettore tangente $e_2 = (0, 1)$ (si veda la figura sotto).



Le due curve su $X(U)$

$$u \mapsto (x(u_o + u, v_o), y(u_o + u, v_o), z(u_o + u, v_o))$$

$$v \mapsto (x(u_o, v_o + v), y(u_o, v_o + v), z(u_o, v_o + v))$$

sono chiamate *curve coordinate* e, per definizione di differenziale, i due vettori

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) = dX_q(e_1), \quad \frac{\partial X}{\partial v}(q) = dX_q(e_2)$$

risultano tangenti a tali curve coordinate nel punto $X(q)$ (si veda la figura precedente). Se consideriamo tali curve coordinate al variare di $q \in U$ si ottiene una famiglia di curve coordinate come mostrato nella figura precedente.

4.3 Esempi di superfici regolari

■ **Esempio 4.1 — La sfera $\mathbb{S}^2$.** Mostriamo che la sfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

è una superficie regolare. Sia $U_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ e sia

$$\begin{aligned} X_1: U &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$

Allora

1. X_1 è differenziabile;
2. X_1 è iniettiva e, ponendo $\pi(x, y, z) = (x, y)$, si trova $X_1^{-1} = \pi|_{X_1(U_1)}$. Quindi X_1^{-1} è continua poiché restrizione della funzione continua π ;
3. si ha

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

quindi dX_q è iniettivo $\forall q \in U$.

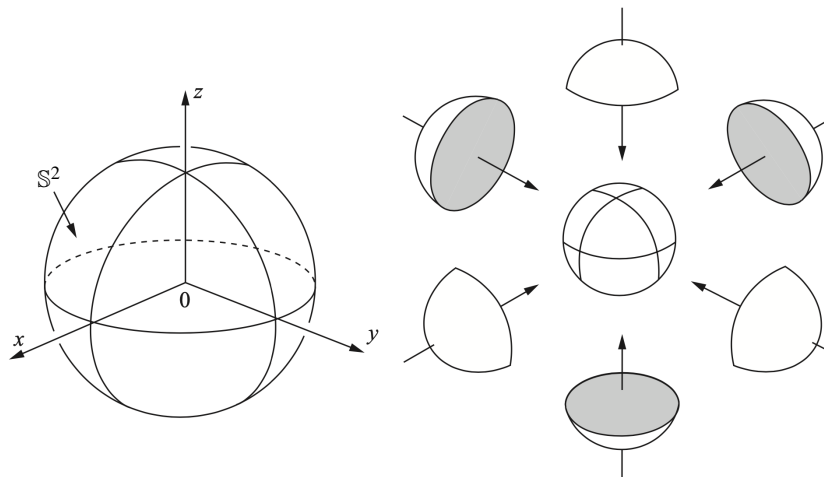
Allo stesso modo si possono considerare le parametrizzazioni $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, 6$, date da

$$X_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

$$X_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), \quad X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v),$$

$$X_5(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v), \quad X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

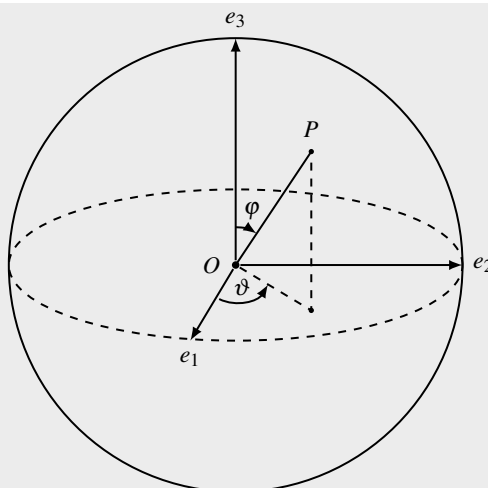
le quali ricoprono tutta la sfera $\mathbb{S}^2$, si veda la figura sotto.



■

Osservazione 4.1 Comunemente la sfera si parametrizza, anche per motivi di calcolo, con le cosiddette *coordinate geografiche*. Se indichiamo con φ l'angolo che il segmento OP forma con $e_3 = (0, 0, 1)$ e con ϑ l'angolo che la proiezione di OP sul piano $z = 0$ forma con il vettore $e_1 = (1, 0, 0)$, allora le coordinate di P sono

$$P(\vartheta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi)$$



L'applicazione

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

definisce una carta locale sulla sfera $\mathbb{S}^2$. La condizione (a) è immediata. La (c) si dimostra verificando che i tre determinanti nella (4.4) non sono simultaneamente nulli in U (esercizio). La condizione (b) è più delicata e rimandiamo la verifica a dopo la dimostrazione della Proposizione 4.7. In questo caso $X(U)$ copre la sfera meno il semi meridiano $\vartheta = 0$ (inclusi i poli).

Proposizione 4.2 Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, U aperto. Allora il grafico di f

$$G(f) = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

è una superficie regolare. Come atlante per $G(f)$ si può considerare quello costituito da l'unica carta locale

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow G(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Basta verificare che X soddisfa le condizioni (a), (b), (c) della definizione di parametrizzazione regolare. Tale verifica è identica a quella svolta per la X_1 nell'Esempio 4.1. ■

Proposizione 4.3 Sia S una superficie regolare e sia $S_1 \subseteq S$ un aperto non vuoto. Allora S_1 è una superficie regolare.

Dimostrazione. Per ogni $p \in S_1 \subseteq S$ esiste una parametrizzazione regolare $X : U \rightarrow S$ con $p \in X(U)$. Segue che $p \in X(U) \cap S_1$. Adesso $X(U) \cap S_1$ è un aperto di S_1 rispetto alla topologia indotta ma è anche un aperto di S poiché intersezione di due aperti. Si trova quindi che $X : X^{-1}(X(U) \cap S_1) \rightarrow S_1$ definisce una parametrizzazione regolare. ■

Proposizione 4.4 Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ munito della topologia indotta. Supponiamo che $S = \cup_{i \in I} S_i$ con S_i aperti di S per ogni $i \in I$, cioè $\{S_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di S . Allora

S è una superficie regolare se e solo se S_i è una superficie regolare per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. Esercizio. ■

Definizione 4.2 Siano $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi aperti. Un *diffeomorfismo* $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ è un'applicazione differenziabile biettiva con inversa differenziabile.

Proposizione 4.5 Siano $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due insiemi aperti e sia $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un diffeomorfismo. Se $S_1 \subseteq A_1$ è una superficie regolare allora $\varphi(S_1) \subseteq A_2$ è una superficie regolare.

Dimostrazione. Esercizio. ■

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Un elemento $a \in \mathbb{R}$ è un *valore regolare* se per ogni $p \in A$ con $F(p) = a$ si ha $dF_p \neq 0$. Equivalentemente, se per ogni $p \in A$ con $F(p) = a$ si ha

$$\text{grad}F_p = (F_x(p), F_y(p), F_z(p)) \neq (0, 0, 0).$$

Se a è un valore regolare, i punti $p \in F^{-1}(a)$ si dicono *punti regolari*. Un punto $p \in F^{-1}(a)$ si dice *critico* se $dF_p = 0$.

Vale il seguente importante teorema di analisi che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 4.1 — Teorema della funzione implicita. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare e sia $p_o = (x_o, y_o, z_o) \in F^{-1}(a)$ un punto regolare con $F_z(p_o) \neq 0$ (potrebbe essere $F_x(p_o) \neq 0$ o $F_y(p_o) \neq 0$ ma la conclusione è analoga). Allora esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, un aperto $V \subseteq F^{-1}(a)$ ($p_o \in V$), e una funzione differenziabile $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $G(f) = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\} = V$ (nel caso in cui $F_x(p_o) \neq 0$ si ottiene un grafico $x = f(y, z)$ e nel caso $F_y(p_o) \neq 0$ un grafico $y = f(x, z)$).

Il Teorema della funzione implicita, assieme alla Proposizione 4.2 e alla Proposizione 4.4, garantiscono che se $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile e se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare, allora il sottoinsieme $S = F^{-1}(a) \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare, chiamata *superficie di livello*. Questo rappresenta uno degli strumenti più efficaci per verificare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ è una superficie regolare.

■ **Esempio 4.2** Sia A una matrice simmetrica di ordine 4. Se indichiamo con

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

le coordinate dei punti di $\mathbb{R}^3$ e li pensiamo come punti di $\mathbb{R}^4$ della forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix},$$

la quadrica associata ad A è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$Q = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Fatto: se $A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ per ogni $P \in Q$, allora Q definisce una superficie regolare.

Per dimostrarlo procediamo nel modo seguente. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(P) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \right\rangle.$$

La funzione F è differenziabile (polinomiale) ed inoltre $Q = F^{-1}(0)$. Per concludere basta dimostrare che se $A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ per ogni $P \in Q$, allora 0 è un valore regolare. A tal scopo, sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore e calcoliamo $dF_P(v)$, $P \in Q$. Per definizione, poiché $\alpha(t) = P + tv$ è una curva con $\alpha(0) = P$ e $\alpha'(0) = v$, si ha

$$\begin{aligned} dF_P(v) &= \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}F(P + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ P + tv \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ P + tv \end{bmatrix} \right\rangle \right) |_{t=0} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Se $P \in Q$ fosse critico, allora $dF_P(v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ e, dall'espressione di $dF_P(v)$, si avrebbe

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

da cui, essendo

$$0 = F(P) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\rangle = \lambda,$$

si trova $\lambda = 0$ cioè $A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ contro l'ipotesi. ■

■ **Esempio 4.3** Se

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene la quadrica di equazione

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = -1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

la quale rappresenta la sfera $\mathbb{S}^2(1)$. In questo caso

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, quindi $\mathbb{S}^2(1)$ è una superficie regolare. ■

■ **Esempio 4.4** Se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene la quadrica di equazione

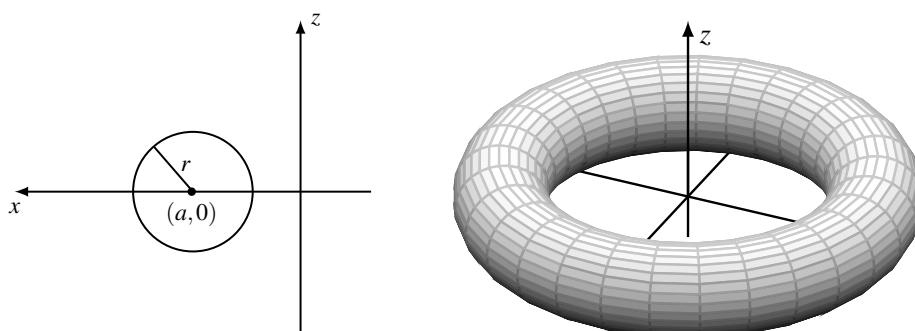
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

la quale rappresenta un cono circolare retto. L'origine $(0,0,0)$ è un punto della quadrica ed essendo

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

segue che l'origine è un punto critico. Quindi non si può concludere, utilizzando il Teorema della funzione implicita, che il cono sia una superficie regolare. In ogni caso, si veda il Problema 4.4, il cono non è una superficie regolare. ■

■ **Esempio 4.5 — Toro di rotazione.** Con riferimento alla figura seguente



si consideri la superficie ottenuta ruotando la circonferenza del piano xz di equazione

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \quad a > r > 0$$

attorno all'asse z . La superficie di rotazione ottenuta prende il nome di *Toro di rotazione* ed i suoi punti sono descritti dall'insieme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Quindi il toro di rotazione è l'insieme $T = F^{-1}(r^2)$ con $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$. Verifichiamo che r^2 è un valore regolare per F . Un punto $P = (x, y, z) \in F^{-1}(r^2)$ è un punto critico se

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}} x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}} y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z = 0 \\ F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

Dalla terza si ricava $z = 0$ e l'ultima implica che $\sqrt{x^2 + y^2} - a \neq 0$ che, assieme alle prime due, implicano $x = y = 0$. Quindi nessun punto dell'insieme $F^{-1}(r^2)$ è critico nel dominio considerato.

Si osservi che il Toro di rotazione si può anche descrivere come la superficie di livello $G^{-1}(0)$ della funzione polinomiale di quarto grado

$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2 - z^2 + r^2) + a^4.$$

■

4.4 Proprietà delle superfici regolari

Enunciamo, senza dimostrazione, un ulteriore importante teorema di analisi.

Teorema 4.2 — Teorema della funzione inversa. Sia $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto, un'applicazione differenziabile e sia $p \in A$. Se $d\varphi_p$ è un isomorfismo lineare, allora esiste un aperto $U \subseteq A$ di p e un aperto $V \subseteq \varphi(A)$, $\varphi(p) \in V$, tale che $\varphi : U \rightarrow V$ sia un diffeomorfismo.

Come prima applicazione del Teorema della funzione inversa abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 4.6 Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Allora esiste un intorno aperto $V \subseteq S$ di p tale che V sia il grafico di una funzione differenziabile di uno dei seguenti tipi:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

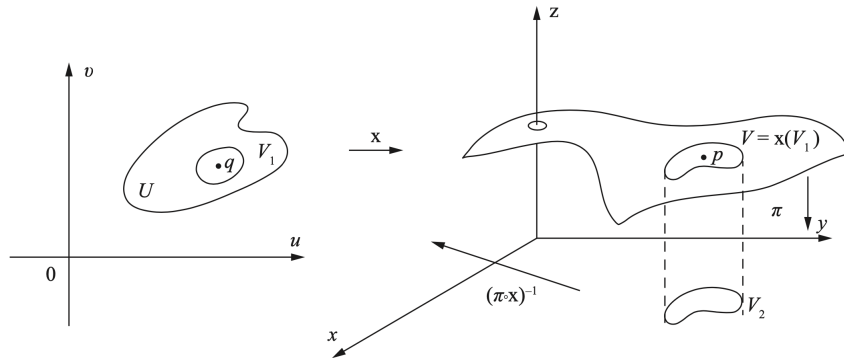
Dimostrazione. Sia $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrizzazione regolare con $p \in X(U)$ data da

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Allora uno dei Jacobiani (4.4) è diverso da zero in $q = X^{-1}(p)$ e possiamo assumere che sia

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Con riferimento alla figura seguente



consideriamo l'applicazione $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Se componiamo X con π si ottiene l'applicazione $\pi \circ X : U \rightarrow \pi(X(U)) \subseteq \mathbb{R}^2$ data da $\pi \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Il determinante della matrice Jacobiana di $\pi \circ X$ è proprio $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ il quale, essendo diverso da zero in q , implica che $d(\pi \circ X)_q$ sia un isomorfismo. Dal Teorema della funzione inversa esistono un intorno $V_1 \subseteq U$ di q e un intorno $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ di $\pi \circ X(q) = \pi(p)$ tali che $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$ sia un diffeomorfismo. Sia adesso $V = X(V_1)$ il quale è un aperto di S poiché X è un omeomorfismo. Poiché sia $X : V_1 \rightarrow V$

che $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$ sono biettive, segue che $\pi : V \rightarrow V_2$ è biettiva. Quindi, per ogni $p' \in V$, si ha che

$$X \circ (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi(p') = X \circ X^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi(p') = p' \quad (4.5)$$

Definiamo la funzione

$$\begin{array}{ccccccc} f : & V_2 & \xrightarrow{(\pi \circ X)^{-1}} & V_1 & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi_z} & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) & \mapsto & z(u(x, y), v(x, y)) \end{array}$$

dove $\pi_z(x, y, z) = z$. Segue immediatamente, tenendo conto della (4.5), che

$$V = \{(x, y, z) \in V_2 \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}.$$

Infatti, se $p' = (x, y, z) \in V$ allora $\pi(p') = (x, y) \in V_2$ e $f(x, y) = f \circ \pi(p') = \pi_z \circ X \circ (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi(p') = \pi_z(p') = z$. Viceversa, sia $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ con $(x, y) \in V_2$, allora $X \circ (\pi \circ X)^{-1}(x, y)$ è un punto p' di V con $\pi_z(p') = f(x, y)$ il quale si proietta su (x, y) , cioè $p' = (x, y, f(x, y))$. In conclusione V è il grafico della funzione $f : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ come desiderato. ■

La prossima proposizione è molto utile per verificare, nel caso S sia una superficie regolare, se una data applicazione $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia una parametrizzazione regolare.

Proposizione 4.7 Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione con $X(U) \subseteq S$. Supponiamo che

1. X è differenziabile;
2. X è iniettiva;
3. dX_q è iniettiva per ogni $q \in U$.

Allora $X : U \rightarrow X(U)$ è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Sia $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ un'applicazione definita da

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Dobbiamo mostrare che $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ è continua. A tal fine, basta verificare che X^{-1} è continua in un intorno aperto di un qualunque $p \in X(U)$. Sia quindi $p \in X(U)$ e sia $q = X^{-1}(p) \in U$. Siccome dX_q è iniettiva possiamo assumere, senza ledere la generalità, che

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Come nella dimostrazione della Proposizione 4.6 considerando l'applicazione $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, così che dal Teorema della funzione inversa esistono un intorno $V_1 \subseteq U$ di q e un intorno $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ di $\pi \circ X(q) = \pi(p)$ tali che $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$ sia un diffeomorfismo. Attenzione: non possiamo concludere che $X(V_1)$ sia un aperto di S poiché non sappiamo se X è aperta (di fatto stiamo proprio cercando di dimostrare questo). In ogni caso, dalla Proposizione 4.6 esiste un aperto V di S , $p \in V$, tale che V sia il grafico di una funzione $g : \pi(V) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ invertibile. Adesso restringiamo eventualmente V_1 in modo che $X(V_1) \subset V$. Definiamo $\bar{V} = (\pi|_V)^{-1}(V_2 \cap \pi(V))$ il quale è un aperto di S poiché contro immagine di un aperto di $\mathbb{R}^2$ tramite la funzione continua $\pi|_V$. Adesso, l'applicazione $(\pi \circ X)^{-1} \circ \pi : \bar{V} \rightarrow V_1$ è continua perché composizione di funzioni continue ed inoltre $(\pi \circ X)^{-1} \circ \pi = X^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi = X^{-1}$. Quindi $X^{-1} : \bar{V} \rightarrow X^{-1}(\bar{V})$ è continua. ■

■ **Esempio 4.6** L'applicazione X dell'Osservazione 4.1 è una parametrizzazione regolare in virtù della Proposizione 4.7. ■

Esercizio 4.1 Verificare che l'applicazione

$$\begin{aligned} X: U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto ((a + r \cos \varphi) \cos \vartheta, (a + r \cos \varphi) \sin \vartheta, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

definisce una parametrizzazione regolare del toro di rotazione descritto nell'Esempio 4.5.

4.5 Problemi proposti

Problema 4.1 Mostrare che il cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ è una superficie regolare. Trovare un atlante.

Problema 4.2 L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una superficie regolare?

Problema 4.3 L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}$ è una superficie regolare?

Problema 4.4 Mostrare che il cono a due falde, con il suo vertice nell'origine, cioè l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, non è una superficie regolare. (utilizzare il fatto che se lo fosse per ogni suo punto esisterebbe un intorno aperto dato dal grafico di una funzione).

Problema 4.5 Sia $f(x, y, z) = z^2$. Dimostrare che nonostante 0 non sia un valore regolare di f , l'insieme $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare.

Problema 4.6 Sia $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ e sia $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$X(u, v) = (u + v, u + v, uv),$$

dove $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v\}$. Dimostrare che X è una parametrizzazione locale di P .

Problema 4.7 Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

1. Determinare i punti critici e i valori critici di f .
2. Per quali valori di c l'insieme $f(x, y, z) = c$ è una superficie regolare?

Problema 4.8 Sia $f(x, y, z) = xyz^2$.

1. Determinare i punti critici e i valori critici di f .
2. Per quali valori di c l'insieme $f(x, y, z) = c$ è una superficie regolare?

Problema 4.9 Dimostrare che l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ è una superficie regolare e verificare che le seguenti sono parametrizzazioni locali di S

$$X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

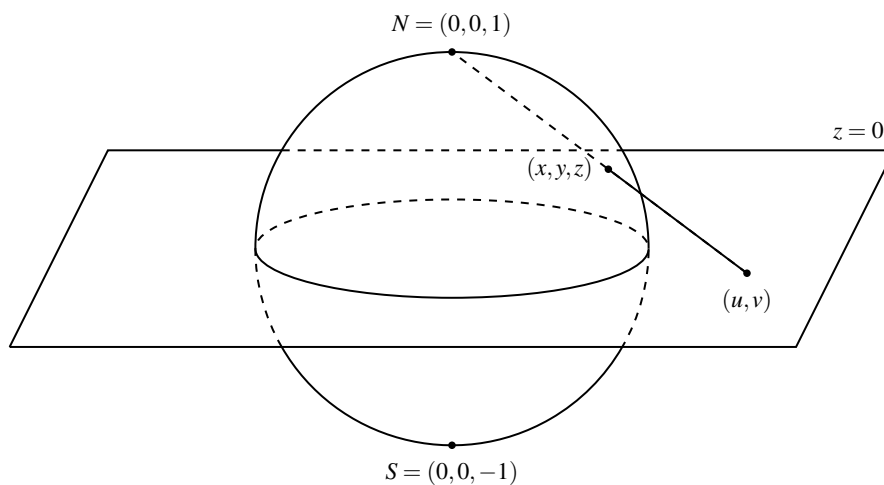
$$Y(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$$

Problema 4.10 Determinare una parametrizzazione locale dell'iperboloide a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$

Problema 4.11 Un modo per definire un sistema di coordinate sulla sfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è considerare la cosiddetta *proiezione stereografica*

$$\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

che proietta un punto $p = (x, y, z)$ della sfera meno il polo nord $N = (0, 0, 1)$ sull'intersezione del piano xy con la retta per N e p (si veda la figura). Sia $(u, v) = \pi_N(x, y, z)$, dove $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e (u, v) appartiene al piano xy .



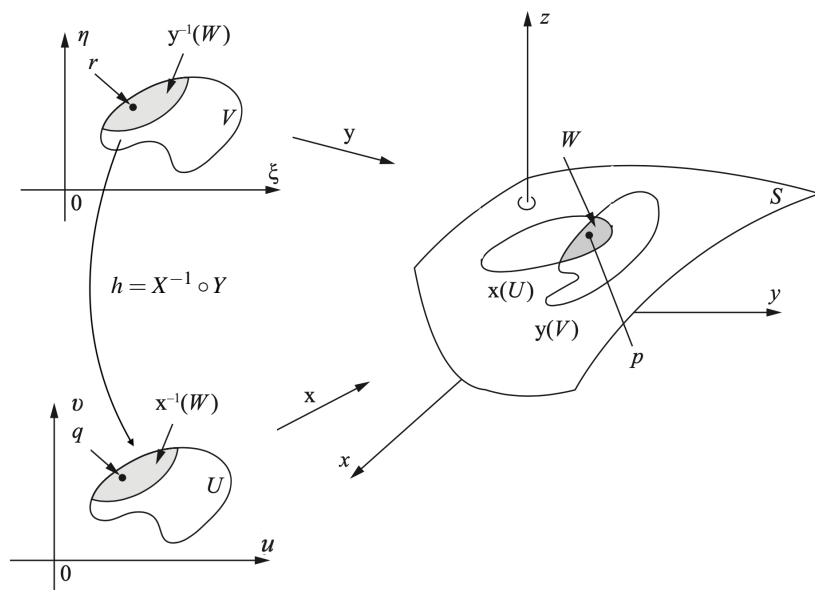
1. Dimostrare che $\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è biettiva.
2. Determinare esplicitamente $\pi_N(x,y,z)$ e $\pi_N^{-1}(u,v)$.
3. Determinare, in analogia con la costruzione precedente, $\pi_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $S = (0,0,-1)$ è il polo sud. Calcolare $\pi_S \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e verificare che è differenziabile.

5. Cambi di coordinate, funzioni differenziabili tra superfici e superfici di rotazione

La geometria differenziale si occupa, tra le altre cose, delle proprietà delle superfici che dipendono dal loro comportamento in prossimità di un punto. La definizione di superficie regolare data nel capitolo precedente è stata pensata proprio a questo scopo. Secondo questa definizione, ogni punto p di una superficie regolare appartiene ad una carta locale. I punti di una carta locale sono caratterizzati dalle loro coordinate, e dovremmo quindi essere in grado di definire le proprietà locali di una superficie in termini di queste coordinate. Ad esempio, è importante poter definire cosa significa per una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ essere differenziabile in un punto p . Un modo naturale di procedere è scegliere un intorno coordinato di p , con coordinate (u, v) e dire che f è differenziabile in p se la sua espressione nelle coordinate locali u e v è differenziabile nel corrispondente punto. Tuttavia, un punto di S può appartenere a diverse carte locali. Inoltre, altri sistemi di coordinate potrebbero essere scelti in un intorno di p . Affinché la definizione abbia senso, è necessario che non dipenda dal sistema di coordinate scelto. In altre parole, si deve dimostrare che quando p appartiene a due carte locali distinte, con parametri (u, v) e (ξ, η) , è possibile passare da una di queste coppie di coordinate all'altra mediante una trasformazione differenziabile. Precisiamo quanto detto.

5.1 Cambi di coordinate

Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$. Siano $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $Y : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ due parametrizzazioni con $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Si veda la figura sotto



Allora i punti di W si possono descrivere sia con coordinate (u, v) provenienti da X che con coordinate (ξ, η) date da Y . La seguente applicazione

$$\begin{aligned} h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) &\rightarrow X^{-1}(W) \\ (\xi, \eta) &\mapsto (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \end{aligned}$$

stabilisce il legame tra i due sistemi di coordinate e prende il nome di *funzione del cambio di coordinate*. Vale l'importante proposizione

Proposizione 5.1 La funzione $h : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. La funzione $h = X^{-1} \circ Y$ è un omeomorfismo, poiché è composizione di omeomorfismi. Non è però possibile concludere, con un argomento analogo, che h sia differenziabile, poiché X^{-1} è definita in un sottoinsieme aperto di S e non sappiamo ancora cosa si intenda per funzione differenziabile su S . Procediamo nel modo seguente. Sia $r \in Y^{-1}(W)$ e poniamo $q = h(r)$. Poiché $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ è una parametrizzazione, possiamo assumere, rinominando gli assi se necessario, che

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Estendiamo X ad una applicazione $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, F manda il cilindro pieno verticale C su U in un "cilindro verticale" su $X(U)$ mandando ciascuna sezione di C con altezza t nella superficie $X(u, v) + te_3$, dove $e_3 = (0, 0, 1)$. È chiaro che la funzione F è differenziabile e che la restrizione $F|_{U \times \{0\}} = X$. Calcolando il determinante della matrice Jacobiana del differenziale $dF_{(q, 0)}$, otteniamo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il Teorema della funzione inversa, il quale garantisce l'esistenza di un intorno M di $X(q)$ in $\mathbb{R}^3$ tale che F^{-1} esiste ed è differenziabile in M ed inoltre $F^{-1}|_{M \cap X(U)} = X^{-1}$. Per la continuità di Y , esiste un intorno N di r in $Y^{-1}(W)$ tale che $Y(N) \subseteq M$. Adesso, $h|_N = F^{-1} \circ Y|_N$ è composizione di applicazioni differenziabili, quindi h è differenziabile in r . Poiché r è arbitrario, h è differenziabile su $Y^{-1}(W)$. Con un argomento analogo si può mostrare che l'applicazione h^{-1} è differenziabile, e quindi h è un diffeomorfismo. ■

5.2 Funzioni e applicazioni differenziabili

Definizione 5.1 Sia S una superficie regolare e sia $V \subseteq S$ un aperto. Una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *differenziabile* in $p \in V$ se esiste una parametrizzazione $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in X(U) \subseteq V$ tale che la composizione $f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $X^{-1}(p)$. La funzione f si dice differenziabile se è differenziabile per ogni punto $p \in V$.

Osservazione 5.1 Se $X' : U' \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ è un'altra parametrizzazione con $p \in X'(U') \subseteq V$ allora $X^{-1} \circ X'$ è differenziabile da cui segue che

$$f \circ X' = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ X')$$

è differenziabile poiché composizione di funzioni differenziabili. Quindi la definizione di funzione differenziabile non dipende dalla parametrizzazione.

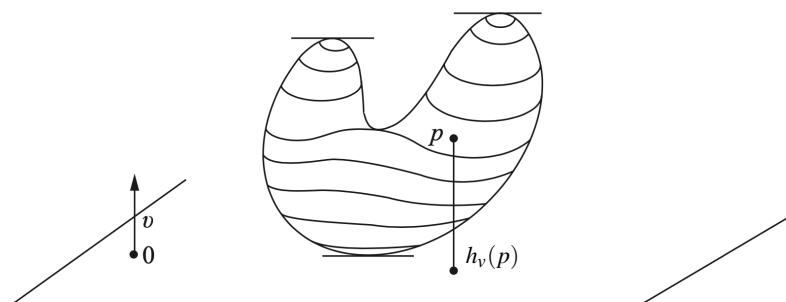
Osservazione 5.2 Con abuso di notazione, quando $f : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, indicheremo con $f(u, v)$ la funzione $f \circ X(u, v)$. In altre parole indicheremo con $f(u, v)$ l'espressione di f nella carta locale.

■ **Esempio 5.1** Sia S una superficie regolare e sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto di $\mathbb{R}^3$ con $S \subseteq A$. Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile. ■

■ **Esempio 5.2 — La funzione altezza.** Sia S una superficie regolare e sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ con $\|v\| = 1$. Definiamo la funzione altezza rispetto al vettore v come

$$\begin{aligned} h_v : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto h_v(p) = \langle p, v \rangle \end{aligned}$$

la quale è differenziabile se pensata come la restrizione ad S della funzione $\langle p, v \rangle$ definita su tutto $\mathbb{R}^3$. Geometricamente, la funzione altezza misura la distanza con segno dei punti $p \in S$ dal piano passante per l'origine e perpendicolare al vettore v (si veda la figura sotto).



Per esempio, sia $S = \mathbb{S}^2$ la sfera e sia $v = e_3 = (0, 0, 1)$. Rispetto alla parametrizzazione geografica

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

la funzione altezza è

$$\begin{aligned} h_{e_3} : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto \cos \varphi \end{aligned}$$

■

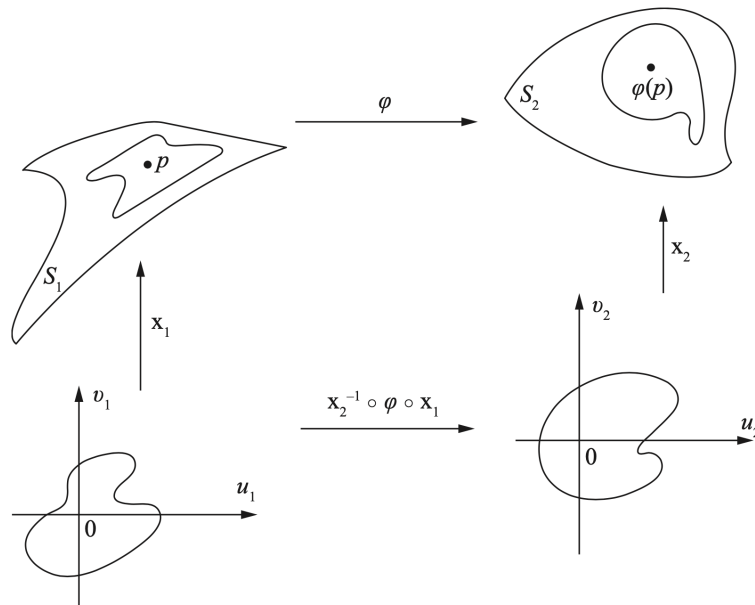
Definizione 5.2 Siano S_1, S_2 due superfici regolari. Un'applicazione continua $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ è *differenziabile* in $p \in V_1$ se date due parametrizzazioni

$$X_1 : U_1 \rightarrow S_1, \quad X_2 : U_2 \rightarrow S_2$$

con $p \in X_1(U_1)$, $\varphi(p) \in X_2(U_2)$, l'applicazione

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

è differenziabile in $X_1^{-1}(p)$. L'applicazione $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ si dice *differenziabile* se è differenziabile per ogni $p \in V_1$.



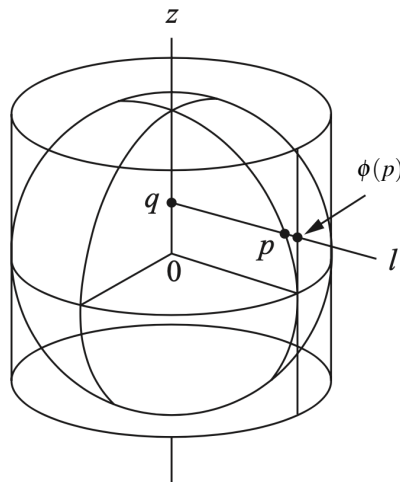
Osservazione 5.3 Anche in questo caso, con abuso di notazione, quando $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ è un'applicazione differenziabile, indicheremo con $\varphi(u, v)$ l'applicazione $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1(u, v)$.

Esercizio 5.1 Dimostrare che la definizione di applicazione differenziabile non dipende dalle carte locali scelte.

Definizione 5.3 Siano S_1 e S_2 due superfici regolari. Un'applicazione $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un *diffeomorfismo* se è differenziabile, invertibile con inversa differenziabile.

■ **Esempio 5.3** Siano $S_1 \subseteq A_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ e $S_2 \subseteq A_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due superfici regolari contenute, rispettivamente, in due aperti A_1 e A_2 di $\mathbb{R}^3$. Sia $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un'applicazione differenziabile con $\varphi(S_1) \subseteq S_2$. Allora la restrizione di φ a S_1 definisce un'applicazione differenziabile da $S_1 \rightarrow S_2$. ■

■ **Esempio 5.4** Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera e sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ il cilindro circoscritto come in figura



Se indichiamo con $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ il polo nord e sud della sfera, definiamo l'applicazione $\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow C$ nel modo seguente: $\phi(p) = l \cap C$ dove l è la semiretta uscente da $q = (0, 0, z)$ e passante per $p = (x, y, z)$. Segue che

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

L'applicazione ϕ si può pensare come la restrizione a $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ dell'applicazione

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \end{aligned}$$

la quale è ovviamente differenziabile. Per descrivere l'applicazione ϕ in coordinate locali, sia

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

la parametrizzazione geografica di $\mathbb{S}^2$ e sia

$$\begin{aligned} Y : U' = (0, 2\pi) \times (-1, 1) &\rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\xi, \eta) &\mapsto (\cos \xi, \sin \xi, \eta) \end{aligned}$$

una parametrizzazione regolare di C . Allora si trova

$$\begin{aligned} Y^{-1} \circ \phi \circ X(\vartheta, \varphi) &= Y^{-1} \circ \phi(\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \\ &= Y^{-1}(\cos \vartheta, \sin \vartheta, \cos \varphi) = (\vartheta, \cos \varphi). \end{aligned}$$

Quindi in coordinate locali l'applicazione ϕ è data da

$$\begin{aligned} (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow (0, 2\pi) \times (-1, 1) \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\xi(\vartheta, \varphi) = \vartheta, \eta(\vartheta, \varphi) = \cos \varphi), \end{aligned}$$

la quale è chiaramente differenziabile. ■

■ **Esempio 5.5** Sia S una superficie regolare e sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione. Allora l'applicazione $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ è differenziabile. Infatti, $X(U)$ è un aperto di S quindi è una superficie regolare che può essere ricoperta da un'unica carta locale (U, X) . Inoltre $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è anch'esso una superficie regolare ricoperto da un'unica carta locale (U, Id_U) . Segue che $\text{Id}_U \circ X^{-1} \circ X = \text{Id}_U$ è differenziabile. ■

Osservazione 5.4 L'esempio precedente mostra che una superficie regolare è localmente diffeomorfa ad $\mathbb{R}^2$ nel senso che per ogni punto $p \in S$ esiste un diffeomorfismo tra un aperto di S contenente p e un aperto di $\mathbb{R}^2$.

5.3 Curve regolari, superfici parametrizzate e superfici di rotazione

Nel primo capitolo abbiamo definito le curve parametrizzate regolari come un'applicazione $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile con $\|\alpha'\| \neq 0$ per ogni $t \in I$. Sulla stessa linea della definizione di superficie regolare possiamo dare la seguente definizione di curva regolare come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5.4 Una *curva regolare* in $\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che per ogni punto $p \in C$ esiste un aperto $V \subseteq C$, $p \in V$, e un omeomorfismo differenziabile $\alpha : I \rightarrow V$ tale che $d\alpha_t$ è iniettiva per ogni $t \in I$, cioè $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Osservazione 5.5 È possibile provare (esercizio per il lettore) che il cambiamento di parametro è dato (come per le superfici) da un diffeomorfismo. Da questo risultato fondamentale, è possibile decidere quando una determinata proprietà ottenuta mediante una parametrizzazione è indipendente dalla scelta della parametrizzazione. Se una proprietà di una curva C non dipende dalla parametrizzazione si dirà che è una proprietà locale di C . Ad esempio, la lunghezza dell'arco è indipendente dalla parametrizzazione scelta ed è, pertanto, una proprietà dell'insieme C . Poiché è sempre possibile parametrizzare, localmente, una curva regolare C con l'ascissa curvilinea, le proprietà (curvatura, torsione, ecc.) determinate mediante questa parametrizzazione sono proprietà locali di C . Ciò dimostra che la teoria locale delle curve sviluppata nella prima parte è valida per curve regolari.

Un commento finale dovrebbe ora essere fatto sulla nostra definizione di superficie. Abbiamo scelto di definire una superficie (regolare) come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. Se vogliamo considerare le proprietà globali, oltre che locali, delle superfici, questa è l'impostazione corretta. Il lettore avrebbe potuto chiedersi, tuttavia, perché non abbiamo definito la nozione di superficie semplicemente come una superficie parametrizzata, come nel caso delle curve. Questo può essere fatto, e in effetti una buona parte della letteratura classica della geometria differenziale è presentata in questo modo. Nessun danno grave viene fatto se si segue questa impostazione a condizione che vengano prese in considerazione solo le proprietà locali delle superfici. Tuttavia, i concetti globali, come l'orientazione (che tratteremo più avanti), devono essere omessi o trattati in modo inadeguato, se si decide di seguire un tale approccio. In ogni caso, la nozione di superficie parametrizzata è talvolta utile e diamo qui la sua definizione.

Definizione 5.5 Una *superficie parametrizzata regolare* è un'applicazione $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, tale che

1. X è differenziabile;
2. dX_q è iniettivo per ogni $q \in U$.

Osservazione 5.6 Una superficie parametrizzata regolare può avere autointersezioni.

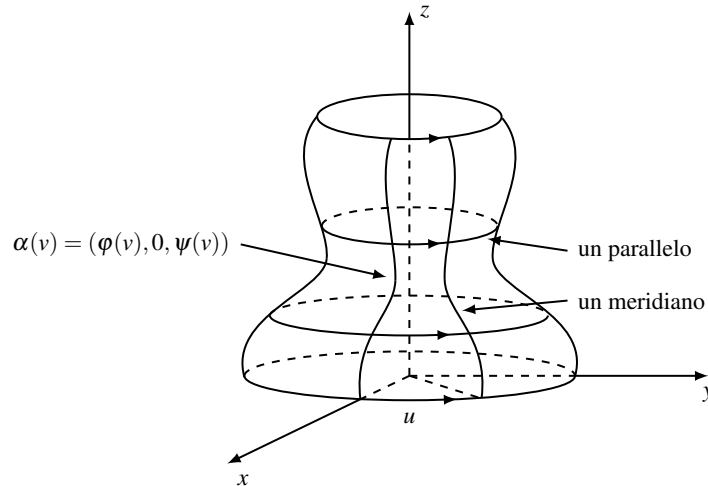
■ **Esempio 5.6 — Superfici di rotazione.** Vediamo adesso un'importante classe di superfici parametrizzate regolari. Sia

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto (\varphi(v), 0, \psi(v)) \end{aligned}$$

una curva parametrizzata regolare la cui traccia appartiene al piano xz e con $\varphi(v) > 0$ per ogni $v \in I$. Ruotando la traccia della curva α attorno all'asse z si ottiene la seguente superficie parametrizzata

regolare detta *superficie parametrizzata di rotazione*:

$$\begin{aligned} X : (0, 2\pi) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \end{aligned}$$



La traccia della curva α prende il nome di *curva profilo*, le curve coordinate $v = \text{costante}$ sono comunemente chiamate *paralleli* mentre le curve coordinate $u = \text{costante}$ sono i *meridiani*. Per costruzione X è differenziabile, mostriamo che dX_q è iniettivo per ogni $q \in (0, 2\pi) \times I$. La matrice Jacobiana di dX_q è

$$\begin{bmatrix} -\varphi(v) \sin u & \varphi'(v) \cos u \\ \varphi(v) \cos u & \varphi'(v) \sin u \\ 0 & \psi'(v) \end{bmatrix}$$

la quale ha rango minore di 2 in un punto $q = (u, v)$ se e solo se

$$\begin{cases} \varphi(v) \varphi'(v) = 0 \\ \varphi(v) \psi'(v) \cos u = 0 \\ \varphi(v) \psi'(v) \sin u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(v) \varphi'(v) = 0 \\ \varphi(v) \psi'(v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(v) = 0 \\ \psi'(v) = 0 \end{cases}$$

dove nell'ultima implicazione si è usato che $\varphi(v) > 0$. Essendo α regolare, cioè $(\varphi'(v), \psi'(v)) \neq (0, 0), \forall v \in I$, segue che dX_q è iniettivo per ogni $q \in (0, 2\pi) \times I$. ■

Osservazione 5.7 Le parametrizzazioni definite nell'Osservazione 4.1 e nell'Esercizio 4.1 definiscono una superficie parametrizzata di rotazione.

5.4 Problemi proposti

Problema 5.1 Sia $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e sia $A : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ l'applicazione (antipodale) $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Dimostra che A è un diffeomorfismo.

Problema 5.2 Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione che manda $p \in S$ nella sua proiezione ortogonale sul piano xy . Dire se π è differenziabile.

Problema 5.3 Mostrare che il paraboloide $z = x^2 + y^2$ è diffeomorfo al piano.

Problema 5.4 Costruire un diffeomorfismo tra l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

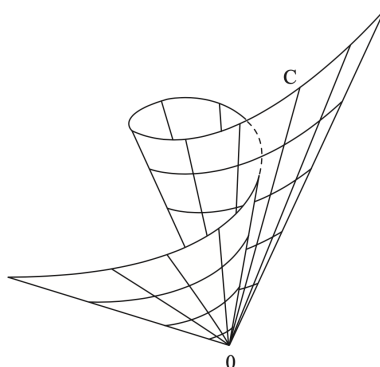
e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema 5.5 Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Per un fissato $p_o \in \mathbb{R}^3$, $p_o \notin S$, si definisca la funzione $d : S \rightarrow \mathbb{R}$ come $d(p) = \|p - p_o\|^2$, $p \in S$. Dimostrare che d è differenziabile.

Problema 5.6 Dimostra che la definizione di applicazione differenziabile tra due superfici non dipende dalle parametrizzazioni scelte.

Problema 5.7 Dimostra che la relazione “ S_1 è diffeomorfo a S_2 ” è una relazione di equivalenza nell’insieme delle superfici regolari.

Problema 5.8 Le superfici parametrizzate sono spesso utili per descrivere insiemi che sono superfici regolari ad eccezione di un numero finito di punti e un numero finito di rette. Ad esempio, sia C la traccia di una curva parametrizzata regolare $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ che non passa per l’origine $O = (0, 0, 0)$. Sia Σ il cono con direttrice la curva C e vertice O .



1. Determinare una parametrizzazione X di Σ .
2. Determinare i punti dove X non è regolare.
3. Quali insiemi si dovrebbero rimuovere da Σ per renderla una superficie regolare?

Problema 5.9 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare non piana. Definire

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}^+$$

L’applicazione X definisce una superficie parametrizzata chiamata superficie tangente di α . Dimostrare che X definisce una superficie parametrizzata regolare se e solo se $k_\alpha(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Problema 5.10 Dimostrare che la definizione di differenziabilità di una funzione $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ è equivalente alla seguente: f è differenziabile in $p \in V$ se e solo se è la restrizione a V di una funzione differenziabile definita in un aperto di $\mathbb{R}^3$ contenente p .

Problema 5.11 Sia $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\}$ identificato con il piano complesso $\mathbb{C}$ tramite l’identificazione $(x, y, -1) = x + iy = \xi \in \mathbb{C}$. Sia $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ il polinomio complesso

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \xi^i, \quad a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

Sia π_N la proiezione stereografica della sfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ dal polo nord $N = (0, 0, 1)$ su $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che l’applicazione $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ data da

$$\begin{cases} F(p) = \pi_N^{-1} \circ P \circ \pi_N(p), & \text{se } p \neq N \\ F(N) = N \end{cases}$$

è differenziabile.

Problema 5.12 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con l’ascissa curvilinea regolare tale che la curvatura sia diversa da zero ovunque. Sia

$$X(s, v) = \alpha(s) + r(N_\alpha(s) \cos v + B_\alpha(s) \sin v), \quad r = \text{const.} \neq 0, s \in I,$$

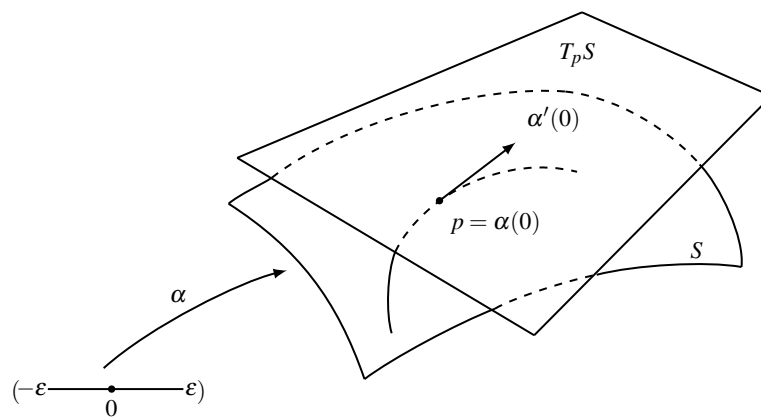
una superficie parametrizzata (il tubo di raggio r attorno a α), dove N_α è il vettore normale e B_α è il vettore binormale di α . Mostrare che, quando X è regolare, il suo vettore normale unitario è

$$N(s, v) = -(N_\alpha(s) \cos v + B_\alpha(s) \sin v).$$

6. Il piano tangente

Iniziamo con la seguente

Definizione 6.1 Sia S una superficie regolare. Un *vettore tangente* alla superficie in un punto $p \in S$ è il vettore velocità $\alpha'(0)$ di una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq S$ e $\alpha(0) = p$.



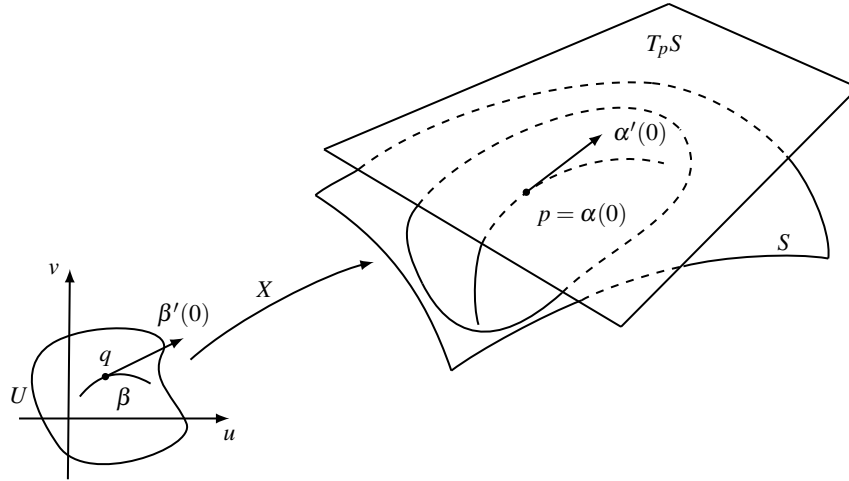
Indichiamo con $T_p S$ l'insieme di tutti i vettori tangenti alla superficie S nel punto p .

Proposizione 6.1 Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$. Sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione regolare con $p \in X(U)$ e sia $q = X^{-1}(p)$. Allora il sottospazio vettoriale

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$$

coincide con $T_p S$.

Dimostrazione. Con riferimento alla figura seguente



sia w un vettore tangente in p . Allora esiste una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Sia $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$. La curva β è una curva differenziabile la cui traccia è contenuta in U . Il vettore tangente alla curva β in q è $\beta'(0) \in \mathbb{R}^2$. Per definizione di differenziale si ha

$$dX_q(\beta'(0)) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)|_{t=0} = \alpha'(0) = w,$$

quindi $w \in dX_q(\mathbb{R}^2)$. Viceversa, sia $w = dX_q(v)$ con $v \in \mathbb{R}^2$. Allora la curva $\beta(t) = tv + q$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, soddisfa $\beta(0) = q$ e $\beta'(0) = v$. Segue che

$$w = dX_q(v) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)|_{t=0}$$

quindi w è il vettore velocità della curva $\alpha = X \circ \beta$, con $\alpha(0) = X(\beta(0)) = X(q) = p$. Quindi $w \in T_p S$. ■

Sia S una superficie regolare e sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione regolare. Per ogni $p \in X(U)$ possiamo considerare i due vettori

$$dX_q\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial X}{\partial u} = X_u, \quad dX_q\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial X}{\partial v} = X_v$$

dove $q = X^{-1}(p)$ ed abbiamo indicato con

$$\frac{\partial}{\partial u} = e_1 = (1, 0), \quad \frac{\partial}{\partial v} = e_2 = (0, 1).$$

Dalla regolarità di X segue che i vettori $\{X_u, X_v\}$ formano una base del piano tangente $T_p S$, $\forall p \in X(U)$. Tale riferimento prende il nome di *riferimento coordinato* e i due campi di vettori X_u, X_v sono chiamati *campi coordinati* i quali risultano tangenti alle curve coordinate.

Sia $w \in T_p S$. Allora $w = \alpha'(0)$ dove $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subseteq S$ è una curva con $\alpha(0) = p$. La curva α , in questo caso, si può descrivere come $\alpha = X \circ \beta$ dove $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ è una curva differenziabile in U con $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$. Siano $\beta(t) = (u(t), v(t))$ le funzioni componenti della curva β , allora $\alpha(t) = X \circ \beta(t) = X(u(t), v(t))$. Inoltre, il vettore tangente a β in $t = 0$ ha componenti $\beta'(0) = (u'(0), v'(0))$, cioè

$$\beta'(0) = u'(0) \frac{\partial}{\partial u} + v'(0) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Adesso

$$w = \alpha'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)|_{t=0} = \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))|_{t=0} = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q).$$

Il confronto delle ultime due identità mostra uno dei fatti più importanti nella trattazione locale delle superfici: *le componenti di un vettore $w \in T_p S$ rispetto alla base coordinata $\{X_u, X_v\}$ sono le stesse del corrispondente vettore $\beta'(0)$ di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$.*

Definizione 6.2 Sia $\varphi : V \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione differenziabile tra due superfici. Definiamo il differenziale di φ in un punto $p \in V$,

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2,$$

nel modo seguente. Se $v \in T_p S_1$, $v = \alpha'(0)$ dove $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ è una curva con $\alpha(0) = p$, allora

$$d\varphi_p(v) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0}.$$

Proposizione 6.2 L'applicazione $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ è lineare e non dipende dalla scelta della curva α .

Dimostrazione. Sia $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ l'espressione locale di φ rispetto a due carte locali (U, X) di p e $(\bar{U}, \bar{X})$ di $\varphi(p)$. Sia $w \in T_p S_1$ e sia $(u(t), v(t))$ l'espressione locale di una curva α tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Sia $\varphi \circ \alpha(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$ l'espressione locale della curva $\varphi \circ \alpha$. Allora $w = \alpha'(0) = (u'(0), v'(0))$, mentre

$$d\varphi_p(w) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{v}}$$

che in componenti, se indichiamo con

$$\begin{bmatrix} \bar{u}'(0) \\ \bar{v}'(0) \end{bmatrix}$$

le componenti locali del vettore $d\varphi_p(w)$, si scrive

$$\begin{bmatrix} \bar{u}'(0) \\ \bar{v}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

L'espressione sopra mostra che $d\varphi_p(w)$ non dipende dalla curva α ma solo dalle componenti di w rispetto alla base coordinata e che $d\varphi_p$ è lineare. ■

In modo analogo possiamo definire il differenziale di una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

■ **Esempio 6.1** Sia S una superficie regolare e sia $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$. Sia $h = h_v : S \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione altezza $h(p) = \langle p, v \rangle$. Calcoliamo dh_p . Sia $w \in T_p S$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$, allora

$$dh_p(w) = \frac{d}{dt}(h \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\langle \alpha(t), v \rangle)|_{t=0} = \langle \alpha'(0), v \rangle = \langle w, v \rangle. \quad \blacksquare$$

■ **Esempio 6.2** Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera unitaria centrata nell'origine e sia $R_\vartheta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la restrizione a $\mathbb{S}^2$ della rotazione in $\mathbb{R}^3$ di un angolo ϑ attorno all'asse z , cioè dell'applicazione

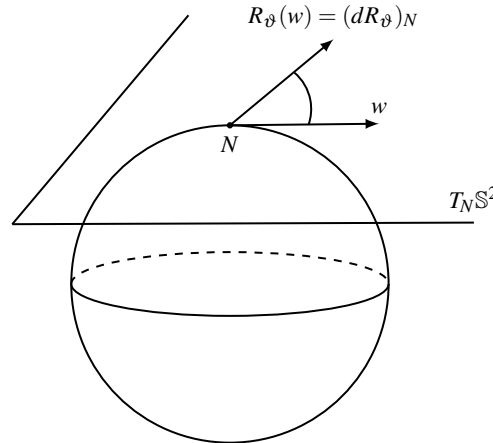
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sia $p \in \mathbb{S}^2$, $w \in T_p \mathbb{S}^2$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Allora

$$\begin{aligned} (dR_\vartheta)_p(w) &= \frac{d}{dt}(R_\vartheta \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = R_\vartheta \alpha'(0) = R_\vartheta(w) \end{aligned}$$

■

Per esempio se $p = N = (0, 0, 1)$ il polo nord allora $R_\vartheta(N) = N$ da cui $(dR_\vartheta)_N : T_N \mathbb{S}^2 \rightarrow T_N \mathbb{S}^2$ ed inoltre $(dR_\vartheta)_N$ rappresenta la rotazione nel piano tangente in senso antiorario di un angolo ϑ , si veda la figura sotto.



■ **Definizione 6.3** Un'applicazione $\varphi : U \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ è un diffeomorfismo locale in $p \in U$ se esiste $V \subseteq U$, $p \in V$, tale che $\varphi|_V : V \rightarrow \varphi(V)$ è un diffeomorfismo.

Il Teorema della funzione inversa diventa in questo contesto il seguente.

Teorema 6.1 Siano S_1, S_2 due superfici regolari e sia $\varphi : U \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione differenziabile tale che $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ è un isomorfismo. Allora φ è un diffeomorfismo locale in p .

6.1 Problemi proposti

Problema 6.1 Mostrare che l'equazione del piano tangente in (x_o, y_o, z_o) di una superficie regolare data da $f(x, y, z) = 0$, dove 0 è un valore regolare di f , è

$$f_x(x_o, y_o, z_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o, z_o)(y - y_o) + f_z(x_o, y_o, z_o)(z - z_o) = 0.$$

Problema 6.2 Determinare i piani tangenti di $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nei punti $(x, y, 0)$ e mostrare che sono tutti paralleli all'asse z .

Problema 6.3 Mostrare che l'equazione del piano tangente di una superficie che è il grafico di una funzione differenziabile $z = f(x, y)$, nel punto $p_o = (x_o, y_o)$, è data da

$$z = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o).$$

Problema 6.4 Mostrare che i piani tangenti di una superficie data da $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$, dove f è una funzione differenziabile, passano tutti attraverso l'origine $(0, 0, 0)$.

Problema 6.5 Si supponga che un aperto coordinato di una superficie si possa parametrizzare come

$$X(u, v) = f(u) + g(v),$$

dove f e g sono curve parametrizzate regolari. Mostrare che i piani tangenti lungo una curva coordinata sono tutti paralleli ad una retta.

Problema 6.6 Sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita da $f(p) = |p - p_o|^2$, dove p_o è un punto fisso di $\mathbb{R}^3$. Mostrare che $df_p(w) = 2\langle w, (p - p_o) \rangle$, $w \in T_p S$.

Problema 6.7 Mostrare che se $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una applicazione lineare e $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie invariante per L , cioè $L(S) \subset S$, allora la restrizione $L|_S$ è una applicazione differenziabile e $dL_p(w) = L(w)$, $p \in S, w \in T_p S$.

Problema 6.8 Un punto critico di una funzione differenziabile $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è un punto $p \in S$ tale che $df_p = 0$.

1. Sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(p) = \|p - p_o\|^2$, $p_o \notin S$. Mostrare che $p \in S$ è un punto critico di f se e solo se la retta che unisce p a p_o è normale a S in p .
2. Sia $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione altezza $h(p) = \langle p, v \rangle$, dove $v \in \mathbb{R}^3$ è un vettore di norma uno. Mostrare che $p \in S$ è un punto critico di f se e solo se v è un vettore normale ad S in p .

7. La prima forma fondamentale

7.1 Il prodotto scalare indotto

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ di $\mathbb{R}^3$ induce su $T_p S$ un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ definito nel modo seguente. Se $v, w \in T_p S$

$$\langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Il prodotto scalare $\langle v, w \rangle_p$ così definito è una forma bilineare simmetrica definita positiva la quale induce la forma quadratica

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

La forma quadratica I_p prende il nome di *prima forma fondamentale*.

Descriviamo adesso la prima forma fondamentale in coordinate locali. Sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione regolare con $p \in X(U)$ e sia $w \in T_p S$. Allora $w = \alpha'(0)$ con $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Segue che $w = \alpha'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$ e

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle u'(0)X_u + v'(0)X_v, u'(0)X_u + v'(0)X_v \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p u'(0)^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle X_v, X_v \rangle_p v'(0)^2 \\ &= Eu'(0)^2 + 2Fu'(0)v'(0) + Gv'(0)^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{cases} E = \langle X_u, X_u \rangle_p = \langle X_u, X_u \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ F = \langle X_u, X_v \rangle_p = \langle X_u, X_v \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ G = \langle X_v, X_v \rangle_p = \langle X_v, X_v \rangle_{\mathbb{R}^3}. \end{cases}$$

Le funzioni $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ sono funzioni definite localmente su $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e prendono il nome di *coefficienti della prima forma fondamentale*. Inoltre, la matrice associata alla forma bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, rispetto alla base coordinata $\{X_u, X_v\}$, è

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Siano adesso $w = w_u X_u + w_v X_v$ e $z = z_u X_u + z_v X_v$ due vettori tangenti ad S in p decomposti rispetto alla base coordinata. Il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ di w e z diventa, in coordinate locali,

$$\langle w, z \rangle_p = \langle w_u X_u + w_v X_v, z_u X_u + z_v X_v \rangle_p = Ew_u z_u + F(w_u z_v + w_v z_u) + Gw_v z_v \quad (7.2)$$

Ricordando che $w = dX(w_u \frac{\partial}{\partial u} + w_v \frac{\partial}{\partial v})$ dove $w_u \frac{\partial}{\partial u} + w_v \frac{\partial}{\partial v}$ è un vettore di $\mathbb{R}^2$ che rispetto alla base canonica $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ ha le stesse componenti di w rispetto alla base coordinata $\{X_u, X_v\}$, la formula (7.2) garantisce il seguente fatto notevole:

Il prodotto scalare $\langle w, z \rangle_p$, indotto nell'aperto $X(U)$ della superficie dal prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$, coincide con un nuovo prodotto scalare definito tra i vettori tangenti nell'aperto U di $\mathbb{R}^2$, definito da

$$g(\bar{w}, \bar{z}) = E(u, v)w_u z_u + F(u, v)(w_u z_v + w_v z_u) + G(u, v)w_v z_v \quad (7.3)$$

dove $\bar{w} = w_u \frac{\partial}{\partial u} + w_v \frac{\partial}{\partial v}$ e $\bar{z} = z_u \frac{\partial}{\partial u} + z_v \frac{\partial}{\partial v}$.

Sia S una superficie regolare e sia $\alpha : I \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare di $\mathbb{R}^3$ la cui traccia appartiene ad S . Se $[a, b] \subseteq I$ si ha

$$\int_a^b \|\alpha'\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle_{\mathbb{R}^3}} dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle_{\alpha(t)}} dt = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha')} dt.$$

Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, in una carta locale (U, X) di S , allora la funzione ascissa curvilinea diventa

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} d\tau \quad t_0 \in I$$

da cui

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

Elevando al quadrato e “semplificando formalmente” dt^2 si perviene alla

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Quest'ultima espressione coincide con la (7.3) a patto di fare le dovute considerazioni che seguono. Per ogni punto $q \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, il piano tangente $T_q U$ coincide con $\mathbb{R}^2$. In tale piano tangente consideriamo la base canonica $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$. Denotiamo con $\{du, dv\}$ le 1-forme duali definite da

$$du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = 1, \quad du\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \quad dv\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = 0, \quad dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 1.$$

Quindi se $w = w_u \frac{\partial}{\partial u} + w_v \frac{\partial}{\partial v}$ si ha

$$du(w) = w_u, \quad dv(w) = w_v.$$

Il prodotto naturale tra 1-forme è il *prodotto tensoriale* definito, per due 1-forme η e ω , come

$$\eta \otimes \omega(w, z) = \eta(w)\omega(z).$$

Il prodotto tensoriale non è però simmetrico $\eta \otimes \omega(w, z) \neq \omega \otimes \eta(w, z)$. Per ovviare a questo problema si può definire il *simmetrizzato* del prodotto tensoriale

$$\eta \cdot \omega(w, z) = \frac{\eta(w)\omega(z) + \eta(z)\omega(w)}{2}.$$

Con tale notazione la formula

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

deve essere intesa come

$$ds^2(w, z) = E du \cdot du(w, z) + 2F du \cdot dv(w, z) + G dv \cdot dv(w, z).$$

Segue che, se $w = w_u \frac{\partial}{\partial u} + w_v \frac{\partial}{\partial v}$ e $z = z_u \frac{\partial}{\partial u} + z_v \frac{\partial}{\partial v}$,

$$\begin{aligned} ds^2(w, z) &= E du \cdot du(w, z) + 2F du \cdot dv(w, z) + G dv \cdot dv(w, z) \\ &= E \frac{du(w)du(z) + du(z)du(w)}{2} + 2F \frac{du(w)dv(z) + du(z)dv(w)}{2} \\ &\quad + G \frac{dv(w)dv(z) + dv(z)dv(w)}{2} \\ &= E w_u z_u + F(w_u z_v + w_v z_u) + G w_v z_v \end{aligned}$$

coincidendo con la (7.3).

In conclusione, se S è una superficie regolare e (U, X) è una carta locale, in U possiamo definire il prodotto scalare ds^2 con la proprietà che in un punto $q \in U$ il prodotto scalare ds^2 di due vettori di $\mathbb{R}^2$, applicati a q , coincide con il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ dell'immagine dei due vettori tramite il differenziale di X . In formula:

$$ds^2(w, z) = \langle dX_q(w), dX_q(z) \rangle_p = \langle dX_q(w), dX_q(z) \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Osservazione 7.1 Sull'aperto U abbiamo definito il prodotto scalare

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

il quale varia punto per punto poiché le funzioni E, F, G dipendono dal punto (u, v) . Inoltre le funzioni $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili. Si osservi infine che, dalla (3.2),

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = E G - F^2.$$

Quindi in U , essendo $\|X_u \wedge X_v\| \neq 0$, il determinante della matrice (7.1) è maggiore di zero.

Astraendo quanto visto sino ad adesso si può dare la seguente definizione.

Definizione 7.1 Una *metrica riemanniana* su un aperto U di $\mathbb{R}^2$ è un prodotto scalare g definito in ogni punto $q \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ che varia in modo differenziabile con q . Nel senso che le funzioni

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

sono funzioni differenziabili in U . Chiamiamo la coppia (U, g) una *varietà riemanniana*.

Quindi se S è una superficie regolare la prima forma fondamentale induce una struttura di varietà riemanniana su ogni carta locale U , cioè (U, ds^2) è una varietà riemanniana.

Attenzione: il viceversa non è vero. È possibile definire su un qualche aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ una metrica riemanniana la quale non provenga da alcuna carta locale di qualche superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Daremo un esempio nel seguito.

■ **Esempio 7.1** Sia S un piano affine di $\mathbb{R}^3$. Allora S è una superficie regolare che può essere ricoperta da un'unica carta locale $(\mathbb{R}^2, X)$ dove $X(u, v) = p_o + uw_1 + vw_2$, $p_o \in S$, con $\{w_1, w_2\}$ base ortonormale della giacitura di S . La metrica indotta da X su $\mathbb{R}^2$ è $ds^2 = du^2 + dv^2$, infatti

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1 \end{aligned}$$

■

■ **Esempio 7.2** Sia $\mathcal{C}$ il cilindro circolare retto $x^2 + y^2 = 1$ di $\mathbb{R}^3$. Il cilindro $\mathcal{C}$ è una superficie regolare che, a parte una retta verticale, può essere ricoperta dalla seguente carta locale

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

La metrica indotta sulla striscia U da X è $ds^2 = du^2 + dv^2$ (esercizio). Segue che il cilindro meno una retta verticale, nonostante sia una superficie che appare curva, a differenza di un piano, ha la stessa metrica indotta. ■

■ **Esempio 7.3** Sia

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

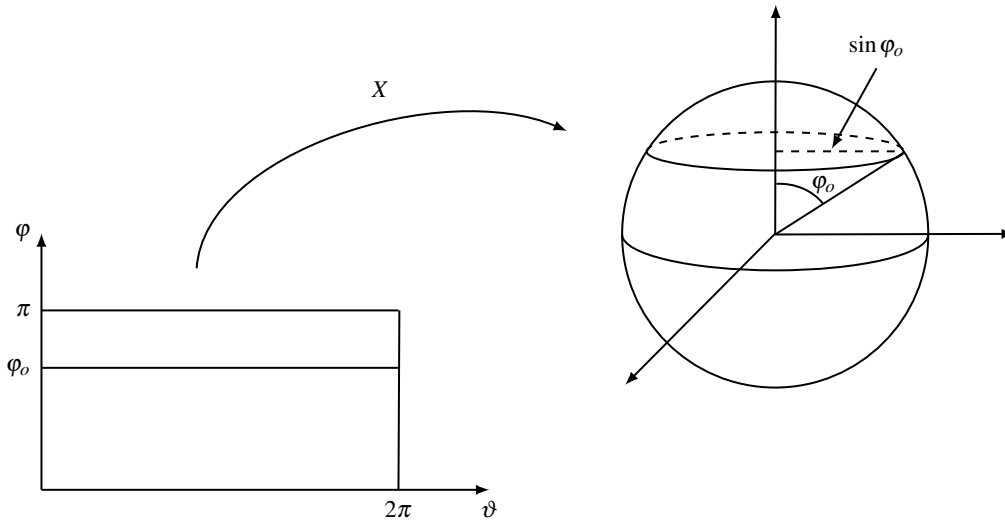
la carta locale sulla sfera $\mathbb{S}^2$ data dalle coordinate geografiche. La parametrizzazione X induce su $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ la metrica $ds^2 = \sin^2 \varphi d\vartheta^2 + d\varphi^2$. Infatti

$$X_{\vartheta} = (-\sin \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, 0), \quad X_{\varphi} = (\cos \varphi \cos \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, -\sin \varphi)$$

da cui

$$E = \langle X_{\vartheta}, X_{\vartheta} \rangle = \sin^2 \varphi, \quad F = \langle X_{\vartheta}, X_{\varphi} \rangle = 0, \quad G = \langle X_{\varphi}, X_{\varphi} \rangle = 1.$$

Possiamo utilizzare la metrica locale sulla sfera per calcolare la lunghezza di una curva. Sia $\alpha(\vartheta) = (\vartheta, \varphi_0)$, $\vartheta \in (0, 2\pi)$, la parametrizzazione di un segmento di retta orizzontale nel dominio U il quale corrisponde, tramite X , ad un parallelo della sfera, si veda la figura sotto.



Allora la lunghezza del parallelo non è altro che la lunghezza del segmento orizzontale in U rispetto alla metrica $ds^2 = \sin^2 \varphi d\vartheta^2 + d\varphi^2$ indotta da X su U . Si trova, essendo $\alpha' = (1, 0)$,

$$L = \int_0^{2\pi} \|\alpha'\|_{ds^2} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{ds^2(\alpha', \alpha')} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sin \varphi_0 d\vartheta = 2\pi \sin \varphi_0$$

in accordo col fatto che il parallelo è una circonferenza di raggio $R = \sin \varphi_0$. ■

La metrica $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ su U si può utilizzare per calcolare l'angolo tra vettori tangenti. Infatti, se w, z sono due vettori di $\mathbb{R}^2$ e $dX_q(w), dX_q(z)$ sono i corrispondenti vettori tangenti alla superficie S in $p = X(q)$, definiamo

$$\cos(\widehat{wz}) = \frac{ds^2(w, z)}{\sqrt{ds^2(w, w)} \sqrt{ds^2(z, z)}} = \frac{\langle dX_q(w), dX_q(z) \rangle_p}{\|dX_q(w)\|_p \|dX_q(z)\|_p} = \frac{\langle dX_q(w), dX_q(z) \rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|dX_q(w)\| \|dX_q(z)\|}.$$

Ad esempio, l'angolo tra i campi coordinati $X_u = dX(\partial_u)$ e $X_v = dX(\partial_v)$ è

$$\cos(\widehat{X_u X_v}) = \frac{ds^2(\partial_u, \partial_v)}{\sqrt{ds^2(\partial_u, \partial_u)} \sqrt{ds^2(\partial_v, \partial_v)}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Dalla precedente segue che, per un data parametrizzazione locale X di una superficie regolare S , si ha

$$F = 0 \Leftrightarrow X_u \perp X_v.$$

Una tale parametrizzazione (con $F = 0$) sarà chiamata *parametrizzazione ortogonale*.

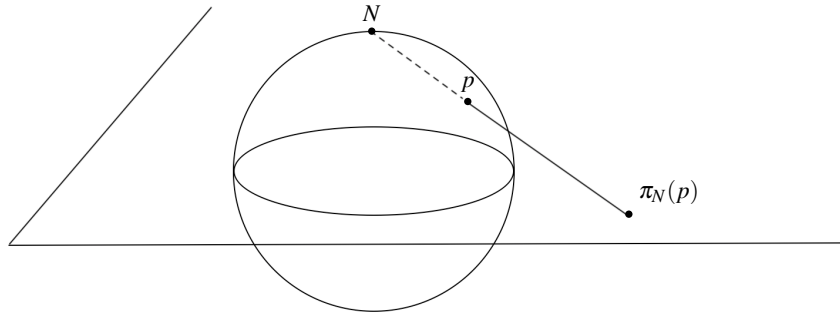
■ **Esempio 7.4** Risolviamo il seguente problema: *determinare sulla sfera $\mathbb{S}^2$ una curva che tagli i meridiani sotto un angolo costante*. Con riferimento alla figura dell'Esempio 7.3 uno potrebbe pensare di prendere l'immagine di una retta obliqua in U la quale taglia in U i segmenti verticali (che tramite X corrispondono ai meridiani) sotto un angolo costante. Il punto è che l'angolo tra un segmento obliquo e i segmenti verticali è costante rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$ mentre in U il prodotto scalare indotto da X è dato da $ds^2 = \sin^2 \varphi d\vartheta^2 + d\varphi^2$. Segue che, se $\beta(t) = (at, bt)$ è la parametrizzazione di un segmento obliquo, allora l'angolo tra β e i segmenti verticali (di direzione $e_2 = (0, 1)$) è dato da

$$\cos(\widehat{\beta' e_2}) = \frac{ds^2(\beta', e_2)}{\sqrt{ds^2(\beta', \beta')} \sqrt{ds^2(e_2, e_2)}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2(bt) + b^2}}$$

che non è affatto costante. Per ovviare a questo problema consideriamo una carta locale differente sulla sfera. Consideriamo la cosiddetta *proiezione stereografica*

$$\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

che proietta un punto $p = (x, y, z)$ della sfera meno il polo nord $N = (0, 0, 1)$ sull'intersezione del piano xy con la retta per N e p (si veda la figura)



Se denotiamo con $X = \pi_N^{-1}$ si ottiene (esercizio)

$$X(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

ed un calcolo diretto mostra che

$$E = G = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}, \quad F = 0.$$

La metrica indotta da X su $\mathbb{R}^2$ diviene quindi

$$ds^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Come si vede, in questo caso, la metrica indotta da X è proporzionale alla metrica canonica di $\mathbb{R}^2$ $du^2 + dv^2$. Quando questo accade si dice che la parametrizzazione X è *isoterma*. In altri termini una parametrizzazione X è isoterma se $E = G$ mentre $F = 0$.

Sia adesso $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$ una metrica su un aperto U di $\mathbb{R}^2$. Siano w, z due vettori di $\mathbb{R}^2$. Allora l'angolo tra w e z rispetto alla metrica ds^2 è

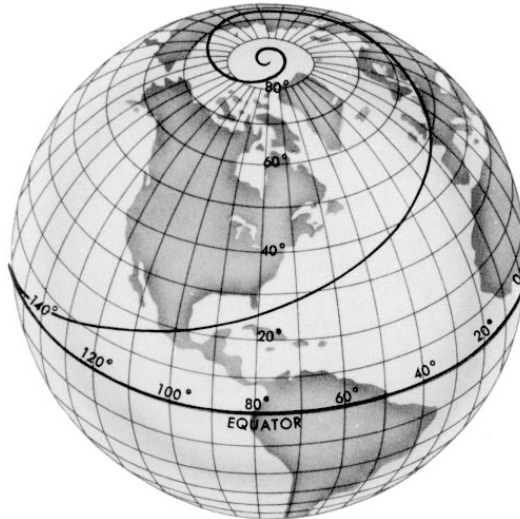
$$\cos(\widehat{wz}_{ds^2}) = \frac{ds^2(w, z)}{\sqrt{ds^2(w, w)} \sqrt{ds^2(z, z)}} = \frac{\lambda^2 \langle w, z \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\lambda \|w\|_{\mathbb{R}^2} \lambda \|z\|_{\mathbb{R}^2}} = \frac{\langle w, z \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|w\|_{\mathbb{R}^2} \|z\|_{\mathbb{R}^2}}$$

che coincide con l'angolo tra w e z rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$, $du^2 + dv^2$.

Tornando alla sfera, la parametrizzazione $X = \pi_N^{-1}$ è isoterma, quindi l'angolo tra due curve del piano calcolato rispetto alla metrica ds^2 coincide con l'angolo calcolato rispetto al prodotto scalare canonico. Consideriamo adesso la spirale logaritmica vista nell'Esempio 1.15, cioè la curva

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (e^{bt} \cos t, e^{bt} \sin t) \end{aligned}$$

con $b < 0$. Con un calcolo diretto (esercizio) si può verificare che la spirale logaritmica taglia tutte le rette per l'origine sotto un angolo costante ϑ tale che $\cos \vartheta = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$. Un'analisi attenta mostra che le semi rette uscenti dall'origine, tramite l'inversa della proiezione stereografica, corrispondono ai semi meridiani congiungenti il polo nord con il polo sud. Segue, per quanto detto prima sulla conservazione dell'angolo per una parametrizzazione isoterma, che l'immagine della spirale logaritmica sulla sfera tramite l'inversa della proiezione stereografica taglia i meridiani sotto un angolo costante. Tale curva prende il nome di *lossodromica*. La sua importanza è nota sin dai tempi più antichi. Infatti, se una nave naviga per bussola, cioè tiene la prua sotto un angolo costante rispetto al nord terrestre, taglia tutti i meridiani (che puntano verso il nord) sotto un angolo costante – quindi descrive una lossodromica. Si veda la figura sotto dove è rappresentata una lossodromica sul mappamondo.



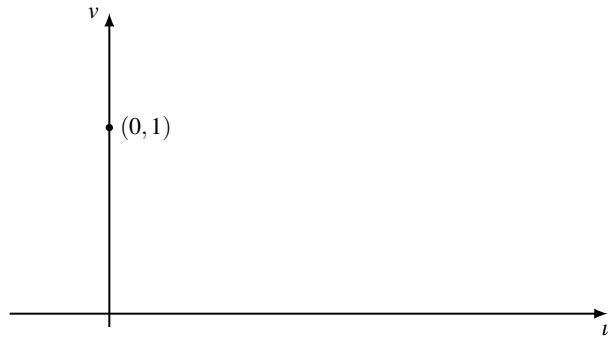
■ **Esempio 7.5 — Il Piano di Poincaré.** Diamo adesso un esempio di una metrica definita su un aperto di $\mathbb{R}^2$ che non sia la metrica indotta su una carta locale di una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Sia

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$$

il semipiano superiore aperto. Consideriamo in $\mathbb{R}_+^2$ la metrica

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$$

Un profondo risultato dovuto a D. Hilbert implica che non possa esistere una parametrizzazione regolare $X : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $E = G = 1/v^2$ e $F = 0$. Attenzione che nel risultato precedente è cruciale che X sia definita e regolare (quindi che soddisfa tutte le condizioni della Definizione 4.1) su tutto $\mathbb{R}_+^2$. La varietà riemanniana $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$ prende il nome di *Piano di Poincaré* e rappresenta uno dei modelli di geometria iperbolica (parleremo nell'ultima parte del corso di questi modelli). Proviamo, per esercizio, a calcolare la lunghezza, con la metrica $ds_{\mathbb{H}}^2$, del segmento di retta che dal punto $(0, 1)$ tende verso il bordo $v = 0$ del semipiano, si veda la figura.



■

La curva $\alpha(t) = (0, e^{-t})$ è tale che $\alpha(0) = (0, 1)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = (0, 0)$. La norma di $\alpha'(t) = (0, -e^{-t})$, rispetto alla metrica $ds_{\mathbb{H}}^2$, è

$$\|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{e^{-2t}}(0 + e^{-2t}) = 1.$$

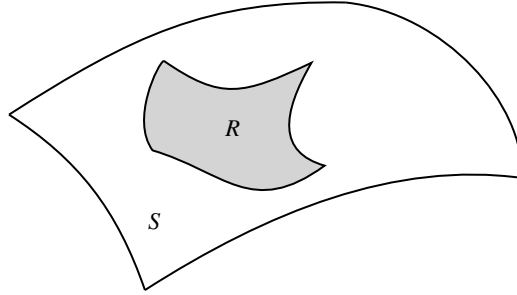
Quindi in $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$ la curva α è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Segue che

$$L_o^\infty(\alpha) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a 1 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} (a - 0) = \infty.$$

Questo fatto lascia intuire che nel modello $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$ la distanza del punto $(0, 1)$ dal bordo del semipiano sia infinita. Possiamo quindi pensare la retta $v = 0$ come la retta all'infinito del Piano di Poincaré.

7.2 Area di un dominio

Definizione 7.2 Sia S una superficie regolare. Un *dominio* di S è un sottoinsieme connesso aperto di S il cui bordo è l'immagine di $\mathbb{S}^1$ tramite un omeomorfismo differenziabile tranne che in un numero finito di punti. Una *regione* di S è l'unione di un dominio con il suo bordo. Una regione è *limitata* se è contenuta in una bolla di $\mathbb{R}^3$.



Sia Q una regione compatta di $\mathbb{R}^2$ contenuta in un aperto U e sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione regolare di una superficie regolare S . Allora $X(Q) = R$ è una regione limitata di S . In R , poiché X_u e X_v sono linearmente indipendenti, la quantità $\|X_u \wedge X_v\|$ definisce una funzione positiva da R in $\mathbb{R}$ che misura l'area del parallelogramma generato dai vettori X_u e X_v .

Vale il seguente fatto:

Proposizione 7.1 L'integrale

$$\int_Q \|X_u \wedge X_v\| \, dudv$$

non dipende dalla parametrizzazione X .

Dimostrazione. Sia $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$ un'altra parametrizzazione con $R = X(Q) \subseteq \bar{X}(\bar{U})$ e poniamo $\bar{Q} = \bar{X}^{-1}(R)$. Sia $X^{-1} \circ \bar{X}$ il cambio di coordinate allora $X^{-1} \circ \bar{X}(\bar{Q}) = Q$. Inoltre sia $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$ il determinante della matrice Jacobiana del cambio di coordinate

$$\begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases}$$

Allora

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X \circ X^{-1} \circ \bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X(X^{-1} \circ \bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$$

da cui

$$\bar{X}_{\bar{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \quad \bar{X}_{\bar{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \quad (7.4)$$

ed eseguendo il prodotto vettoriale si perviene a

$$\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) X_u \wedge X_v = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} X_u \wedge X_v. \quad (7.5)$$

Infine, dalla formula del cambiamento di variabili per integrali doppi, si conclude che

$$\int_{\bar{Q}} \|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\| \, d\bar{u}d\bar{v} = \int_{\bar{Q}} \|X_u \wedge X_v\| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \right| \, d\bar{u}d\bar{v} = \int_Q \|X_u \wedge X_v\| \, dudv.$$

■

Definizione 7.3 Sia $R \subseteq S$ una regione limitata di una superficie regolare S . Supponiamo che R sia contenuta in una carta locale $X(U)$. Allora il numero

$$A(R) = \int_Q \|X_u \wedge X_v\| \, dudv, \quad Q = X^{-1}(R)$$

è chiamato *area* della regione R .

Si osservi che, dalla (3.2),

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2$$

da cui

$$A(R) = \int_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \quad Q = X^{-1}(R).$$

La quantità $\sqrt{EG - F^2} \, dudv$ prende il nome di *elemento d'area* e si denota usualmente con dA . Scriveremo quindi

$$A(R) = \int_R dA = \int_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \quad Q = X^{-1}(R).$$

È utile sottolineare che, nella maggior parte degli esempi, la condizione che la regione R sia contenuta in una carta locale non è molto restrittiva, perché esistono coordinate locali che coprono l'intera superficie ad eccezione di un numero finito di curve, che non contribuiscono all'area.

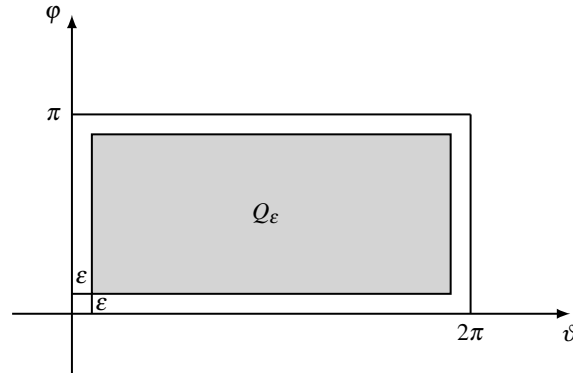
■ **Esempio 7.6** Calcoliamo l'area di una sfera di raggio R . Sia

$$\begin{aligned} X: U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2(R) \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (R \sin \varphi \cos \vartheta, R \sin \varphi \sin \vartheta, R \cos \varphi) \end{aligned}$$

la carta locale sulla sfera $\mathbb{S}^2(R)$ data dalle coordinate geografiche. La parametrizzazione X induce su $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ la metrica $ds^2 = R^2 \sin^2 \varphi \, d\vartheta^2 + R^2 d\varphi^2$. Da cui

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi.$$

Sia Q_ε la regione di U come indicato in figura



Allora

$$\begin{aligned} A(X(Q_\varepsilon)) &= \int_{Q_\varepsilon} R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\vartheta = R^2 \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \sin \varphi \, d\varphi \right) d\vartheta \\ &= R^2 (2\pi - 2\varepsilon) \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \sin \varphi \, d\varphi \\ &= R^2 (2\pi - 2\varepsilon) (\cos \varepsilon - \cos(\pi - \varepsilon)) \end{aligned}$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$A(\mathbb{S}^2(R)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(X(Q_\varepsilon)) = 4\pi R^2.$$

■

Esercizio 7.1 Calcolare, utilizzando la parametrizzazione data nell'Esercizio 4.1, l'area del toro di rotazione.

7.3 Problemi proposti

Problema 7.1 Calcolare le prime forme fondamentali delle seguenti superfici parametrizzate nei punti in cui sono regolari:

1. Ellissoide

$$X(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$$

2. Paraboloide ellittico

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$$

3. Paraboloide iperbolico

$$X(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$$

4. Iperboloide a due falde

$$X(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$$

Problema 7.2 Sia $X(\vartheta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi)$ la parametrizzazione geografica della sfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Sia P il piano $x = z \cot(\alpha)$, $0 < \alpha < \pi$, e sia β l'angolo acuto che la curva $P \cap \mathbb{S}^2$ forma con il semimeridiano $\vartheta = \vartheta_0$. Calcolare $\cos \beta$.

Problema 7.3 Mostra che l'area A di una regione limitata R della superficie $z = f(x, y)$ è

$$A = \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy,$$

dove Q è la proiezione ortogonale di R sul piano xy .

Problema 7.4 Mostrare che

$$X(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha),$$

$0 < u < \infty, 0 < v < 2\pi, \alpha = \text{costante}$, è una parametrizzazione del cono con angolo del vertice pari a 2α . In un intorno coordinato vicino al vertice, provare che la curva $\gamma(v) = X(c e^{v \sin \alpha \cot \beta}, v)$, $c = \text{costante}, \beta = \text{costante}$, interseca i generatori del cono ($v = \text{costante}$) sotto l'angolo costante β .

Problema 7.5 Le curve coordinate di una parametrizzazione $X(u, v)$ formano una rete di *Tchebyshef* se le lunghezze dei lati opposti di ogni quadrilatero formato da esse sono uguali. Mostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché una parametrizzazione $X(u, v)$ sia di *Tchebyshef* è

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Problema 7.6 Mostrare che una superficie di rivoluzione può sempre essere parametrizzata in modo tale che

$$E = E(v), F = 0, G = 1.$$

Problema 7.7 Sia $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ il piano xy e sia $X : U \rightarrow P$ una parametrizzazione di P data da

$$X(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta),$$

dove $U = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0, 0 < \vartheta < 2\pi\}$. Calcolare i coefficienti della prima forma fondamentale di P in questa parametrizzazione.

Problema 7.8 Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva generatrice C . Sia s l'ascissa curvilinea di C e denotiamo con $\rho = \rho(s)$ la distanza dall'asse di rotazione del punto $C(s)$.

1. (Teorema di Pappo). Mostrare che l'area di S è

$$2\pi \int_0^\ell \rho(s) ds$$

dove ℓ è la lunghezza di C .

2. Applicare la formula precedente per calcolare l'area di un toro di rivoluzione.

Problema 7.9 Gradiente su Superfici Il gradiente di una funzione differenziabile $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione differenziabile $\text{grad}f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ che assegna a ciascun punto $p \in S$ un vettore $\text{grad}f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ tale che

$$\langle \text{grad}f(p), v \rangle_p = df_p(v), \quad \forall v \in T_p S.$$

1. Se E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale in una parametrizzazione $X : U \rightarrow S$, mostrare che $\text{grad}f$ su $X(U)$ è dato da

$$\text{grad}f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} X_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} X_v.$$

In particolare, se $S = \mathbb{R}^2$ con coordinate x, y , allora

$$\text{grad}f = f_x e_1 + f_y e_2,$$

dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ (quindi la definizione concorda con l'usuale definizione di gradiente nel piano).

2. Sia $p \in S$ fissato con $\text{grad}f(p) \neq 0$ e si consideri $v \in T_p S$ con $|v| = 1$, quindi v appartiene al cerchio di raggio 1 di $T_p S$. Mostrare che $df_p(v)$ assume il valore massimo se e solo se

$$v = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}.$$

Quindi, $\text{grad}f(p)$ indica la direzione della variazione massima di f in p .

3. Se $\text{grad}f \neq 0$ in tutti i punti della curva di livello $C = \{q \in S : f(q) = \text{costante}\}$. Allora C è una curva regolare su S e $\text{grad}f$ è normale a C in tutti i punti di C .

8. Superfici orientabili

Sia S una superficie regolare. In un punto $p \in S$ abbiamo due scelte possibili per definire un vettore unitario N che sia normale a $T_p S$. Se $X : U \rightarrow S$ è una parametrizzazione regolare con $p \in X(U)$, allora possiamo scegliere come vettore normale unitario in p

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

Il vettore N così definito varia con continuità nell'aperto $X(U)$ di S ed inoltre $\{X_u, X_v, N\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$ per ogni punto $p \in X(U)$. Se adesso $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$ è un'altra parametrizzazione con $p \in \bar{X}(\bar{U})$ non è detto che il vettore normale

$$\bar{N}(p) = \frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|}$$

coincida con $N(p)$. Naturalmente, se non coincidesse, si avrebbe che $\bar{N}(p) = -N(p)$ e uno potrebbe asserire che con un cambio di coordinate $(u, v) \mapsto (v, u)$ il segno di $N(p)$ cambierebbe e i due vettori normali unitari coinciderebbero. Il ragionamento precedente è corretto ma chi ci assicura che sia possibile fare i richiesti cambi di coordinate in modo tale che, se ricopriamo S con un atlante, nell'intersezione di due qualsiasi carte locali i vettori normali definiti in ciascuna carta coincidano? Magari aggiustando i versi nell'intersezione di due carte locali ci si trova con il verso opposto in un'altra intersezione. Il problema di riuscire nell'impresa descritta sopra è esattamente il problema di riuscire ad orientare una superficie.

Sia S una superficie regolare e sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione regolare. Allora definiamo l'orientazione della superficie in un punto $p \in X(U)$ come l'orientazione della base $\{X_u, X_v\}$ del piano tangente $T_p S$. Se $p \in \bar{X}(\bar{U})$ dove $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$ è un'altra parametrizzazione allora (si veda la (7.4))

$$\bar{X}_{\bar{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \quad \bar{X}_{\bar{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.$$

Segue che le due basi $\{X_u, X_v\}$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ sono coerentemente orientate se

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0.$$

Definizione 8.1 Una superficie regolare S si dice *orientabile* se esiste un atlante $\{(U_i, X^i)\}_{i \in I}$ con la proprietà che per ogni $i, j \in I$ con $X^i(U_i) \cap X^j(U_j) \neq \emptyset$ la matrice Jacobiana del cambio

di coordinate ha determinante positivo. La scelta di un tale atlante definisce un'orientazione della superficie.

■ **Esempio 8.1** La sfera $\mathbb{S}^2$ è orientabile. Infatti è possibile ricoprire la sfera con due carte locali: l'inversa della proiezione stereografica dal polo nord $N = (0, 0, 1)$ e l'inversa della proiezione stereografica dal polo sud $S = (0, 0, -1)$. L'intersezione delle due carte locali è l'insieme connesso per archi dato da $W = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$. Adesso, supponiamo che in un punto $p \in W$ lo Jacobiano del cambio di coordinate sia positivo (se non lo fosse basterebbe scambiare u, v in una delle due parametrizzazioni). Se esistesse un punto $p' \in W$ con Jacobiano negativo allora, dalla connessione per archi, esisterebbe un cammino $\alpha : [0, 1] \rightarrow W$ da $p = \alpha(0)$ in $p' = \alpha(1)$ e la restrizione dello Jacobiano a tale cammino restituirebbe una funzione continua da $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ positiva in p e negativa in p' . Per continuità si avrebbe un punto del cammino in cui lo Jacobiano si annulla contro il fatto che lo Jacobiano è sempre diverso da zero. ■

L'esempio precedente mostra il seguente fatto generale

Proposizione 8.1 Sia S una superficie regolare che ammette un atlante formato da due carte locali la cui intersezione è connessa. Allora S è orientabile.

Torniamo adesso a quanto detto all'inizio sul vettore normale. Sia S una superficie regolare orientabile e si scelga un atlante $\{(U_i, X^i)\}_{i \in I}$ che definisce l'orientazione. Allora, in ogni carta locale (U_i, X^i) , si può definire il campo normale unitario

$$N(p) = \frac{X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i}{\|X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i\|}.$$

Poiché l'atlante definisce un'orientazione in ogni carta locale possiamo definire il campo normale come sopra e, essendo lo Jacobiano positivo nell'intersezione di due qualsiasi carte locali, il campo normale può essere definito globalmente su tutta la superficie e varia con continuità (di fatto in modo differenziabile). Quest'ultima osservazione si esplicita nella seguente

Proposizione 8.2 Una superficie regolare S è orientabile se e solo se esiste un campo di vettori differenziabile unitario normale $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito su tutta S .

Dimostrazione. Ci resta solo da dimostrare che se esiste un campo di vettori differenziabile unitario normale $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito su tutta S allora S è orientabile. Sia $\{(U_i, X^i)\}_{i \in I}$ un atlante di S e supponiamo, senza ledere alla generalità, che gli U_i siano connessi. Sia $p_o \in X^i(U_i)$ e definiamo il vettore normale

$$\frac{X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i}{\|X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i\|}(p_o)$$

che possiamo assumere sia proprio $N(p_o)$ (se fosse $-N(p_o)$ opereremmo il solito cambio tra u_i e v_i). Si consideri al variare di $p \in X^i(U_i)$ la funzione

$$f(p) = \langle N(p), \frac{X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i}{\|X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i\|}(p) \rangle.$$

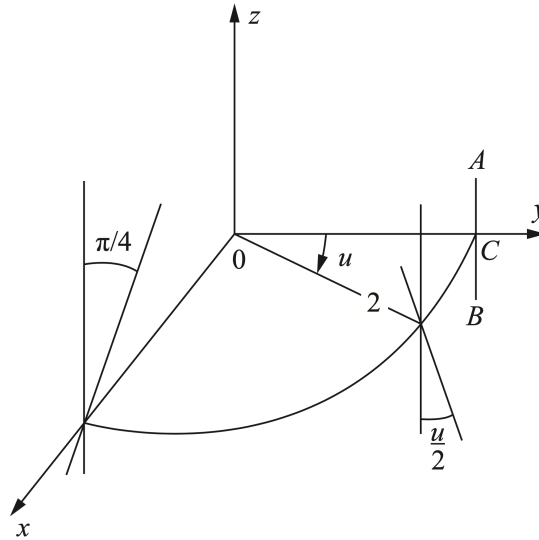
La funzione f è continua ed inoltre può assumere solo i valori ± 1 . Segue che la funzione f è localmente costante, nel senso che per ogni $p \in X^i(U_i)$ esiste un aperto di p in cui f è costante. Poiché una funzione localmente costante su un connesso è costante segue che f è costante. Inoltre, essendo $f(p_o) = 1$ si ha $f(p) = 1 \forall p \in X^i(U_i)$, quindi N coincide con $\frac{X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i}{\|X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i\|}$ in U_i . Ripetendo lo stesso ragionamento per ogni U_i , $i \in I$, si trova che N coincide con $\frac{X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i}{\|X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i\|}$ per ogni $i \in I$. Quindi

nell'intersezione $X^i(U_i) \cap X^j(U_j)$ di due carte locali (U_i, X^i) , (U_j, X^j) , i vettori

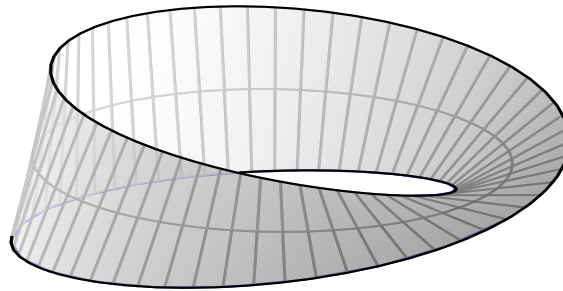
$$\frac{X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i}{\|X_{u_i}^i \wedge X_{v_i}^i\|} \quad \text{e} \quad \frac{X_{u_j}^j \wedge X_{v_j}^j}{\|X_{u_j}^j \wedge X_{v_j}^j\|}$$

coincidono con il campo normale N ristretto a $X^i(U_i) \cap X^j(U_j)$. Segue, dalla (7.5), che lo Jacobiano è positivo. ■

■ **Esempio 8.2 — Il nastro di Möbius.** Con riferimento alla figura seguente



si consideri la superficie ottenuta ruotando il segmento $(0, 2, v)$, $v \in (-1, 1)$, attorno all'asse z e simultaneamente ruotando lo stesso attorno alla retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ sul piano xy con velocità metà. La superficie che si ottiene è il *Nastro di Möbius* mostrato nella seguente figura



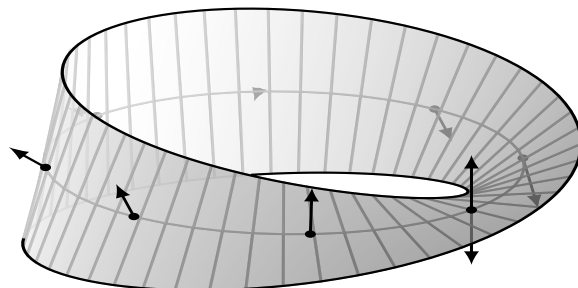
Per determinare una parametrizzazione locale si può prima ruotare di un angolo $u/2$ il segmento $(0, 2, v)$, $v \in (-1, 1)$, attorno alla retta per $(0, 2, 0)$ con direzione $e_1 = (1, 0, 0)$ e poi far seguire la rotazione attorno all'asse z di un angolo u . Il risultato della prima rotazione è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u/2 & -\sin u/2 \\ 0 & \sin u/2 & \cos u/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - v \sin u/2 \\ v \cos u/2 \end{bmatrix}$$

Applicando la rotazione attorno all'asse z si perviene a

$$X(u, v) = \begin{bmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - v \sin u/2 \\ v \cos u/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 - v \sin u/2) \sin u \\ (2 - v \sin u/2) \cos u \\ v \cos u/2 \end{bmatrix}$$

Il Nastro di Möbius è una superficie non orientabile. Per verificare questo fatto si supponga che esista un campo di vettori normale unitario N differenziabile su tutta la superficie. La restrizione di N alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ rimarrebbe continua, ma, come mostra la figura seguente, dopo aver fatto un giro completo il vettore normale ripassa per lo stesso punto con verso opposto, quindi non può essere continuo.



■

Proposizione 8.3 Sia $S = \{p \in V \subseteq \mathbb{R}^3 : F(p) = a\}$ la superficie di livello di una funzione differenziabile $F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dove $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare. Allora S è orientabile.

Dimostrazione. Dato $p \in S$ e sia $v_p \in T_p S$. Sia $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, una curva in S con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v_p$. Allora $F(x(t), y(t), z(t)) = a$ per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Segue che

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t))|_{t=0} = 0$$

che diventa

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)x'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)y'(0) + \frac{\partial F}{\partial z}(p)z'(0) = 0.$$

L'ultima equazione implica che il vettore

$$\text{grad} F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right) \perp v_p.$$

Siccome v_p è un generico vettore tangente alla superficie in p , si trova che $\text{grad} F \perp T_p S$. Dalla regolarità del valore a si ha che $\|\text{grad} F\| \neq 0$ per ogni $p \in F^{-1}(a)$. Quindi il campo unitario

$$N = \frac{\text{grad} F}{\|\text{grad} F\|} \quad (8.1)$$

definisce un campo di vettori unitario normale differenziabile su tutta la superficie $S = F^{-1}(a)$. Dalla Proposizione 8.2 la superficie S è orientabile. ■

9. La seconda forma fondamentale

Per poter procedere con la trattazione bisogna ricordare alcune proprietà notevoli degli endomorfismi simmetrici. Trattiamo questi argomenti in una sezione separata.

9.1 Proprietà fondamentali degli endomorfismi simmetrici

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione 9.1 Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ è *simmetrico* se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle, \quad \forall v, w \in V$$

Osservazione 9.1 Se $b = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di V , cioè se $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, allora

$$\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

da cui, se con $A = [a_{ij}]$ indichiamo la matrice associata a f rispetto alla base b , si ha

$$f(e_i) = \sum_k a_{ki} e_k$$

e

$$a_{ji} = \langle \sum_k a_{ki} e_k, e_j \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle = \langle e_i, \sum_k a_{kj} e_k \rangle = a_{ij}.$$

Quindi la matrice A è simmetrica. Attenzione che se la base b non è ortonormale allora la matrice associata non è necessariamente simmetrica.

Sia adesso $A : V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico. Allora A induce la seguente forma bilineare simmetrica

$$\begin{aligned} B : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle Av, w \rangle \end{aligned}$$

Viceversa, se $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica, definiamo l'endomorfismo simmetrico $A : V \rightarrow V$ come l'unica applicazione lineare tale che

$$\langle Av, w \rangle = B(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Infatti, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base o.n., allora la matrice $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ definisce un'applicazione

$$\begin{aligned} F : \{e_1, \dots, e_n\} &\rightarrow V \\ e_i &\mapsto F(e_i) = \sum_k b_{ik} e_k \end{aligned}$$

Dal Teorema Fondamentale delle Applicazioni Lineari, definiamo A come l'unica applicazione lineare tale che

$$A(e_i) = \sum_k b_{ik} e_k = F(e_i).$$

Segue che

$$\langle A(e_i), e_j \rangle = \langle \sum_k b_{ik} e_k, e_j \rangle = b_{ij} = B(e_i, e_j).$$

Per la linearità

$$\langle Av, w \rangle = B(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Infine,

$$\langle Av, w \rangle = B(v, w) = B(w, v) = \langle Aw, v \rangle = \langle v, Aw \rangle$$

quindi A è simmetrico.

Adesso, data una forma bilineare simmetrica $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si può definire la forma quadratica associata

$$Q(v) = B(v, v), \quad \forall v \in V.$$

Viceversa, data una forma quadratica $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata si può ricostruire tramite la formula

$$B(v, w) = \frac{1}{2} [Q(v+w) - Q(v) - Q(w)].$$

Riassumendo si ha:

$$A \rightsquigarrow B \rightsquigarrow Q \rightsquigarrow B \rightsquigarrow A.$$

Nella parte che segue ci focalizziamo su alcune proprietà notevoli degli endomorfismi simmetrici di uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Lemma 9.1 Data la funzione

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

Se Q ristretta a $\mathbb{S}^1$ ha un minimo nel punto $(1, 0)$, allora $b = 0$.

Dimostrazione. Sia $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ una parametrizzazione di $\mathbb{S}^1$ con $t \in (-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$ e sia

$$q(t) = Q|_{\mathbb{S}^1} = Q(\alpha(t)) = a \cos^2 t + 2b \cos t \sin t + c \sin^2 t.$$

Se $(1, 0) = \alpha(0)$ è un minimo per q allora $q'(0) = 0$. Segue, da $q'(0) = 2b$, che $b = 0$. ■

Proposizione 9.1 Sia Q una forma quadratica su V ed assumiamo che $\dim(V) = 2$. Allora esiste una base $\{e_1, e_2\}$ di V tale che per $v \in V$, $v = xe_1 + ye_2$, si ha

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

dove λ_1 e λ_2 sono il valore minimo e massimo di $Q|_{\mathbb{S}^1}$.

Dimostrazione. La funzione $Q|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ha un minimo poiché $\mathbb{S}^1$ è compatto. Sia λ_1 il valore minimo e sia $e_1 \in V, \|e_1\| = 1$, tale che $Q(e_1) = \lambda_1$. Sia $e_2 \perp e_1, \|e_2\| = 1$, e poniamo $\lambda_2 = Q(e_2)$. Sia $v = xe_1 + ye_2$ e sia B la forma bilineare simmetrica associata a Q . Allora

$$Q(v) = B(v, v) = B(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) = \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2$$

dove $b = B(e_1, e_2)$. Quindi Q si può pensare come una funzione $Q(x, y) = \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2$ per la quale $(1, 0)$ è un punto di minimo per $Q|_{\mathbb{S}^1}$ (si noti che e_1 in componenti è $(1, 0)$). Dal Lemma 9.1 segue che $b = 0$. Allora

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Per finire bisogna dimostrare che λ_2 è il valore massimo di $Q|_{\mathbb{S}^1}$. Sia $v = xe_1 + ye_2$ con $x^2 + y^2 = 1$, si ha

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \leq \lambda_2 (x^2 + y^2) = \lambda_2$$

quindi λ_2 è il valore massimo. ■

Concludiamo questa sezione con un importante risultato utile nel seguito.

Teorema 9.1 Sia $A : V^2 \rightarrow V^2$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale con $\dim(V) = 2$. Allora esiste una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di V tale che $A(e_1) = \lambda_1 e_1, A(e_2) = \lambda_2 e_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Rispetto alla base di autovettori $\{e_1, e_2\}$ la matrice associata ad A è diagonale e gli autovalori $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sono il minimo e il massimo della forma quadratica $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ ristretta a $\mathbb{S}^1$.

Dimostrazione. Sia $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ la forma quadratica associata ad A . Per la Proposizione 9.1 esiste una base $\{e_1, e_2\}$ ortonormale con

$$\begin{cases} Q(e_1) = \lambda_1 & \min \text{ in } \mathbb{S}^1 \\ Q(e_2) = \lambda_2 & \max \text{ in } \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

e $Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2, v = xe_1 + ye_2$. Per concludere bisogna dimostrare che

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2.$$

Sia B la forma bilineare associata ad A , si ha

$$\begin{aligned} B(e_1, e_2) &= \frac{1}{2} [Q(e_1 + e_2) - Q(e_1) - Q(e_2)] = \frac{1}{2} [Q(1, 1) - Q(1, 0) - Q(0, 1)] \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2] = 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$0 = B(e_1, e_2) = \langle Ae_1, e_2 \rangle \Rightarrow Ae_1 \parallel e_1 \Rightarrow Ae_1 = \mu e_1$$

ma

$$\mu = \langle Ae_1, e_1 \rangle = B(e_1, e_1) = Q(e_1) = \lambda_1.$$

In conclusione $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ e allo stesso modo si dimostra che $Ae_2 = \lambda_2 e_2$. ■

9.2 L'operatore di forma

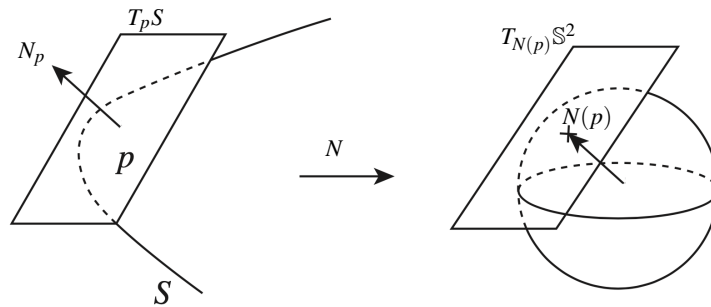
Sia S una superficie regolare orientabile. Allora esiste un campo di vettori unitario differenziabile N definito su tutta la superficie S . In ogni punto $p \in S$ definiamo la seguente orientazione di $T_p S$: una base $\{w_1, w_2\}$ di $T_p S$ è positiva se la base $\{w_1, w_2, N_p\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$, dove N_p è il vettore unitario normale alla superficie nel punto p dato dall'orientazione scelta.

Definizione 9.2 Sia S una superficie regolare orientata. Allora l'applicazione differenziabile

$$\begin{aligned} N: S &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto N(p), \end{aligned}$$

dove con $N(p)$ si intende il vettore N_p unitario normale a S in p traslato nell'origine di $\mathbb{R}^3$, è chiamata *applicazione normale di Gauss* o semplicemente *applicazione di Gauss*. Chiaramente l'immagine di S tramite N appartiene a $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Per ogni punto $p \in S$, il differenziale dell'applicazione di Gauss $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ si può considerare come un'applicazione lineare da $T_p S$ in se stesso poiché, si veda la figura sotto, il piano tangente $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ si può identificare con $T_p S$ in quanto rappresentano le giaciture di piani affini paralleli in $\mathbb{R}^3$.



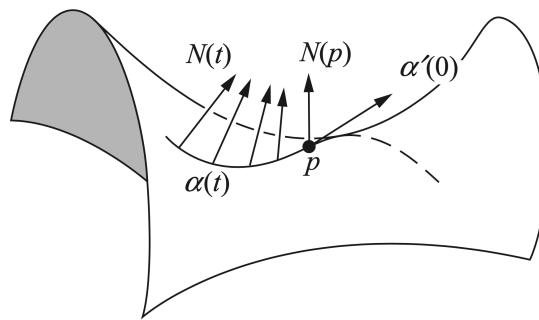
Quindi

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

è un endomorfismo.

Per calcolare dN_p , sia $v_p \in T_p S$ e si consideri una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v_p$. Allora

$$dN_p(v_p) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(N(t))|_{t=0}.$$



Quindi $dN_p(v_p)$ misura la velocità con cui varia N in un intorno di p in direzione di v_p .

■ **Esempio 9.1** Sia S un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Allora l'applicazione di Gauss è data da

$$\begin{aligned} N: S &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (a, b, c) \end{aligned}$$

la quale è costante da cui segue che $dN_p \equiv 0$ per ogni $p \in S$. ■

■ **Esempio 9.2** Sia $S = \mathbb{S}^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ la sfera di raggio R e scegliamo come applicazione di Gauss, si veda la (8.1),

$$\begin{aligned} N : \mathbb{S}^2(R) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto -\frac{\text{grad} F}{\|\text{grad} F\|} = \frac{1}{R}(-x, -y, -z) \end{aligned}$$

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2(R)$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, una curva con $\alpha(0) = p$ e sia $\alpha'(0) = v_p$ un vettore tangente. Allora $N \circ \alpha = N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))/R$ da cui

$$\begin{aligned} dN_p(v_p) &= \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(N(t))|_{t=0} = (-x'(0), -y'(0), -z'(0))/R \\ &= -\frac{1}{R}\alpha'(0) = -\frac{1}{R}v_p. \end{aligned}$$

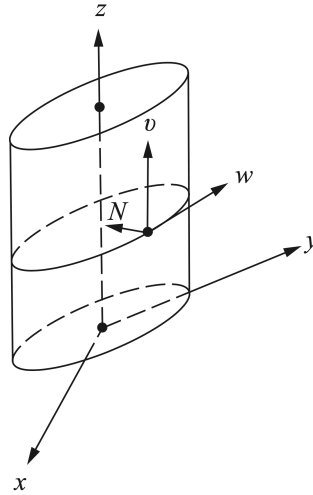
Segue che ogni vettore di $T_p\mathbb{S}^2(R)$ è un autovettore dell'endomorfismo dN_p con autovalore $-1/R$. Si trova quindi $dN_p = -(1/R)\text{Id}$. ■

■ **Esempio 9.3** Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$ il cilindro circolare retto di raggio R . In questo caso si può scegliere come applicazione di Gauss

$$\begin{aligned} N : C &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (-x, -y, 0)/R \end{aligned}$$

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$ una curva con $\alpha(0) = p$ e sia $\alpha'(0) = v_p$ un vettore tangente. Allora $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$. Si trova

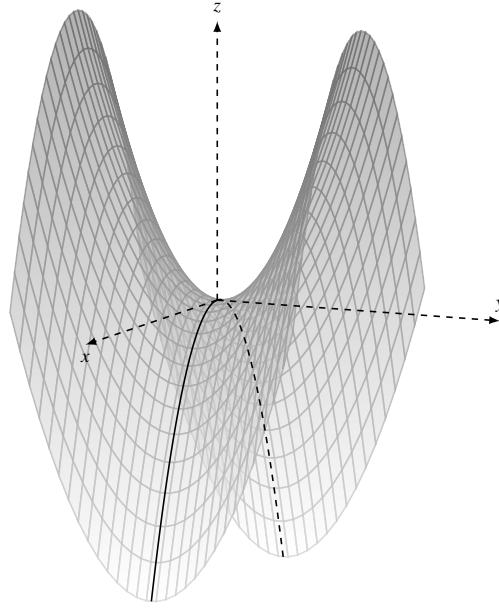
$$dN_p(v_p) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(N(t))|_{t=0} = (-x'(0), -y'(0), 0)/R.$$



Se v è parallelo all'asse z , cioè se $v = (0, 0, z'(0))$ segue che $dN_p(v) = 0$, cioè v è un autovettore di dN_p relativo all'autovalore 0. Se invece w è parallelo al piano xy , cioè se $w = (x'(0), y'(0), 0)$, si trova $dN_p(w) = -(1/R)w$, quindi w è un autovettore relativo all'autovalore $-1/R$. ■

■ **Esempio 9.4** Si consideri il paraboloide iperbolico di equazione

$$\mathcal{P} : F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z = 0$$



Scegliamo come applicazione di Gauss

$$N : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{\text{grad} F}{\|\text{grad} F\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, -2y, 1)$$

Sia $p = (0, 0, 0)$. I vettori $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$ formano una base ortonormale del piano tangente $T_p \mathcal{P}$. Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{P}$ una curva su $\mathcal{P}$, cioè $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $x(t)^2 - y(t)^2 + z(t) = 0$. Se $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = e_1$ segue che $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$ e $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (1, 0, 0)$. Si trova

$$\begin{aligned} dN_p(e_1) &= \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}}(2x(t), -2y(t), 1) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}} \right) \Big|_{t=0} (2x(t), -2y(t), 1) \Big|_{t=0} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+4x(t)^2+4y(t)^2}} \Big|_{t=0} \frac{d}{dt}(2x(t), -2y(t), 1) \Big|_{t=0} \\ &= (2x'(0), -2y'(0), 0) = (2, 0, 0) = 2e_1 \end{aligned}$$

Con un conto analogo si verifica che $dN_p(e_2) = -2e_2$. Quindi nell'origine i vettori e_1, e_2 sono autovettori di dN_p relativamente agli autovalori 2 e -2 . ■

Proposizione 9.2 Il differenziale dell'applicazione di Gauss $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ è un endomorfismo simmetrico, i.e. per ogni $w, z \in T_p S$

$$\langle dN_p(z), w \rangle_p = \langle z, dN_p(w) \rangle_p.$$

Dimostrazione. L'applicazione dN_p è lineare quindi basta verificare che

$$\langle dN_p(z), w \rangle_p = \langle z, dN_p(w) \rangle_p$$

per una base di $T_p S$. Sia $X : U \rightarrow S$ una parametrizzazione con $p \in X(U)$ e sia $\{X_u, X_v\}$ la base coordinata. Sia $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva con $\alpha(0) = p$. Allora, da un lato, per definizione di

differenziale,

$$dN_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}(N(u(t), v(t))|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0)$$

dall'altro, per la linearità,

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) = dN_p(X_u)u'(0) + dN_p(X_v)v'(0).$$

Segue che

$$\begin{cases} dN_p(X_u) = N_u \\ dN_p(X_v) = N_v \end{cases} \quad (9.1)$$

Per dimostrare che dN_p è simmetrico bisogna verificare che

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle_p = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle_p$$

ovvero, tenendo conto della (9.1),

$$\langle N_u, X_v \rangle_p = \langle X_u, N_v \rangle_p.$$

Derivando rispetto a v la prima delle due identità seguenti e la seconda rispetto a u

$$\begin{cases} \langle N, X_u \rangle = 0 \\ \langle N, X_v \rangle = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \langle N_v, X_u \rangle_p + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ \langle N_u, X_v \rangle_p + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \end{cases}$$

dalle quali, poiché $X_{uv} = X_{vu}$, segue che

$$\langle N_u, X_v \rangle_p = \langle X_u, N_v \rangle_p.$$

■

Definizione 9.3 Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare.

1. Chiamiamo l'endomorfismo simmetrico

$$A = -dN_p$$

operatore di forma della superficie S nel punto $p \in S$.

2. Chiamiamo la forma quadratica associata ad A

$$II_p(v) = \langle Av, v \rangle$$

seconda forma fondamentale di S in p .

Dal Teorema 9.1 esiste una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di $T_p S$ formata da autovettori di A tale che $A(e_1) = k_1 e_1$, $A(e_2) = k_2 e_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e gli autovalori $k_1 \leq k_2$ sono il minimo e il massimo della seconda forma fondamentale $II_p(v) = \langle Av, v \rangle$ ristretta a $\mathbb{S}^1$.

Diamo un'importante interpretazione geometrica dei valori k_1 e k_2 . A tal scopo iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 9.4 Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva regolare su S parametrizzata con l'ascissa curvilinea con $\alpha(0) = p$. Sia k la curvatura di α in p . Sia $\cos \vartheta = \langle N_\alpha, N \rangle$ dove

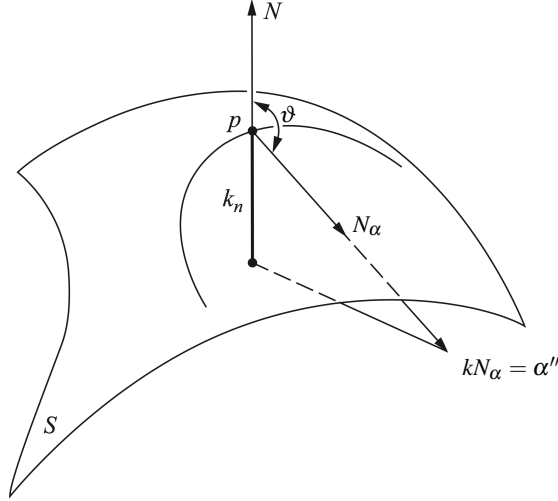
N_α è la normale principale in $\mathbb{R}^3$ della curva α ;

N è la normale alla superficie S in p .

Chiamiamo il numero

$$k_n(p, \alpha) = \langle \alpha''(0), N \rangle = \langle kN_\alpha, N \rangle = k \cos \vartheta$$

curvatura normale di α in p .



Il numero k_n è positivo se $0 < \vartheta < \pi/2$ mentre è negativo se $\pi/2 < \vartheta < \pi$. Inoltre il segno di k_n dipende dalla scelta del vettore normale N , quindi dalla scelta dell'orientazione della superficie.

Sia adesso $v \in T_p S$, $\|v\| = 1$, e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva regolare parametrizzata con l'ascissa curvilinea con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Sia $N(s) = N(\alpha(s))$ la restrizione del campo normale unitario N alla curva α . Allora $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ da cui, derivando rispetto a s , si ottiene

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$$

che valutata in $s = 0$ restituisce

$$\langle N(0), \alpha''(0) \rangle = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle.$$

Segue che

$$\begin{aligned} II(v) &= \langle A(v), v \rangle = -\langle dN_p(v), v \rangle = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= k_n(p, \alpha). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Osservazione 9.2 Si noti che la condizione

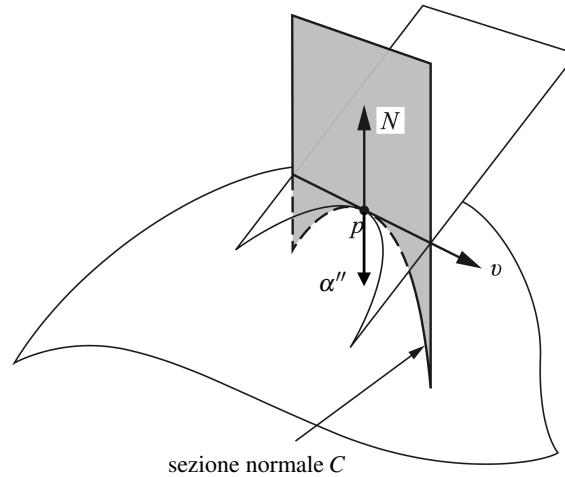
$$II(\alpha'(0)) = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle$$

è valida anche per una curva α non necessariamente parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

Dalla (9.2) si deduce la seguente conseguenza:

la curvatura normale $k_n(p, \alpha)$ in un punto p non dipende dalla curva α ma solo dal vettore $v = \alpha'(0)$ (Teorema di Meusnier).

Questo fatto permette di parlare di curvatura normale rispetto ad un vettore unitario $v \in T_p S$ e scegliere una qualunque curva α con velocità v in p per il calcolo di $k_n(p, \alpha)$ che denotiamo da ora in poi con $k_n(p, v)$. Tra tutte le possibili scelte per la curva α la più semplice è considerare il piano Π per p con giacitura $L(N, v)$ e definire la traccia di α come l'intersezione di tale piano con la superficie S . Tale intersezione prende il nome di *sezione normale*, si veda la figura seguente.



Sia C una sezione normale parametrizzata da una curva α con l'ascissa curvilinea e sia α'' il vettore accelerazione in p . Essendo $\alpha'' \parallel N$ si ha $|k_n(p, v)| = k$. In particolare, $k_n(p, v) = -k$ se l'accelerazione è opposta al vettore normale, mentre $k_n(p, v) = k$ se l'accelerazione ha lo stesso verso di N . Ad esempio, con riferimento alla figura sopra, $k_n(p, v) = -k$. La sezione normale è una curva nel piano Π .

Sempre dalla (9.2), tenendo in considerazione il Teorema 9.1 e l'osservazione fatta sopra, si trova l'interpretazione geometrica degli autovalori dell'operatore di forma annunciata all'inizio:

gli autovalori k_1 e k_2 dell'operatore di forma A rappresentano il minimo e il massimo valore della curvatura normale $k_n(p, v)$ al variare di $v \in T_p S$, $\|v\| = 1$, cioè al variare di $v \in S^1 \subset T_p S$.

Definizione 9.5 Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$. Sia $A = -dN_p$ l'operatore di forma della superficie S in p .

1. Chiamiamo gli autovalori k_1, k_2 di A le *curvature principali* di S in p .
2. Chiamiamo gli autovettori e_1 e e_2 di A relativi alle curvature principali k_1, k_2 , orientati in modo che $\{e_1, e_2\}$ formi una base positiva di $T_p S$, le *direzioni principali* di S in p .

Vedremo nel seguito che le curvature principali ed alcune loro combinazioni determinano in modo inaspettato la geometria di una superficie in $\mathbb{R}^3$.

■ **Esempio 9.5** Prima di andare avanti rivediamo gli Esempi 9.1–9.2–9.3–9.4.

Nell'Esempio 9.1 del piano tutte le sezioni normali sono rette; quindi, tutte le curvature normali sono zero. Pertanto la seconda forma fondamentale è identicamente nulla in tutti i punti. Ciò

concorda con il fatto che $A = -dN \equiv 0$. Si osservi che $A = 0 \text{ Id}$

Nell'Esempio 9.2 della sfera le sezioni normali per un punto p sono cerchi massimi di raggio pari al raggio della sfera. Pertanto tutte le curvatures normali sono uguali a $1/R$ da cui

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}.$$

Segue che per la sfera di raggio R

$$A = \frac{1}{R} \text{Id}.$$

Nell'Esempio 9.3 del cilindro, le sezioni normali con piani paralleli al piano xy sono circonferenze di raggio R mentre le sezioni normali con piani contenenti l'asse z sono rette. Da cui segue che

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}.$$

Nell'Esempio 9.4 del paraboloide iperbolico, in $p = (0, 0, 0)$, si possono distinguere le sezioni normali per e_1 che, essendo $N_p = (0, 0, 1)$, hanno curvatura normale negativa e le sezioni normali per e_2 con curvatura normale positiva. In questo caso si trova

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 2.$$

■

Ritornando alle generalità, sia $v \in T_p S$, $\|v\| = 1$. Allora rispetto alle direzioni principali $\{e_1, e_2\}$ si ha

$$v = \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2$$

dove $\vartheta = \widehat{e_1 v}$ è l'angolo tra v e e_1 in $T_p S$. Dalla (9.2) segue che

$$\begin{aligned} k_n(v) = II(v) &= \langle A(v), v \rangle = \langle A(\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2), \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2 \rangle \\ &= \langle k_1 \cos \vartheta e_1 + k_2 \sin \vartheta e_2, \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (9.3)$$

La formula (9.3) prende il nome di *Formula di Eulero*.

Definizione 9.6 Sia S una superficie regolare, sia $p \in S$ e sia A l'operatore di forma in p . Allora

$$K = \det(A)$$

è chiamata *curvatura di Gauss* della superficie S nel punto p . Mentre

$$H = \frac{1}{2} \text{trace}(A)$$

è chiamata *curvatura media* della superficie S nel punto p .

Siccome il determinante e la traccia di un endomorfismo non dipendono dalla base scelta possiamo scegliere la base formata dalle direzioni principali $\{e_1, e_2\}$ rispetto alla quale la matrice associata all'operatore di forma è

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Segue che, rispetto alle curvatures principali, la curvatura di Gauss e la curvatura media diventano

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Definizione 9.7 Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$. Allora il punto p si dice

1. *ellittico* se $K(p) > 0$;
2. *iperbolico* se $K(p) < 0$;
3. *parabolico* se $K(p) = 0$ con $A \neq 0$;
4. *piano* se $K(p) = 0$ con $A = 0$.

■ **Esempio 9.6** Rivediamo gli Esempi 9.1–9.2–9.3–9.4.

Nell'Esempio 9.1 del piano $k_1 = k_2 = 0$ quindi $A = 0$ e $K = H = 0$ in tutti i punti. Segue che tutti i punti del piano sono piani.

Nell'Esempio 9.2 della sfera

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R},$$

da cui

$$K = \frac{1}{R^2}, \quad H = \frac{1}{R}.$$

Quindi tutti i punti della sfera sono ellittici.

Nell'Esempio 9.3 del cilindro

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R},$$

da cui

$$K = 0, \quad H = \frac{1}{2R}.$$

In questo caso i punti sono tutti parabolici.

Nell'Esempio 9.4 del paraboloide iperbolico, nel punto $p = (0, 0, 0)$

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 2.$$

Quindi, in $p = (0, 0, 0)$,

$$K = -4, \quad H = 0.$$

Il punto $p = (0, 0, 0)$ è un punto iperbolico. ■

Osservazione 9.3 È bene far notare sin da subito che se $K(p) = 0$ per ogni punto $p \in S$ di una superficie regolare non obbliga che quest'ultima sia parte di un piano. Basta considerare l'esempio del cilindro.

Osservazione 9.4 Se si cambia l'orientazione della superficie, allora le curvature principali cambiano segno. Ciò nonostante la curvatura di Gauss, essendo il prodotto delle curvature principali, non cambia segno diversamente dalla curvatura media che invece cambia segno.

9.3 Problemi proposti

Problema 9.1 Sia S una quadrica regolare data in forma implicita dall'equazione

$$0 = \langle BP, P \rangle + 2\langle b, P \rangle + c, \quad P \in \mathbb{R}^3$$

dove B è una matrice simmetrica non nulla di ordine 3, $b \in \mathbb{R}^3$ e $c \in \mathbb{R}$. Mostrare che

1. l'applicazione normale di Gauss è data da

$$N(p) = \frac{BP + b}{\|BP + b\|}, \quad p \in S$$

2. la seconda forma fondamentale è

$$II_p(v) = -\frac{1}{\|BP + b\|} \langle Bv, v \rangle, \quad p \in S, v \in T_p S.$$

Concludere che un ellissoide ha curvatura di Gauss positiva in tutti i punti.

Problema 9.2 Si supponga che una superficie regolare S sia tangente ad un dato piano lungo la traccia di una curva regolare. Mostrare che tutti i punti di tale curva sono parabolici o piani.

Problema 9.3 Se una superficie contiene una retta dello spazio, allora la superficie ha curvatura di Gauss non positiva in tutti i punti della retta.

Problema 9.4 Sia S una superficie regolare e sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimento rigido dato da $\varphi(p) = Ap + b$. Sia N l'applicazione di Gauss della superficie S . Mostrare che $N' = A \circ N \circ \varphi^{-1}$ è l'applicazione di Gauss per la superficie $S' = \varphi(S)$. Concludere che

$$(dN')_{\varphi(p)} = A \circ (dN)_p \circ A^{-1}$$

e

$$II'_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)) = II'_{\varphi(p)}(Av) = II_p(v), \quad v \in T_p S.$$

10. Geometria dell'applicazione di Gauss in coordinate locali

Sia S una superficie regolare e sia (U, X) una carta locale. Nell'aperto $X(U)$ definiamo il campo normale

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subseteq S$ una curva regolare, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, e sia $\alpha'(0) = X_u u' + X_v v' \in T_{\alpha(0)} S$ un vettore tangente. Allora, per la (9.1), $dN(\alpha') = N_u u' + N_v v'$. I vettori N_u, N_v sono tangenti alla superficie S (si può anche osservare che essendo N unitario le sue derivate sono perpendicolari, quindi tangenti alla superficie) per cui esistono delle funzioni a_{ij} , $i, j = 1, 2$, tali che

$$\begin{cases} -N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ -N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{cases} \quad (10.1)$$

Segue che

$$A(\alpha') = -dN(\alpha') = -N_u u' - N_v v' = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v$$

che, in forma matriciale rispetto alla base coordinata $\{X_u, X_v\}$, si scrive

$$A \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}.$$

Quindi l'operatore di forma in coordinate locali è determinato dalla matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Per calcolare tale matrice scriviamo la seconda forma fondamentale in coordinate locali. Si ha

$$\begin{aligned} II(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u, v) u'^2 + 2f(u, v) u' v' + g(u, v) v'^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{cases} e(u, v) = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f(u, v) = -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle \\ g(u, v) = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{cases}$$

Le funzioni e, f, g sono chiamate *coefficienti della seconda forma fondamentale*. Diversamente da quanto accade per il determinante della matrice (7.1), della prima forma fondamentale, per la matrice

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

il determinante $eg - f^2$ può assumere qualunque valore reale sia positivo che negativo o nullo. Moltiplicando scalarmente le equazioni in (10.1) opportunamente per X_u e per X_v si trova

$$\begin{cases} e = -\langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ g = -\langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \\ f = -\langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ f = -\langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F. \end{cases}$$

che, in forma matriciale, diventa

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Moltiplicando la (10.2) a destra per l'inversa della matrice della prima forma fondamentale, si ottiene

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

da cui, svolgendo i conti e operando la trasposta,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

Prendendo il determinante e la traccia della (10.3) si ottengono le utili formule

$$K = \det A = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \text{trace} A = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (10.4)$$

Osservazione 10.1 Per calcolare i coefficienti della seconda forma fondamentale si tenga conto delle seguenti identità

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned} \quad (10.5)$$

■ **Esempio 10.1 — Curvature del toro di rotazione.** Con riferimento all'Esercizio 4.1, sia

$$\begin{aligned} X: U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \vartheta) &\mapsto ((a + r \cos \varphi) \cos \vartheta, (a + r \cos \varphi) \sin \vartheta, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

la parametrizzazione del toro di rotazione ottenuto ruotando la circonferenza $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, $a > r > 0$, del piano xz , parametrizzata da $(a + r \cos \varphi, 0, r \sin \varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, attorno all'asse z . Con un calcolo diretto, utilizzando le (10.5), si ottiene

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r \cos \varphi)^2$$

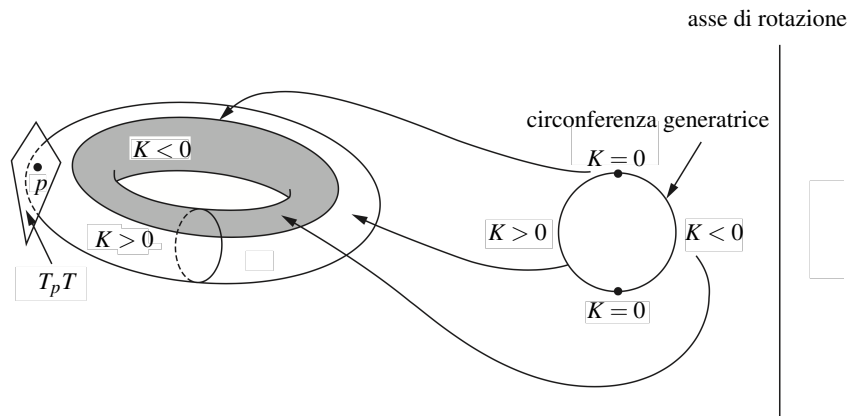
e

$$e = r, \quad f = 0, \quad g = \cos \varphi (a + r \cos \varphi).$$

Segue che la curvatura di Gauss e la curvatura media sono

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos(\varphi)}{r(a + r \cos \varphi)}, \quad H = \frac{a + 2r \cos(\varphi)}{2r(a + r \cos \varphi)}.$$

Dall'espressione della curvatura di Gauss si trova che $K = 0$ lungo i paralleli $\varphi = \pi/2$ e $\varphi = 3\pi/2$; i punti di tali paralleli sono punti parabolici (infatti in tali punti $H = 1/2r \neq 0$). Nella regione del toro data da $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, K è negativo; i punti in questa regione sono quindi punti iperbolici. Nella regione data da $0 < \varphi < \pi/2$ e $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$, la curvatura è positiva e i punti sono punti ellittici. Si veda la figura sotto.



■

10.1 Curvatura di Gauss e posizione di una superficie rispetto al piano tangente

L'Esempio 10.1 del toro di rotazione mostra il seguente fatto. In un punto nella parte esterna del toro dove la curvatura di Gauss è positiva il piano tangente $T_p S$ divide lo spazio $\mathbb{R}^3$ in due semispazi e la superficie risulta contenuta in uno dei due semispazi. Se invece consideriamo un punto nella parte interna, dove la curvatura è negativa, un qualsiasi intorno di p della superficie piccolo a piacere non risulta mai appartenere ad uno dei due semispazi individuati da $T_p S$ ma contiene punti di entrambi i semispazi.

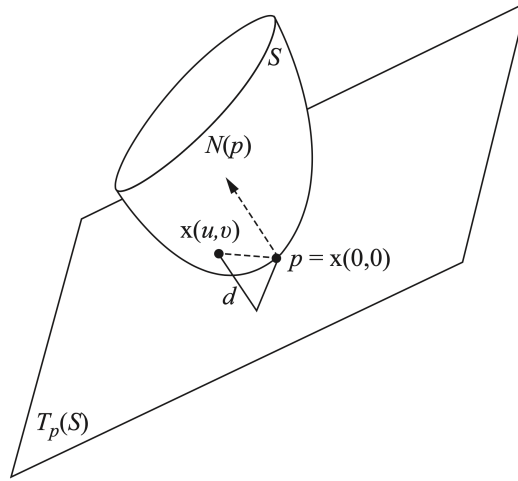
Questo fatto osservato nel toro di rotazione ha valenza generale come mostrato nella prossima proposizione.

Proposizione 10.1 Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$ un punto ellittico. Allora esiste un intorno aperto $V \subseteq S$ di p tale che tutti i punti di V appartengono allo stesso semispazio individuato da $T_p S$. Se invece $p \in S$ è iperbolico allora qualunque intorno aperto di p contiene punti di entrambi i semispazi individuati da $T_p S$.

Dimostrazione. Sia (U, X) una carta locale con $p \in X(U)$. Supponiamo che $(0, 0) \in U$ e che $p = X(0, 0)$. Sia $q = X(u, v) \in X(U)$ un altro punto dell'aperto coordinato $X(U)$. Definiamo la distanza con segno del punto q dal piano tangente $T_p S$ come

$$d(q, T_p S) = d = \langle q - p, N(p) \rangle = \langle X(u, v) - X(0, 0), N(0, 0) \rangle \quad (10.6)$$

si veda la figura sotto



Sviluppando con la serie di Taylor sino al secondo ordine la funzione vettoriale $X(u, v)$, in un intorno di $(0, 0)$, si trova

$$X(u, v) = X(0, 0) + X_u(0, 0)u + X_v(0, 0)v + \frac{1}{2} (X_{uu}(0, 0)u^2 + 2X_{uv}(0, 0)uv + X_{vv}(0, 0)v^2) + R$$

dove

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R}{u^2 + v^2} = 0.$$

Sostituendo nella (10.6) si ha

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} \left(\langle X_{uu}(0, 0), N(0, 0) \rangle u^2 + 2 \langle X_{uv}(0, 0), N(0, 0) \rangle uv + \langle X_{vv}(0, 0), N(0, 0) \rangle v^2 \right) \\ &\quad + \langle R, N(0, 0) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (e(0, 0)u^2 + 2f(0, 0)uv + g(0, 0)v^2) + \bar{R} \\ &= \frac{1}{2} II_p(w) + \bar{R} \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $w = uX_u(0, 0) + vX_v(0, 0)$ un vettore del piano tangente $T_p S$ le cui componenti sono date dalle coordinate del punto q . Siccome $\|w\|^2$ tende a zero come $u^2 + v^2$ si ha

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}}{\|w\|^2} = 0.$$

Supponiamo adesso che p sia un punto ellittico. Dalla (10.4) si ha che $(eg - f^2)_p > 0$ da cui segue che la forma quadratica $II_p(w)$ ha sempre lo stesso segno¹. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che $II_p(w) > 0$ per ogni $w \in T_p S$, $\|w\| \neq 0$. Adesso $II_p(w)$ tende a zero quando w tende al vettore nullo con la stessa velocità con cui $\|w\|^2$ tende a zero, mentre $\bar{R}$ tende a zero più velocemente. L'ultima osservazione implica che esiste un intorno $\bar{V}$ di $(0, 0)$ con $\frac{1}{2} II_p(w) + \bar{R} > 0$ per ogni $(u, v) \in \bar{V}$. Quindi i punti dell'aperto $V = X(\bar{V})$ hanno distanza positiva dal piano tangente e si trovano nello stesso semispazio individuato da $T_p S$.

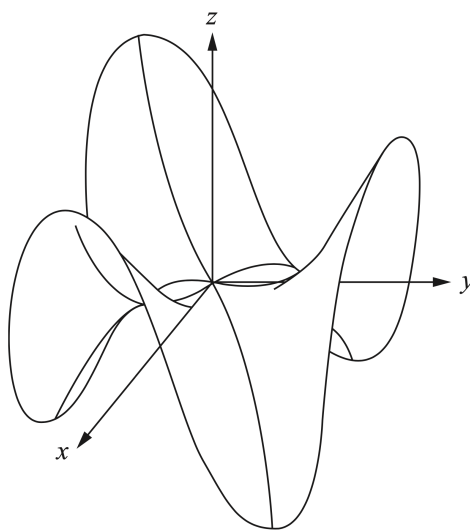
¹Se $eu^2 + 2fuv + gv^2$ è una forma quadratica allora il discriminante è $\Delta = f^2 - eg$ da cui se $\Delta < 0$ la forma quadratica non si annulla mai mentre se $\Delta > 0$ la forma quadratica si annulla e presenta sia punti in cui è positiva che punti in cui è negativa. Si noti che il segno di Δ è opposto a quello della curvatura di Gauss.

Se $p \in S$ è un punto iperbolico esistono $w_1, w_2 \in T_p S$ con $II_p(w_1) > 0$ e $II_p(w_2) < 0$. Segue che in tutti i punti $tw_1, t \in (0, 1)$, $II_p(tw_1) > 0$ e in tutti i punti $tw_2, t \in (0, 1)$, $II_p(tw_2) < 0$. Quindi per ogni intorno $\tilde{V}$ di $(0, 0)$ esistono punti in cui $II_p(w) > 0$ e punti in cui $II_p(w) < 0$, cioè esistono punti in $V = X(\tilde{V})$ in cui $d > 0$ e punti in cui $d < 0$. ■

■ **Esempio 10.2** Si consideri la superficie parametrizzata

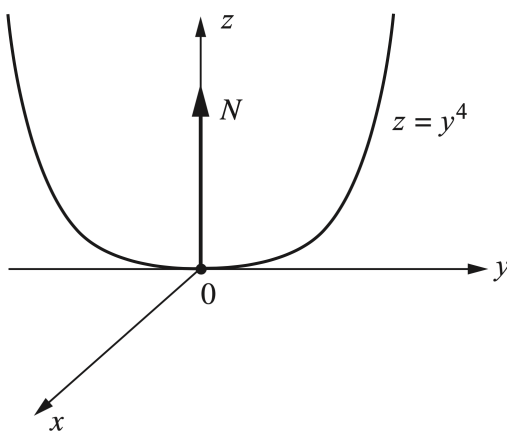
$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

La superficie è un grafico la cui forma è mostrata nella figura seguente



Un calcolo diretto mostra che nell'origine $X(0, 0)$ i coefficienti della seconda forma fondamentale e, f, g sono nulli. Quindi l'origine è un punto piano isolato. Si può però osservare dalla figura che il piano tangente nell'origine divide la superficie in più parti appartenenti ad entrambi i semispazi. Questa superficie, per la sua forma, prende il nome di *sella di scimmia*. ■

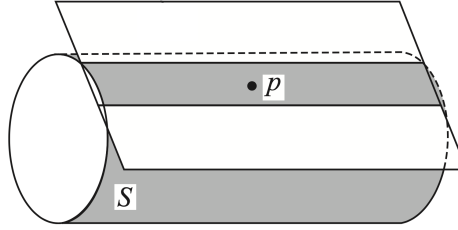
■ **Esempio 10.3** Considerare la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva $z = y^4$ attorno all'asse z , si veda la figura.



Osserviamo che la curvatura della curva $z = y^4$ in $p = (0, 0, 0)$ è uguale a zero. Inoltre, poiché il piano xy è un piano tangente alla superficie in p , il vettore normale $N(p)$ è parallelo all'asse z . Pertanto, qualsiasi sezione normale in p è ottenuta dalla curva $z = y^4$ per rotazione. Segue che le

curvature normali in p sono zero per qualsiasi direzione, quindi $A_p \equiv 0$ e p è un punto piano. Si noti che in questo caso l'origine è un punto piano isolato ma il piano tangente lascia la superficie da una parte. ■

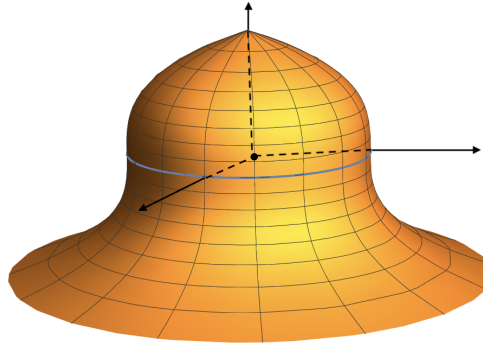
■ **Esempio 10.4** Nel caso del cilindro, i cui punti sono parabolici, il piano tangente in ogni punto lascia la superficie da una parte con l'eccezione di una retta che appartiene al piano stesso.



■ **Esempio 10.5** Esistono superfici con punti parabolici il cui piano tangente separa la superficie. Ad esempio, per la superficie di rotazione

$$X(\vartheta, v) = ((1 - v^3) \cos \vartheta, (1 - v^3) \sin \vartheta, v), \quad (\vartheta, v) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1),$$

rappresentata nella figura sotto



i punti del parallelo $v = 0$ sono parabolici (verificare per esercizio) ma il piano tangente divide la superficie in due parti, come si può vedere dalla figura. ■

■ **Esempio 10.6 — Grafici in $\mathbb{R}^3$.** Sia S una superficie data come grafico di una funzione $\xi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Una parametrizzazione di S è

$$X(u, v) = (u, v, \xi(u, v)).$$

In questo caso i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale diventano

$$E = 1 + \xi_u^2, \quad F = \xi_u \xi_v, \quad G = 1 + \xi_v^2$$

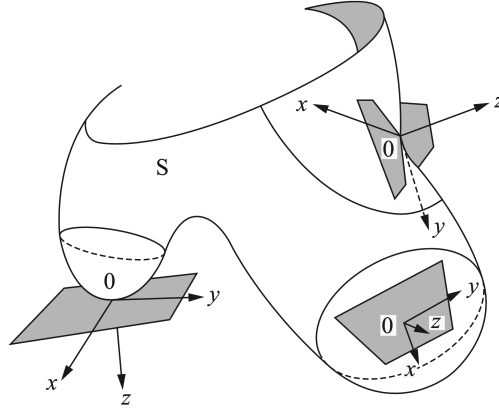
$$e = \frac{\xi_{uu}}{\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}}, \quad f = \frac{\xi_{uv}}{\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}}, \quad g = \frac{\xi_{vv}}{\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}}$$

La curvatura di Gauss e la curvatura media sono

$$K = \frac{\xi_{uu}\xi_{vv} - \xi_{uv}^2}{(1 + \xi_u^2 + \xi_v^2)^2}, \quad H = \frac{(1 + \xi_v^2)\xi_{uu} - 2\xi_u\xi_v\xi_{uv} + (1 + \xi_u^2)\xi_{vv}}{2(1 + \xi_u^2 + \xi_v^2)^{3/2}}.$$

Sia adesso S una qualunque superficie regolare. Localmente S è il grafico di una funzione differenziabile. Dato un punto $p \in S$ possiamo scegliere il sistema di riferimento di $\mathbb{R}^3$ in modo che

l'origine O coincida con il punto p e l'asse z sia diretto lungo la normale di S in p (quindi, il piano xy coincide con $T_p S$). Ne consegue che un intorno di p può essere rappresentato nella forma $X(x, y) = (x, y, \xi(x, y))$, $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, dove U è un insieme aperto mentre ξ è una funzione differenziabile con $\xi(0, 0) = 0$. Inoltre, poiché $X_x(0, 0) = (1, 0, \xi_x(0, 0))$ e $X_y(0, 0) = (0, 1, \xi_y(0, 0))$ sono vettori tangenti, segue che $\xi_x(0, 0) = 0$, $\xi_y(0, 0) = 0$. Si veda la figura seguente



La seconda forma fondamentale di S in p applicata al vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ diventa, in questo caso,

$$II_p(x, y) = \xi_{xx}(0, 0)x^2 + 2\xi_{xy}(0, 0)xy + \xi_{yy}(0, 0)y^2.$$

che rappresenta l'hessiano di ξ in $(0, 0)$. ■

10.2 Punti ombelicali, curve principali e curve asintotiche

Definizione 10.1 Sia S una superficie regolare. Un punto $p \in S$ si dice *ombelicale* se $k_1(p) = k_2(p)$. La superficie S si dice *totalmente ombelicale* se tutti i punti sono ombelicali.

Si osservi subito che se una superficie è ombelicale in un punto p allora l'operatore di forma è un multiplo dell'identità, cioè $A = \lambda \text{Id}$. Segue che in un punto ombelicale

$$H = \frac{1}{2} \text{trace} A = \lambda$$

da cui $A = H \text{Id}$.

Esempi di superfici totalmente ombelicali sono il piano e la sfera.

Osservazione 10.2 Dall'espressione locale (10.4) della curvatura di Gauss e della curvatura media si deduce che queste sono due funzioni differenziabili definite sulla superficie S . Le curvatures principali, date come autovalori dell'operatore di forma, sono soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - (\text{trace} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 2H\lambda + K = 0,$$

cioè

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

L'ultima equazione garantisce che le curvatures principali siano funzioni continue dappertutto e siano differenziabili in un intorno di ogni punto $p \in S$ tale che $H^2(p) - K(p) \neq 0$. Con un calcolo diretto si trova

$$H^2(p) - K(p) = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} - k_1 k_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}$$

da cui segue che le curvature principali sono funzioni differenziabili in un intorno di ogni punto $p \in S$ che non sia ombelicale.

■ **Esempio 10.7** Con riferimento all'Esempio 10.2 e all'Esempio 10.3 si noti che in questi casi l'origine è un punto ombelicale isolato. ■

Diamo le seguenti definizioni.

Definizione 10.2 Sia S una superficie regolare. Una curva $\alpha : I \rightarrow S$ è detta:

1. *principale* se il vettore α' è una direzione principale per ogni $t \in I$, cioè se $A(\alpha') = \lambda(t)\alpha'$ per ogni $t \in I$;
2. *asintotica* se α' è una *direzione asintotica* per ogni $t \in I$, cioè se $II_{\alpha(t)}(\alpha') = 0$ per ogni $t \in I$.

Segue subito dalla definizione che in un punto ellittico non ci sono direzioni asintotiche (infatti le curvature principali hanno lo stesso segno e, di conseguenza, le curvature normali hanno tutte lo stesso segno e non si possono annullare).

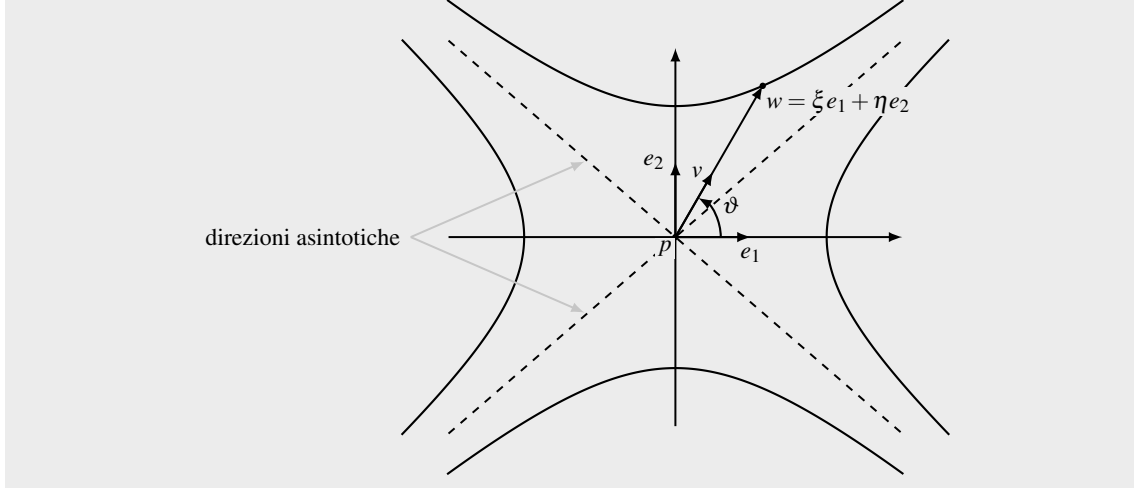
Osservazione 10.3 Un'utile interpretazione geometrica delle direzioni asintotiche è data dall'*indicatrice di Dupin*, che ora descriveremo. Sia p un punto in S . L'indicatrice di Dupin in p è l'insieme dei vettori w di $T_p S$ tali che $II_p(w) = \pm 1$. Per scrivere le equazioni dell'indicatrice di Dupin in una forma più conveniente, siano (ξ, η) le coordinate cartesiane di $T_p S$ nella base ortonormale positiva $\{e_1, e_2\}$, dove e_1 ed e_2 sono autovettori dell'operatore di forma, cioè direzioni principali. Dato $w \in T_p S$, siano (ρ, ϑ) le coordinate polari definite da $w = \rho v$, con $\|v\| = 1$ e $v = e_1 \cos \vartheta + e_2 \sin \vartheta$, se $\rho \neq 0$. Dalla formula di Eulero (9.3), si trova

$$\pm 1 = II_p(w) = \rho^2 II_p(v) = \rho^2 (k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta) = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2,$$

dove $w = \xi e_1 + \eta e_2$. Pertanto, le coordinate (ξ, η) di un punto dell'indicatrice di Dupin soddisfano l'equazione

$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1$$

dalla quale segue che l'indicatrice di Dupin è unione di due coniche in $T_p S$. Per un punto ellittico, l'indicatrice di Dupin è un'ellisse (k_1 e k_2 hanno lo stesso segno); quest'ellisse degenera in un cerchio se il punto è un punto ombelicale non piano ($k_1 = k_2 \neq 0$). Per un punto iperbolico k_1 e k_2 hanno segni opposti, l'indicatrice di Dupin è quindi costituita da due iperboli con una coppia comune di rette asintotiche (si veda la figura sotto). Lungo le direzioni degli asintoti la curvatura normale è zero; sono quindi direzioni asintotiche. Ciò giustifica la terminologia e mostra che un punto iperbolico ha esattamente due direzioni asintotiche. In un punto parabolico vi è un'unica direzione asintotica mentre in un punto piano tutte le direzioni sono asintotiche.



L'espressione della seconda forma fondamentale in coordinate locali è particolarmente utile per lo studio delle curve asintotiche e delle curve principali. Iniziamo con le direzioni asintotiche. Sia $X(u, v)$ una parametrizzazione di una superficie regolare S e sia $p \in X(U)$. Siano $e(u, v) = e$, $f(u, v) = f$, e $g(u, v) = g$ i coefficienti della seconda forma fondamentale in questa parametrizzazione. Una curva regolare parametrizzata $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, è una curva asintotica se $II(\alpha'(t)) = 0$ per ogni $t \in I$, cioè se

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0, \quad \forall t \in I \quad (10.7)$$

L'equazione (10.7), chiamata *equazione differenziale delle curve asintotiche*, ci permette di dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 10.2 Condizione necessaria e sufficiente affinché le curve coordinate di una parametrizzazione X di un intorno di un punto iperbolico $p \in S$ di una superficie regolare S siano le uniche curve asintotiche è che $e = g = 0$.

Dimostrazione. Se in un intorno di p le curve coordinate $u = \text{const.}$ e $v = \text{const.}$ sono curve asintotiche, cioè soddisfano la (10.7), otteniamo che in tale intorno $e = g = 0$. Viceversa, si supponga che $e = g = 0$ in un intorno di p . Essendo il punto p iperbolico esiste un sotto intorno nel quale $f \neq 0$. Allora l'Equazione 10.7 diventa $fu'v' = 0$ con $f \neq 0$, che è chiaramente soddisfatta solo dalle curve coordinate. ■

Considereremo ora le direzioni principali. Con le notazioni già stabilite una curva regolare parametrizzata $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, è una curva principale se

$$A(\alpha'(t)) = -dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t), \quad \forall t \in I.$$

Cioè, utilizzando la (10.3), se

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \lambda(t) \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{eG - fF}{EG - F^2} u'(t) + \frac{fG - gF}{EG - F^2} v'(t) = \lambda(t) u'(t) \\ \frac{fE - eF}{EG - F^2} u'(t) + \frac{gE - fF}{EG - F^2} v'(t) = \lambda(t) v'(t) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione del sistema sopra per $v'(t)$, la seconda per $u'(t)$, e prendendo la differenza si ottiene la condizione

$$(fE - eF)u'^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)v'^2 = 0 \quad (10.9)$$

che può essere riscritta, in modo più simmetrico, come

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

la quale prende il nome di *equazione differenziale delle curve principali*. Abbiamo il seguente risultato

Proposizione 10.3 Condizione necessaria e sufficiente affinché le curve coordinate di una parametrizzazione X in un intorno coordinato di $p \in S$, che non contiene punti ombelicali, siano le uniche curve principali è che $F = f = 0$.

Dimostrazione. Se le curve coordinate $u = \text{const.}$ e $v = \text{const.}$ sono principali in un intorno coordinato di un punto p , allora i campi coordinati X_u e X_v sono direzioni principali di un aperto privo di punti ombelicali, ed essendo A simmetrico, segue che $0 = \langle X_u, X_v \rangle = F$. La condizione (10.9), dovendo essere verificata in un intorno di p per entrambe le curve $u = \text{const.}$ e $v = \text{const.}$, restituisce

$$\begin{cases} fE = 0 \\ fG = 0. \end{cases}$$

Poiché $EG - F^2 = EG \neq 0$, si conclude che $f = 0$ in tale intorno. Viceversa, se $F = f = 0$ allora, dalla (10.9), una curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ è principale se e solo se

$$(gE - eG)u'v' = 0. \quad (10.10)$$

Utilizzando la (10.3) si trova, per $F = f = 0$,

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}.$$

Quindi, se non vi sono punti ombelicali, cioè se $k_2 - k_1 = (gE - eG)/(EG) \neq 0$, la (10.10) è soddisfatta se e solo se $u' = 0$ o $v' = 0$ cioè se e solo se α è una curva coordinata. ■

10.3 Problemi proposti

Problema 10.1 Dimostrare che in un punto iperbolico, le direzioni principali bisecano le direzioni asintotiche. Dove una direzione v si dice asintotica se $II(v) = 0$.

Problema 10.2 Mostrare che la curvatura media H in $p \in S$ è data da

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta,$$

dove $k_n(\theta)$ è la curvatura normale in p lungo una direzione che forma un angolo θ con una direzione fissata.

Problema 10.3 Mostrare che la somma delle curvature normali per ogni coppia di direzioni ortogonali, in un punto $p \in S$, è costante.

Problema 10.4 Descrivere la regione della sfera coperta dall'applicazione normale di Gauss quando S è una delle seguenti superfici:

1. il Paraboloide di rotazione $z = x^2 + y^2$;

2. l'Iperboloide ad una falda di rotazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
3. il Catenoide $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.

Problema 10.5 Supponiamo che il piano osculatore di una curva principale $C \subset S$, che non è in nessun punto tangente ad una direzione asintotica, formi un angolo costante con il piano tangente di S lungo C . Dimostrare che C è una curva piana.

Problema 10.6 Supponiamo che S_1 e S_2 si intersechino lungo una curva C regolare e formino un angolo $\theta(p)$, $p \in C$. Supponiamo che C sia una curva principale di S_1 . Dimostrare che $\theta(p)$ è costante se e solo se C è una curva principale di S_2 .

Problema 10.7 Mostrare che se $H = 0$ su S e S non ha punti planari, allora l'applicazione di Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ soddisfa la seguente proprietà:

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle = -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle$$

per tutti i $p \in S$ e tutti i $w_1, w_2 \in T_p S$.

Problema 10.8 Sia C una curva asintotica di una superficie S . Si supponga che la curvatura k di C sia diversa da zero in tutti i punti. Dimostrare

$$\tau^2 = -K$$

dove K è la curvatura di Gauss della superficie S .

Problema 10.9 Mostrare che nell'origine $(0, 0, 0)$ del paraboloide iperbolico $z = axy$, $K = -a^2$ e $H = 0$.

Problema 10.10 Determinare le curve principali e le curve asintotiche dell'elicoide

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

e mostrare che la sua curvatura media è zero.

Problema 10.11 Determinare le curve asintotiche del Catenoide

$$x(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v).$$

Problema 10.12 Considerare la superficie parametrizzata (superficie di Enneper)

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

1. Calcolare i coefficienti della prima forma fondamentale e verificare che X è isoterma.
2. Calcolare i coefficienti della seconda forma fondamentale e le curvature principali.
3. Mostrare che le curve $u + v = \text{costante}$ e $u - v = \text{costante}$ sono curve asintotiche.

Problema 10.13 Calcolare la curvatura della parametrizzazione locale del Nastro di Moebius descritta a lezione.

Problema 10.14 Determinare i punti ombelicali dell'ellissoide

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1 \quad 0 < a_1 < a_2 < a_3.$$

Aiuto: Un punto p è ombelicale se e solo se per ogni vettore tangente $v = \alpha'(0) \in T_p S$ si ha $\det(N'(0), N(0), \alpha'(0)) = 0$. Se $N_1 = fN$ dove N è il campo normale e f una funzione, allora $\det(N'_1, N_1, \alpha') = f^2 \det(N', N, \alpha')$. Per l'ellissoide si scelga $N_1 = (x_1/a_1, x_2/a_2, x_3/a_3)$ così che $N'_1(0) = (x'_1(0)/a_1, x'_2(0)/a_2, x'_3(0)/a_3)$, con $v = (v_1, v_2, v_3) = \alpha'(0) = (x'_1(0), x'_2(0), x'_3(0))$. Allora

$$\det(N'_1(0), N_1(0), \alpha'(0)) \frac{x_3}{a_3} = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \{ [(a_3 - a_2)x_1 v_2 - (a_3 - a_1)x_2 v_1](-x_3 v_3/a_3) + v_1 v_2 (a_1 - a_2)x_3^2/a_3 \}.$$

Sostituendo $-x_3v_3/a_3 = x_1v_1/a_1 + x_2v_2/a_2$ nella precedente si ottiene che i punti ombelicali (x_1, x_2, x_3) , con $x_3 \neq 0$, devono soddisfare alla condizione

$$-v_1^2x_1x_2(a_3 - a_1)/a_1 + v_2^2x_1x_2(a_3 - a_2)/a_2 + v_1v_2A = 0$$

per ogni v_1, v_2 dove

$$A = x_1^2(a_3 - a_2)/a_1 - x_2^2(a_3 - a_1)/a_2 - x_3^2(a_2 - a_1)/a_3.$$

Segue che $p = (x_1, x_2, x_3)$, $x_3 \neq 0$, è ombelicale se

$$x_1x_2 = 0 \quad e \quad A = 0$$

Se $0 < a_1 < a_2 < a_3$ le uniche soluzioni sono

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1^2(a_3 - a_2)/a_1 = x_3^2(a_2 - a_1)/a_3 \\ x_1^2/a_1 + x_3^2/a_3 = 1 \end{cases}$$

cioè

$$x_1 = \pm \sqrt{a_1(a_2 - a_1)/(a_3 - a_1)}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \pm \sqrt{a_3(a_3 - a_2)/(a_3 - a_1)}$$

Si ottengono quindi 4 punti ombelicali. Ripetere il ragionamento per i punti (x_1, x_2, x_3) con $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$ e verificare se si trovano altri punti ombelicali.

11. Alcuni teoremi di rigidità

Un teorema di rigidità in geometria differenziale è un risultato che, sotto certe ipotesi, garantisce che una superficie sia solo di un certo tipo (quindi rigida).

Il seguente teorema è un esempio notevole di teorema di rigidità che illustra molto bene la tipologia di tali risultati. Inoltre la sua dimostrazione è particolarmente istruttiva su come si debba procedere nella prova di tali risultati.

Teorema 11.1 Sia S una superficie regolare connessa totalmente ombelicale. Allora S è contenuta (cioè un aperto) in un piano o in una sfera.

Dimostrazione. Sia $p \in S$ e sia (U, X) una carta locale con $p \in X(U)$. Supponiamo, senza ledere la generalità, che U sia connesso (se non fosse basterebbe prendere la componente connessa che contiene $X^{-1}(p)$). Sia $V = X(U) \subseteq S$. Per ipotesi tutti i punti di V sono ombelicali quindi per ogni $w \in T_q S$, $w = a_1 X_u + a_2 X_v$, si ha

$$A(w) = -\lambda(q)w, \quad (11.1)$$

dove $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che teoricamente varia al variare di $q \in V$. Mostriamo che λ è invece costante. Dalla linearità di dN_q si ha

$$A(w) = -dN_q(a_1 X_u + a_2 X_v) = -a_1 N_u - a_2 N_v$$

la quale, assieme alla (11.1), implica

$$-a_1 N_u - a_2 N_v = -\lambda(a_1 X_u + a_2 X_v), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Segue che

$$\begin{cases} N_u = \lambda X_u \\ N_v = \lambda X_v \end{cases} \quad (11.2)$$

Derivando la prima di (11.2) rispetto a v e la seconda rispetto a u , si trova

$$\begin{cases} N_{uv} = \lambda_v X_u + \lambda X_{uv} \\ N_{vu} = \lambda_u X_v + \lambda X_{vu} \end{cases} \quad (11.3)$$

le quali implicano $\lambda_v X_u - \lambda_u X_v = 0$ ed essendo X_u e X_v linearmente indipendenti si conclude che $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Quindi λ è costante in un intorno di un qualsiasi punto $q \in V$, cioè λ è localmente costante. Essendo V connesso si conclude che λ è costante su tutto V . Si presentano due casi

$\lambda = 0$ – In questo caso dalla (11.2) segue che $N_u = N_v = 0$ da cui N è un vettore costante. Inoltre

$$\langle X, N \rangle_u = \langle X_u, N \rangle = 0, \quad \langle X, N \rangle_v = \langle X_v, N \rangle = 0$$

quindi $\langle X, N \rangle = d = \text{costante}$ il che implica che V è contenuto nel piano affine di equazione cartesiana $\langle P, N \rangle = d$.

$\lambda \neq 0$ – In tale circostanza si consideri la funzione vettoriale

$$X - \frac{1}{\lambda} N.$$

Derivando la relazione precedente e tenendo in considerazione la (11.2), si trova

$$\begin{cases} (X - \frac{1}{\lambda} N)_u = X_u - \frac{1}{\lambda} N_u = 0 \\ (X - \frac{1}{\lambda} N)_v = X_v - \frac{1}{\lambda} N_v = 0. \end{cases} \quad (11.4)$$

Quindi

$$X - \frac{1}{\lambda} N = C, \quad C \in \mathbb{R}^3$$

da cui

$$\|X - C\|^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

L'ultima condizione mostra che i punti di V appartengono ad una sfera di centro C e raggio $R = 1/|\lambda|$.

Fin qui abbiamo mostrato che per ogni punto $p \in S$ esiste un aperto coordinato V contenuto in un piano o in una sfera. Per concludere il teorema dobbiamo mostrare che tutti i punti di S appartengono allo stesso piano o alla stessa sfera. Questo è il passaggio “globale” del teorema dove bisogna utilizzare che S è connessa. Per ogni $p \in S$ sia V_p l'aperto tale che $V_p \subseteq S_p$ dove S_p è un piano o una sfera.

passo 1 – se per $p, q \in S$ si ha $V_p \cap V_q \neq \emptyset$ allora $S_p = S_q$. Infatti

$$V_p \cap V_q \subseteq S_p \cap S_q \cap S.$$

Se, per assurdo, $S_p \neq S_q$ allora

$$S_p \cap S_q = \begin{cases} \text{una circonferenza} \\ \text{una retta} \\ \text{un punto} \end{cases}$$

Ma essendo $V_p \cap V_q \neq \emptyset$ segue che $V_p \cap V_q$ è un aperto di S ed esisterà un aperto di $V_p \cap V_q$ omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^2$ ma quest'ultimo non può essere omeomorfo ad un aperto dei tre possibili insiemi $S_p \cap S_q$. Quindi $S_p = S_q$.

passo 2 – Sia $a \in S$ un punto e definiamo

$$A = \{p \in S : S_p = S_a\}.$$

Dimostriamo che $S = A$. Dalla connessione di S , essendo $A \neq \emptyset$ ($a \in A$), basta verificare che A è aperto e chiuso. Mostriamo che A è un aperto. Sia $p \in A$. Allora $V_p \subseteq S_p = S_a$. Sia adesso $q \in V_p$, allora $q \in V_q \cap V_p$. Segue dal passo 1 che $S_q = S_p = S_a$, quindi $q \in A$, cioè $V_p \subseteq A$ ed A è quindi aperto. Per dimostrare che A è chiuso basta verificare che $S \setminus A$ è aperto (esercizio). ■

Teorema 11.2 Sia S una superficie regolare compatta e orientabile. Allora esiste un punto $p \in S$ ellittico.

Dimostrazione. Sia $p_o \in \mathbb{R}^3$, $p_o \notin S$, un punto fissato e si consideri la funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(p) = \|p - p_o\|^2 = \langle p - p_o, p - p_o \rangle$. La funzione f è differenziabile, inoltre se $v \in T_p S$, si trova

$$df_p(v) = \frac{d}{dt} \langle \alpha(t) - p_o, \alpha(t) - p_o \rangle|_{t=0} = 2\langle v, p - p_o \rangle,$$

dove $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una curva con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Segue che un punto $p \in S$ è un punto critico per f se e solo se $(p - p_o) \perp T_p S$.

Adesso, la funzione f è continua in un compatto S , quindi ammette massimo e minimo. Sia p il punto in cui f ha un massimo (minimo) e sia $v \in T_p S$. Allora la funzione $f(\alpha(t))$ ha un massimo (minimo) in $t = 0$, dove $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una curva con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Segue che $df_p(v) = 0$ per ogni $v \in T_p S$, cioè p è un punto critico. Quindi $p - p_o$ è parallelo a $N(p)$ e possiamo supporre che esista $\lambda > 0$ tale che $p - p_o = -\lambda N(p)$. Se λ fosse negativo basterebbe cambiare l'orientazione di S .

Per una funzione $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$, in un punto critico $p \in V$ di f , la forma quadratica *hessiana* è l'applicazione $(d^2 f)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per $v \in T_p S$, da

$$(d^2 f)_p(v) = \frac{d^2}{dt^2} (f \circ \alpha)|_{t=0}$$

dove $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una curva con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Se p è un punto di massimo (minimo) per f allora $t = 0$ è un massimo (minimo) locale per $f \circ \alpha$ da cui $(d^2 f)_p(v) \leq 0$ ($(d^2 f)_p(v) \geq 0$) per ogni $v \in T_p S$.

Calcolando l'hessiano della funzione $f(p) = \|p - p_o\|^2$ si trova

$$\begin{aligned} (d^2 f)_p(v) &= \frac{d^2}{dt^2} \langle \alpha(t) - p_o, \alpha(t) - p_o \rangle|_{t=0} = 2 \frac{d}{dt} (\langle \alpha'(t), \alpha(t) - p_o \rangle)|_{t=0} \\ &= 2\langle \alpha''(0), p - p_o \rangle + 2\langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'ultima equazione $p - p_o = -\lambda N(p)$ si ottiene

$$(d^2 f)_p(v) = 2\langle v, v \rangle - 2\lambda \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = 2\langle v, v \rangle - 2\lambda II_p(v).$$

Poiché p è un punto di massimo segue che $(d^2 f)_p(v) \leq 0$ per ogni $v \in T_p S$ ed, in particolare, per le direzioni principali e_1, e_2 per le quali $A(e_i) = k_i e_i$, $i = 1, 2$. Si trova quindi

$$0 \geq (d^2 f)_p(e_i) = 2\langle e_i, e_i \rangle - 2\lambda II_p(e_i) = 2\langle e_i, e_i \rangle - 2\lambda \langle A(e_i), e_i \rangle = 2(1 - \lambda k_i), \quad i = 1, 2.$$

L'ultima disuguaglianza implica

$$1 - \lambda k_1 \leq 0, \quad 1 - \lambda k_2 \leq 0$$

da cui

$$k_1 \geq \frac{1}{\lambda}, \quad k_2 \geq \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad K(p) = k_1 k_2 \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0.$$

■

Osservazione 11.1 Nel seguito per una data superficie regolare connessa orientabile S assumiamo che le funzioni curvatures principali k_1 e k_2 siano sempre scelte, fissata l'orientazione, in modo tale che $k_1(p) \leq k_2(p)$ per ogni $p \in S$. Tale scelta è possibile prendendo

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}.$$

Ricordiamo che le funzioni k_1 e k_2 così definite sono continue su tutta S .

Teorema 11.3 — Teorema di Hilbert. Sia S una superficie orientata e siano $k_1 \leq k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ le corrispondenti funzioni curvature principali. Se, in un punto $p \in S$, le seguenti tre condizioni sono simultaneamente soddisfatte

1. la curvatura di Gauss in p è positiva,
2. k_1 ha un minimo locale in p ,
3. k_2 ha un massimo locale in p ,

allora p è un punto ombelicale.

Dimostrazione. Sia $p \in S$ il punto che soddisfa le condizioni del Teorema di Hilbert e fissiamo in p l'origine di $\mathbb{R}^3$. Scegliamo come riferimento di $\mathbb{R}^3$ $\{e_1, e_2, N_p\}$ dove e_1, e_2 sono le direzioni principali in p e N_p è la normale in p . In questo riferimento si ha

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad N(p) = (0, 0, 1)$$

Come nella costruzione dell'Esempio 10.6 un intorno di p può essere parametrizzato da $X(u, v) = (u, v, \xi(u, v))$, $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, dove U è un insieme aperto e ξ è una funzione differenziabile con $\xi(0, 0) = 0, \xi_u(0, 0) = 0, \xi_v(0, 0) = 0$. Inoltre in U

$$e = \frac{\xi_{uu}}{\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}}, \quad f = \frac{\xi_{uv}}{\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}}, \quad g = \frac{\xi_{vv}}{\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}}$$

e nel punto p

$$II_p(x, y) = \xi_{uu}(0, 0)x^2 + 2\xi_{uv}(0, 0)xy + \xi_{vv}(0, 0)y^2.$$

Siccome $X_u = e_1 = 1e_1 + 0e_2$ e $X_v = e_2 = 0e_1 + 1e_2$ sono direzioni principali in $(0, 0) \in U$ segue che $k_1(p) = II_p(1, 0) = \xi_{uu}(0, 0)$, $k_2(p) = II_p(0, 1) = \xi_{vv}(0, 0)$ ed utilizzando la Proposizione 9.1 si conclude che

$$k_1(p) = \xi_{uu}(0, 0), \quad \xi_{uv}(0, 0) = 0, \quad k_2(p) = \xi_{vv}(0, 0).$$

Siano α e β le curve coordinate date da

$$\alpha(u) = X(u, 0) \quad \beta(v) = X(0, v),$$

e siano E_1 e E_2 i campi di vettori definiti come

$$E_1(v) = \frac{1}{\|X_u(0, v)\|} X_u(0, v), \quad E_2(u) = \frac{1}{\|X_v(u, 0)\|} X_v(u, 0).$$

Si noti subito che

$$E_1(v) \in T_{\beta(v)}S, \quad E_2(u) \in T_{\alpha(u)}S.$$

Definiamo le seguenti funzioni di una variabile reale

$$h_1(v) = II_{\beta(v)}(E_1(v)) = \frac{\xi_{uu}}{(1 + \xi_u^2)\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}} \Big|_{(0, v)}$$

$$h_2(u) = II_{\alpha(u)}(E_2(u)) = \frac{\xi_{vv}}{(1 + \xi_v^2)\sqrt{1 + \xi_u^2 + \xi_v^2}} \Big|_{(u, 0)}.$$

Poiché p è un minimo locale per k_1 , si ha

$$h_1(0) = II_p(e_1) = k_1(p) \leq k_1(\beta(v)) \leq II_{\beta(v)}(E_1(v)) = h_1(v).$$

e, in modo analogo, essendo p un massimo locale per k_2 ,

$$h_2(0) = II_p(e_2) = k_2(p) \geq k_2(\alpha(u)) \geq II_{\alpha(u)}(E_2(u)) = h_2(u).$$

Quindi la funzione h_1 ha un minimo locale in 0 mentre la funzione h_2 ha un massimo locale in 0. Segue che

$$h_2''(0) \leq 0 \leq h_1''(0). \quad (11.5)$$

Adesso, dalla definizione di h_1 e di h_2 , eseguendo la derivata seconda e valutandola in 0 si ottiene

$$h_2''(0) = -\xi_{uu}^2(0,0)\xi_{vv}(0,0) + \xi_{vvuu}(0,0), \quad h_1''(0) = -\xi_{vv}^2(0,0)\xi_{uu}(0,0) + \xi_{uuvv}(0,0)$$

da cui, tenendo conto della (11.5),

$$\xi_{uu}(0,0)\xi_{vv}(0,0)(\xi_{vv}(0,0) - \xi_{uu}(0,0)) \leq 0.$$

L'ultima disequazione può essere riscritta come

$$K(p)(k_2(p) - k_1(p)) \leq 0$$

ed essendo per ipotesi $K(p) > 0$ si conclude che $k_2(p) = k_1(p)$. ■

Il Teorema di Hilbert ha due interessanti conseguenze

Corollario 11.1 — Teorema di Jellet-Liebmann. Sia S una superficie compatta, connessa e orientabile con curvatura di Gauss positiva in ogni suo punto e curvatura media costante, cioè

$$\forall p \in S \quad K(p) > 0 \quad \text{e} \quad H(p) = c = \text{costante},$$

allora S è una sfera.

Dimostrazione. Mostriamo per prima cosa che la costante c è diversa da zero. Infatti, se $c = 0$, allora $k_1 = -k_2$ e si avrebbe $K = -k_1^2 \leq 0$ contro l'ipotesi che K è positiva in tutti i punti. Adesso, scelta un'orientazione per S , denotiamo con $k_1 \leq k_2$ le funzioni curvatures principali nell'orientazione scelta. Le funzioni k_1 e k_2 sono continue su S . Quindi, essendo S compatta, esiste un punto $p_o \in S$ dove k_1 assume il valore minimo. Ma $k_2 = 2H - k_1 = 2c - k_1$, quindi k_2 ha un massimo locale proprio nel punto p_o . D'altra parte la curvatura di Gauss è positiva dappertutto, quindi, dal Teorema di Hilbert, il punto p_o è ombelicale. Segue che, per ogni $p \in S$,

$$k_2(p) \leq k_2(p_o) = k_1(p_o) \leq k_1(p).$$

Consequentemente $k_1(p) = k_2(p)$, quindi S è totalmente ombelicale. Dal Teorema 11.1 S è una parte (aperto) di una sfera o di un piano e, essendo $c \neq 0$, segue che S è parte di una sfera. Infine, S è un compatto nella sfera (la quale è uno spazio di Hausdorff) quindi è anche chiuso, dalla connessione della sfera segue che S coincide con la sfera. ■

Corollario 11.2 — Teorema di Hilbert-Liebmann. Sia S una superficie compatta, connessa e orientabile con curvatura di Gauss costante. Allora S è una sfera.

Dimostrazione. Sia $K = c = \text{costante}$. Allora dalla Teorema 11.2 segue che $c > 0$. Anche in questo caso la curvatura media non può mai annullarsi (altrimenti in un tale punto si avrebbe che la curvatura di Gauss è non positiva). Siano $k_1 \leq k_2$ le funzioni curvatures principali definite globalmente e continue su S . Con lo stesso ragionamento del corollario precedente, essendo S compatta, esiste un punto $p_o \in S$ dove k_1 assume il valore minimo. Poiché $k_2 = K/k_1 = c/k_1$, k_2 ha un massimo locale nel punto p_o . Dal Teorema di Hilbert il punto p_o è ombelicale. Segue che, per ogni $p \in S$,

$$k_2(p) \leq k_2(p_o) = k_1(p_o) \leq k_1(p).$$

La superficie S è quindi totalmente ombelicale e la dimostrazione si conclude con un ragionamento analogo a quello del Teorema di Jellet-Liebmann. ■

Osservazione 11.2 Esiste una versione molto più forte del Teorema di Jellet-Liebmann, noto come *Teorema di Alexandrov* il quale asserisce che una superficie regolare compatta connessa con curvatura media costante è una sfera rotonda. Quindi senza l'ipotesi che la curvatura di Gauss sia positiva dappertutto. Questo teorema fa parte di un capitolo affascinante della teoria delle superfici in $\mathbb{R}^3$ che prende il nome di *CMC surfaces*, cioè superfici con curvatura media costante. Il testo ispiratore di questi argomenti è l'affascinante libro di *H. Hopf*, *Differential geometry in the Large*, Lecture Notes in Mathematics 1000 (1989).

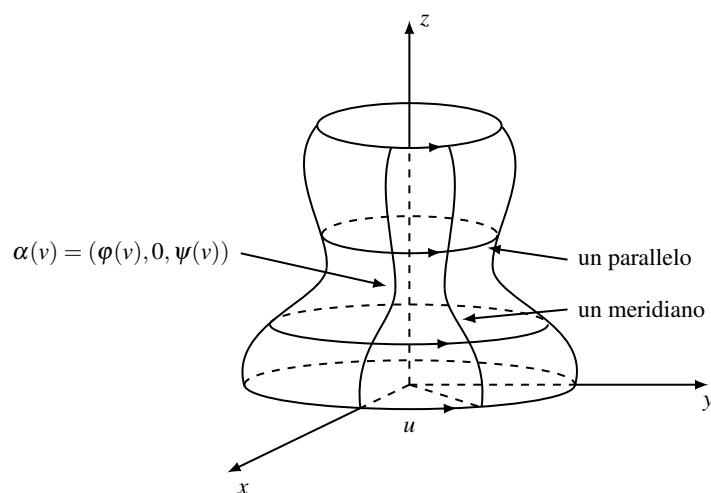
12. Curvature delle superfici di rotazione

Consideriamo una curva parametrizzata regolare

$$\begin{aligned}\alpha: I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto (\varphi(v), 0, \psi(v))\end{aligned}$$

la cui traccia appartiene al piano xz e con $\varphi(v) > 0$. Ruotando la traccia della curva α attorno all'asse z si ottiene una superficie parametrizzata regolare (si confronti con l'Esempio 5.6)

$$\begin{aligned}X: (0, 2\pi) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))\end{aligned}$$



Supponiamo che la curva α sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea, cioè che $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$. Con un calcolo diretto si ottiene

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi'^2 + \psi'^2 = 1$$

da cui la metrica indotta da X su $U = (0, 2\pi) \times I$ è

$$ds^2 = \varphi^2(v) du^2 + dv^2.$$

I coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$e = -\varphi\psi', \quad f = 0, \quad g = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'.$$

Si osservi subito che, essendo $F = f = 0$, le curve coordinate sono curve principali. Inoltre $\|X_u\|^2 = \varphi^2$ e $\|X_v\|^2 = 1$, possiamo quindi scegliere la seguente base ortonormale formata dalle direzioni principali

$$e_1 = \frac{X_u}{\varphi}, \quad e_2 = X_v.$$

Inoltre, derivando la condizione $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ si ottiene $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$. Tenendo conto di quest'ultima, la curvatura di Gauss diviene

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} = -\frac{\psi'^2\varphi'' + \varphi'^2\psi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Le curvature principali sono in questo caso

$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{\psi'}{\varphi}, \quad k_2 = \frac{g}{G} = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'.$$

È interessante osservare che $k_2 = k_2^\alpha$ dove con k_2^α abbiamo indicato la curvatura con segno della curva piana $\alpha(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v))$ rispetto alla base positiva $\{\partial/\partial z, \partial/\partial x\}$. La curvatura media assume l'espressione

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\psi'}{\varphi} + (\psi'\varphi'' - \psi''\varphi') \right).$$

Ci sono due classi notevoli di superfici, quelle con curvatura di Gauss costante e quelle con curvatura media costante. Nel caso delle superfici di rotazione è possibile caratterizzare queste due classi di superfici. Diamo nel seguito un'idea di tale classificazione.

12.1 Superfici di rotazione con curvatura media costante

Supponiamo che una data superficie di rotazione abbia curvatura media H costante. Supponiamo inoltre che $\varphi'(v) \neq 0$ per ogni $v \in I$. Questa richiesta equivale ad assumere che la curva profilo non sia mai verticale. Allora

$$k_2 = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi' = \frac{\varphi'\varphi''\psi' - \varphi'^2\psi''}{\varphi'} = -\frac{\psi'^2\psi'' + \varphi'^2\psi''}{\varphi'} = -\frac{\psi''}{\varphi'}.$$

La curvatura media diviene

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\psi'}{\varphi} + \frac{\psi''}{\varphi'} \right) = -\frac{\varphi'\psi' + \varphi\psi''}{2\varphi\varphi'} = -\frac{(\varphi\psi')'}{(\varphi^2)'}$$

Integrando si ottiene

$$\varphi\psi' = -H\varphi^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

dividendo per φ

$$\psi' = -H\varphi + \frac{C}{\varphi}$$

da cui, poiché $\psi'^2 = 1 - \varphi'^2$,

$$1 - \varphi'^2 = \left(-H\varphi + \frac{C}{\varphi} \right)^2. \quad (12.1)$$

L'ultima equazione è una ODE in φ che integrata produce la funzione φ , mentre la corrispondente ψ si ricava sempre dalla condizione $\psi'^2 = 1 - \varphi'^2$. Non svolgiamo l'integrazione per qualsiasi valore della costante H ma ci limitiamo al caso in cui $H = 0$. In questo caso la ODE diventa

$$1 - \varphi'^2 = \frac{C^2}{\varphi^2}. \quad (12.2)$$

Se $C = 0$ la soluzione è

$$\psi' = 0, \quad (\phi')^2 = 1,$$

quindi si ottengono porzioni di piano. Se $C \neq 0$ la (12.2) ammette la soluzione $\phi(v) = \sqrt{v^2 + C^2}$. Segue che $\psi'^2 = C^2/(v^2 + C^2)$. Supponendo $C > 0$ possiamo scegliere $\psi' = C/\sqrt{v^2 + C^2}$ da cui $\psi(v) = C \ln(v + \sqrt{v^2 + C^2})$. La curva profilo è quindi parametrizzata da

$$\alpha(v) = \left(\sqrt{v^2 + C^2}, 0, C \ln(v + \sqrt{v^2 + C^2}) \right).$$

Se scegliamo, per semplificare i conti, $C = 1$ e ricordiamo che la funzione inversa di $\cosh$ è

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

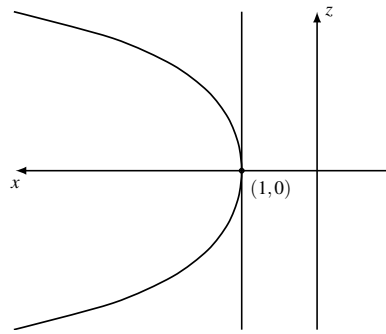
la curva α può essere parametrizzata in funzione di $t = \sqrt{v^2 + 1}$ come

$$\beta(t) = (t, 0, \cosh^{-1}(t))$$

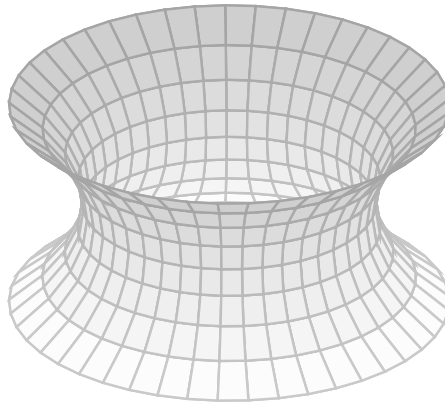
o, equivalentemente,

$$\gamma(\tau) = (\cosh(\tau), 0, \tau).$$

La curva γ è una curva piana notevole la cui traccia (facendo variare τ oltre l'intervallo imposto dalle integrazioni sopra) è la *catenaria* mostrata in figura



che ruotata produce la superficie nota col nome di *catenoide*



Osservazione 12.1 Le superfici di rivoluzione a curvatura media costante non necessariamente zero sono state introdotte e completamente caratterizzate da C. Delaunay più di un secolo fa (si veda l'articolo C. Delaunay, *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures et Appliques 6 (1841), 309–320). Delaunay ha mostrato che le curve profilo delle superfici di rotazione con curvatura media costante si possono descrivere, geometricamente, facendo rotolare senza strisciare una conica lungo una linea retta. La curva descritta da un fuoco della conica, la roulette della conica, rappresenta proprio la curva profilo di una superficie di rotazione con curvatura media costante, dove la retta su cui rotola la conica è l'asse di rivoluzione.

Queste superfici di rivoluzione sono chiamate oggi *Superfici di Delaunay*. Oltre ai casi elementari di sfere e cilindri, esistono tre classi di superfici di Delaunay, i catenoidi (con $H = 0$ come visto in precedenza), gli onduloidi e i nodoidi, corrispondenti rispettivamente alla scelta della conica come una parabola, un'ellisse o un'iperbole. Si consiglia di vedere le web-page seguenti per animazioni di tali roulette.

<https://www.differentialgeometrie.uni-hannover.de/en/aktivitaeten/geometriewerkstatt/galerie/cmc-surfaces/>

<https://mathcurve.com/courbes2d/delaunay/delaunay.shtml>

12.2 Superfici di rotazione con curvatura di Gauss costante

Se la curvatura di Gauss è costante allora la funzione φ soddisfa la condizione

$$\varphi'' + K\varphi = 0.$$

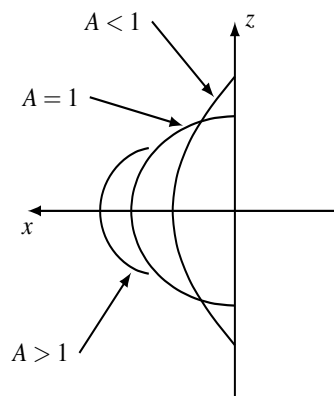
Si presentano i seguenti casi.

$K = 0$ In questo caso si ottiene $\varphi'' = 0$ da cui, a meno di una traslazione, $\varphi(v) = \cos av + c_1$ e $\psi = \sin av$ con $a \in [0, \pi/2]$, $v > -c_1/\cos a$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$. La corrispondente superficie di rotazione è un piano per $a = 0$; la parte superiore di un cono per $a \in (0, \pi/2)$; un cilindro circolare retto per $a = \pi/2$.

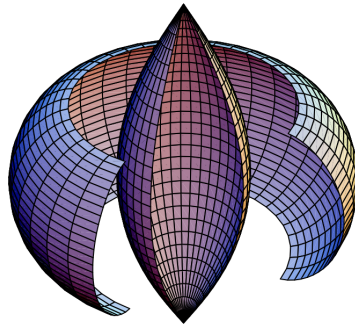
$K > 0$ In questo caso, ponendo $K = a^2$ si ottiene $\varphi(v) = A\cos(av) + B\sin(av)$. Per una trattazione più snella scegliamo $a = 1$ nel seguito. È facile verificare che la derivata di φ si annulla per qualche valore di v . Segue che, a meno di una traslazione lungo l'asse z e di una traslazione del parametro v , la curva profilo interseca l'asse delle x perpendicolarmente per $v = 0$. Quindi si deve avere $\varphi'(0) = 0$, cioè $B = 0$, e la parametrizzazione della curva profilo diventa

$$\alpha(v) = (A\cos v, 0, \int_0^v \sqrt{1 - A^2 \sin^2 \tau} d\tau).$$

Un'analisi attenta mostra che al variare di A la traccia della curva è come mostrato in figura



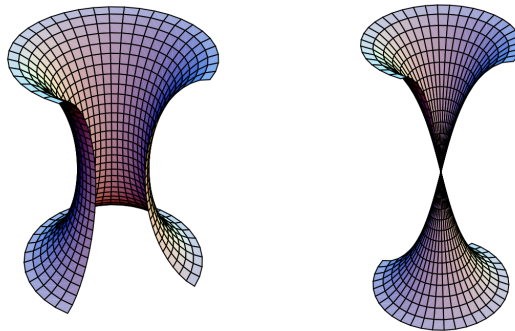
Si osservi che per $A = 1$ si ritrova la sfera. Per $A > 1$ il profilo non arriva all'asse di rotazione, mentre per $A < 1$ arriva sino all'asse intersecandolo sotto un angolo diverso da $\pi/2$. Le corrispondenti superfici di rotazione sono mostrate nella figura sotto:



$K < 0$ In questo caso, considerando $K = -1$, si trovano (a meno di costanti moltiplicative e/o additive) tre tipi possibili di soluzioni per la funzione φ :

$$\varphi(v) = A \cosh v, \quad \varphi(v) = B \sinh v, \quad \varphi(v) = e^v$$

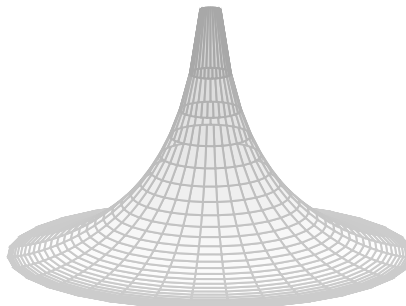
con A, B costanti reali che soddisfano opportuni vincoli. Nel primo caso si ottiene una superficie detta di tipo *iperbolico* e nel secondo una superficie detta di tipo *conico*. Tali superfici sono mostrate nella figura seguente:



L'ultimo caso, quello con $\varphi(v) = e^v$ merita qualche commento. La curva profilo diventa

$$\alpha(v) = \left(e^v, 0, -\int_0^v \sqrt{1 - e^{2\tau}} d\tau \right), \quad v \in (-\infty, 0).$$

Con un semplice calcolo si può verificare che la distanza di un punto $\alpha(v)$ dal punto di intersezione della retta tangente alla curva α , per il punto $\alpha(v)$, con l'asse delle z è costante uguale a 1. Segue che la curva profilo è una *trattrice* mentre la superficie di rotazione corrispondente prende il nome di *pseudosfera*.



Osservazione 12.2 La pseudosfera, nota anche come la superficie di Beltrami, fu utilizzata da quest'ultimo, nella seconda metà del diciannovesimo secolo, come modello locale della geometria iperbolica. È un utile esercizio provare a costruirne una di carta seguendo le indicazioni dello stesso Beltrami e reperibili nel sito:

https://www.matematita.it/personali/index.php/il_modello_di_carta_della_pseudosfera_di?blog=6

Esercizio 12.1 Verificare che la parametrizzazione della pseudosfera può essere riscritta come

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \log \tan \frac{v}{2})$$

con $0 < v < \pi/2$.

13. Geometria intrinseca delle superfici

Intuitivamente la geometria intrinseca riguarda gli aspetti geometrici di una superficie che dipendono esclusivamente dalla metrica ds^2 e non dipendono dalla seconda forma fondamentale. Per chiarire in modo preciso questo aspetto descriviamo nella prossima sezione la classe di applicazioni tra superfici che conservano la geometria intrinseca.

13.1 Isometrie locali

Iniziamo con la seguente

Definizione 13.1 Siano S_1, S_2 due superfici regolari. Un'*isometria locale* è un'applicazione differenziabile $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ tale che per ogni $p \in S_1$ e per ogni $w_1, w_2 \in T_p S_1$ si ha

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Osservazione 13.1 Se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria locale allora per ogni $p \in S_1$ e per ogni $v \in T_p S_1$ si ha:

$$I_p(v) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)).$$

Viceversa se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'applicazione con $I_p(v) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v))$ per ogni $v \in T_p S_1$, allora φ è un'isometria locale.

Osservazione 13.2 Un'isometria locale non è necessariamente iniettiva e/o suriettiva però il suo differenziale, essendo $\|d\varphi_p(w)\|^2 = \|w\|^2$ per ogni $w \in T_p S_1$, è invertibile in ogni punto $p \in S_1$. Segue che un'isometria locale è un diffeomorfismo locale.

■ **Esempio 13.1** Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ l'applicazione dal piano al cilindro data da $\varphi(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$. In un punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ il differenziale $d\varphi_p$ è dato da

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x' \sin x \\ x' \cos x \\ y' \end{bmatrix}, \quad w = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}$$

Segue immediatamente che $\|d\varphi_p(w)\|^2 = \|w\|^2$ da cui φ è un'isometria locale. Si osservi che in questo caso φ non è iniettiva. ■

Definizione 13.2 Siano S_1, S_2 due superfici regolari.

- (a) Un'isometria locale $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria se è un diffeomorfismo globale.
- (b) Due superfici S_1 e S_2 sono dette *localmente isometriche* se: per ogni $p \in S_1$ esiste un aperto $V \subseteq S_1$, $p \in V$, un aperto $W \subseteq S_2$ e un'isometria $\varphi : V \rightarrow W$; viceversa, per ogni $q \in S_2$ esiste un aperto $W \subseteq S_2$, $q \in W$, un aperto $V \subseteq S_1$ e un'isometria $\varphi : W \rightarrow V$.

■ **Esempio 13.2** Se $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un movimento rigido tale che $\Phi(S_1) = S_2$ allora $\varphi = \Phi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria. ■

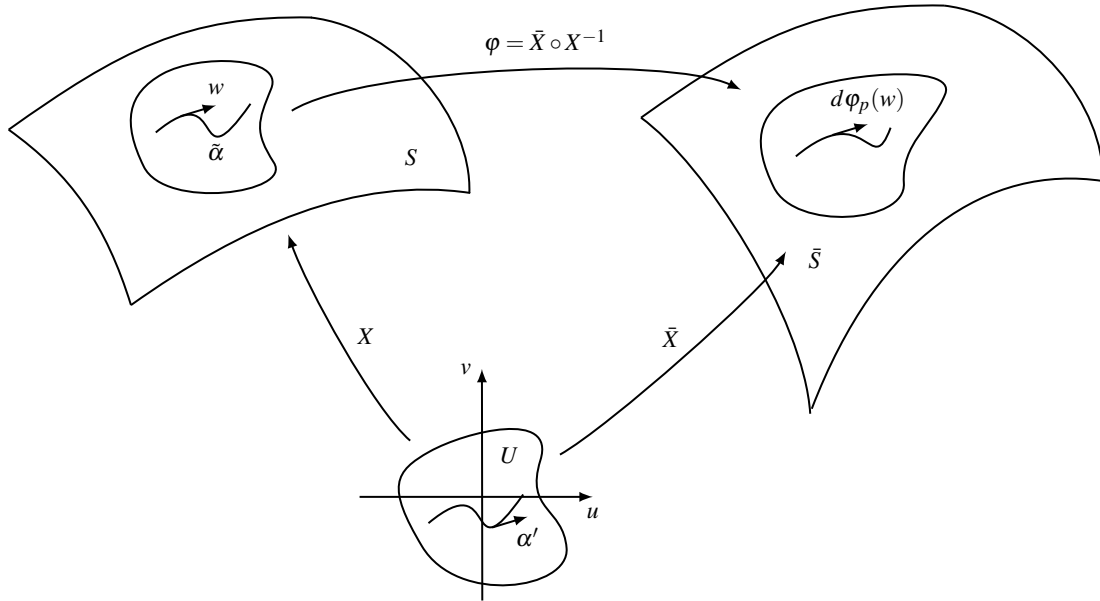
Esercizio 13.1 Dimostrare che se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria locale suriettiva, allora S_1 e S_2 sono localmente isometriche.

Proposizione 13.1 Siano S e $\bar{S}$ due superfici regolari e si supponga che le due superfici si possano ricoprire con due atlanti $\{U_i, X_i\}_{i \in I}$, $\{U_i, \bar{X}_i\}_{i \in I}$ con la proprietà che per ogni $i \in I$, X_i e $\bar{X}_i$ inducono la stessa metrica su U_i , cioè che

$$E_i(u, v) = \bar{E}_i(u, v), \quad F_i(u, v) = \bar{F}_i(u, v), \quad G_i(u, v) = \bar{G}_i(u, v).$$

Allora S e $\bar{S}$ sono localmente isometriche.

Dimostrazione. Sia $p \in S$ e sia (U, X) una carta locale dell'atlante $\{U_i, X_i\}_{i \in I}$ con $p \in X(U)$ e sia $(U, \bar{X})$ la corrispondente carta locale di $\bar{S}$. Mostriamo che $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$ è un'isometria. Sia $w \in T_p S$ e sia $\tilde{\alpha}(t) = X(u(t), v(t)) = X \circ \alpha(t)$ una curva su $X(U)$ con $\tilde{\alpha}(0) = p$ e $\tilde{\alpha}'(0) = w$, dove $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ è l'espressione locale della curva $\tilde{\alpha}$, si veda la figura sotto.



Con le notazioni di sopra si trova

$$d\varphi_p(w) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \tilde{\alpha})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\bar{X} \circ X^{-1} \circ X \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\bar{X} \circ \alpha)|_{t=0}.$$

Segue che, se $w = X_u u' + X_v v'$, allora $d\varphi_p(w) = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v'$. Calcolando la prima forma fondamentale si ha

$$I_p(w) = E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 = \bar{E} u'^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G} v'^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Dall'Osservazione 13.1 segue che φ è un'isometria locale. Infine, φ è un diffeomorfismo poiché composizione di diffeomorfismi. Per concludere la dimostrazione si consideri per ogni $q \in \bar{S}$ una carta locale $(U, \bar{X})$ con $q \in \bar{X}(U)$ e sia (U, X) la corrispondente carta locale di S . Si dimostra in modo analogo che $\varphi = X \circ \bar{X}^{-1} : \bar{X}(U) \rightarrow X(U)$ è un'isometria. ■

■ **Esempio 13.3** Sia

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

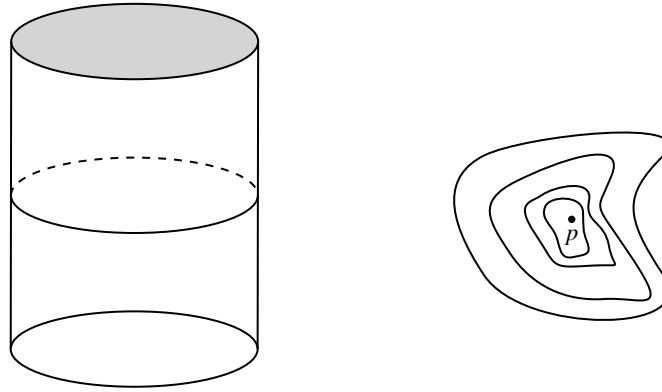
la parametrizzazione locale di un cilindro e sia

$$\begin{aligned} \bar{X} : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, 0) \end{aligned}$$

la parametrizzazione locale del piano $z = 0$. Con un calcolo diretto si trova che

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v) = 1, \quad F(u, v) = \bar{F}(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \bar{G}(u, v) = 1.$$

Segue che $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1}$ è un'isometria dal cilindro meno un meridiano alla striscia aperta di piano U . Con un pò di attenzione si possono costruire, a partire dalla costruzione vista sopra, due atlanti, uno del piano e l'altro del cilindro, che soddisfano l'ipotesi della Proposizione 13.1. Si deduce che il piano e il cilindro sono localmente isometrici. Alla stessa conclusione si perviene notando che l'isometria locale dell'Esempio 13.1 è suriettiva. Non esiste però un'isometria "globale" tra il cilindro e il piano, infatti il piano ed il cilindro non sono neanche omeomorfi. Una dimostrazione rigorosa dell'ultima affermazione richiede strumenti di topologia algebrica, ma il seguente argomento intuitivo può dare un'idea della prova. Qualsiasi curva semplice (senza auto intersezioni) chiusa nel piano può essere contratta in modo continuo ad un punto. Tale proprietà sarebbe certamente preservata tramite un omeomorfismo. Ma un parallelo del cilindro non gode di tale proprietà, e questo contraddice l'esistenza di un omeomorfismo tra il piano e il cilindro, si veda la figura sotto.



Osservazione 13.3 Attenzione che affinché due superfici regolari S e $\bar{S}$ siano localmente isometriche non deve necessariamente essere soddisfatta la condizione sugli atlanti della Proposizione 13.1. Infatti, si supponga che le due superfici si possano ricoprire con due atlanti $\{U_i, X_i\}_{i \in I}$, $\{\bar{U}_i, \bar{X}_i\}_{i \in I}$ con la proprietà che per ogni $i \in I$, X_i e $\bar{X}_i$ inducono le metriche g_i su U_i e $\bar{g}_i$ su $\bar{U}_i$ ed esiste un'isometria $\varphi_i : (U_i, g_i) \rightarrow (\bar{U}_i, \bar{g}_i)$. Allora S e $\bar{S}$ sono localmente isometriche.

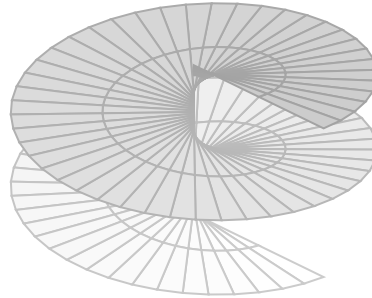
■ **Esempio 13.4** Sia

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \end{aligned}$$

la parametrizzazione locale di un catenoide e sia

$$\begin{aligned} \tilde{X} : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (\bar{v} \sin \bar{u}, \bar{v} \cos \bar{u}, \bar{u}) \end{aligned}$$

quella di un elicoide. Il catenoide l'abbiamo già incontrato a pag. 111. L'elicoide è invece la superficie che si ottiene ruotando attorno all'asse delle z una retta parallela al piano xy che interseca l'asse z e simultaneamente, con la stessa velocità, traslando la stessa lungo l'asse z . La superficie che si ottiene è la seguente



La parametrizzazione X induce su U la metrica $g = \cosh^2 v (du^2 + dv^2)$ mentre la parametrizzazione $\tilde{X}$ induce, sempre su U , la metrica $\bar{g} = (\bar{v}^2 + 1)d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2$. Consideriamo la seguente applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : (U, g = \cosh^2 v (du^2 + dv^2)) &\rightarrow (U, \bar{g} = (\bar{v}^2 + 1)d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2) \\ (u, v) &\mapsto (\bar{u} = u, \bar{v} = \sinh v) \end{aligned}$$

Il differenziale di φ è dato da

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ v' \cosh v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \end{bmatrix}$$

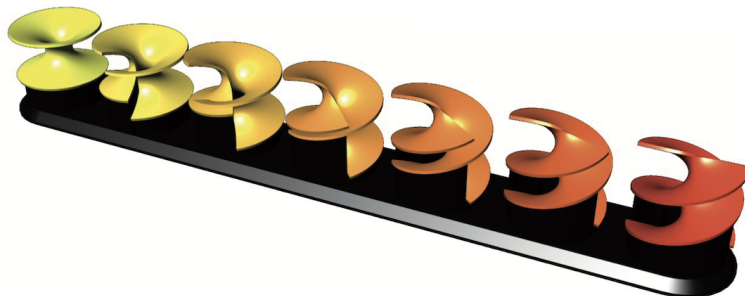
Segue che, se $w = u' X_u + v' X_v$, allora $d\varphi_p(w) = \bar{u}' \bar{X}_{\bar{u}} + \bar{v}' \bar{X}_{\bar{v}} = u' \bar{X}_{\bar{u}} + (v' \cosh v) \bar{X}_{\bar{v}}$. Allora

$$I_p(w) = g(w, w) = \cosh^2 v ((u')^2 + (v')^2)$$

mentre

$$\begin{aligned} I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) &= \bar{g}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)) = (\bar{v}^2 + 1)(\bar{u}')^2 + (\bar{v}')^2 \\ &= (\sinh^2 v + 1)(u')^2 + \cosh^2 v (v')^2 \\ &= \cosh^2 v ((u')^2 + (v')^2). \end{aligned}$$

Quindi φ è un'isometria. Segue che l'aperto del catenoide $X(U)$ e dell'elicoide $\tilde{X}(U)$ sono isometrici. La prossima immagine mostra la suggestiva sequenza di isometrie locali che trasforma un elicoide in un catenoide.



Per ottenere la famiglia (locale) di tali superfici si osservi che l'elicoide può essere parametrizzato (essendo l'applicazione $v \mapsto \sinh v$ biettiva) da

$$Y(u, v) = (\sinh v \sin(-u), \sinh v \cos(-u), -u).$$

La famiglia ad un parametro di parametrizzazioni

$$Z_t(u, v) = \cos t X + \sin t Y, \quad t \in [0, \pi/2]$$

definisce, per ogni valore di t , una superficie parametrizzata che coincide con il catenoide per $t = 0$ e con l'elicoide per $t = \pi/2$. La metrica indotta su U da Z_t è

$$E_t = G_t = \cosh^2 v, \quad F_t = 0$$

che non dipende da t . Segue che le superfici parametrizzate da Z_t sono localmente isometriche per ogni $t \in [0, \pi/2]$. ■

Osservazione 13.4 Per mostrare che un diffeomorfismo

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v)$$

tra due aperti U e $\bar{U}$ di $\mathbb{R}^2$ dotati delle metriche

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2, \quad d\bar{s}^2 = \bar{E}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}^2 + 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v}^2$$

sia un isometria è sufficiente verificare quanto segue. Si calcolano i differenziali

$$d\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv, \quad d\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} dv$$

e si verifica, sostituendo le espressioni trovate sopra per $d\bar{u}$ e $d\bar{v}$, che

$$\bar{E}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}^2 + 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v}^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2.$$

Ad esempio, con riferimento all'Esempio 13.4, su $U = \bar{U} = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ si considerino le metriche

$$ds^2 = \cosh^2 v du^2 + \cosh^2 v dv^2, \quad d\bar{s}^2 = (\bar{v}^2 + 1)d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2$$

e il diffeomorfismo

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = \sinh v.$$

Allora

$$d\bar{u} = du, \quad d\bar{v} = \cosh v dv$$

da cui

$$d\bar{s}^2 = (\bar{v}^2 + 1)d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2 = (\sinh^2 v + 1)du^2 + \cosh^2 v dv^2 = \cosh^2 v du^2 + \cosh^2 v dv^2 = ds^2.$$

Esercizio 13.2 Si consideri, per un dato angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$, la parametrizzazione

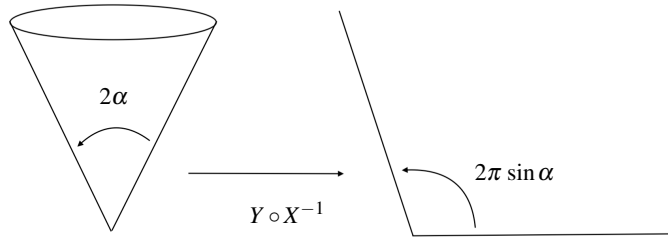
$$\begin{aligned} X : (0, \infty) \times (0, 2\pi \sin \alpha) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \vartheta) &\mapsto \left(\rho \sin \alpha \cos \left(\frac{\vartheta}{\sin \alpha} \right), \rho \sin \alpha \sin \left(\frac{\vartheta}{\sin \alpha} \right), \rho \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che $z^2 = (\cot^2 \alpha)(x^2 + y^2)$ con $z > 0$. Segue che X è una parametrizzazione locale della falda superiore di un cono circolare retto con angolo al vertice 2α . Si

consideri inoltre la parametrizzazione

$$\begin{aligned} Y : (0, \infty) \times (0, 2\pi \sin \alpha) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \vartheta) &\mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 0) \end{aligned}$$

L'immagine di Y è un settore circolare di piano con angolo al centro $2\pi \sin \alpha$. Utilizzando la Proposizione 13.1 si verifichi che la falda superiore del cono meno un meridiano è isometrica al settore circolare. Si veda la figura sotto. Segue, con i dovuti accorgimenti, che la falda superiore del cono è localmente isometrica ad un piano meno un punto.



13.2 Distanza su una superficie

Osserviamo subito che vale la seguente proposizione

Proposizione 13.2 Sia $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione differenziabile tra due superfici. Allora φ è un'isometria locale se e solo se per ogni curva regolare $\alpha : I \rightarrow S_1$ si ha

$$L_a^b(\alpha) = L_a^b(\varphi \circ \alpha), \quad [a, b] \subseteq I.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ un'isometria locale tra due superfici regolari e sia $\alpha : I \rightarrow S_1$ una curva regolare, allora per ogni punto $p = \alpha(t)$, si ha

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle_{\alpha(t)} = \langle d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'), d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha') \rangle_{\varphi(\alpha(t))} = \langle (\varphi \circ \alpha)', (\varphi \circ \alpha)' \rangle_{\varphi(\alpha(t))}$$

da cui

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'\|_{\alpha(t)} dt = \int_a^b \|(\varphi \circ \alpha)'\|_{\varphi(\alpha(t))} dt = L_a^b(\varphi \circ \alpha).$$

Viceversa, sia φ un'applicazione che conserva la lunghezza delle curve. Sia $p \in S_1$ e sia $v \in T_p S_1$. Allora esiste una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Per ipotesi

$$\int_0^t \|(\varphi \circ \alpha)'\| d\tau = L_0^t(\varphi \circ \alpha) = L_0^t(\alpha) = \int_0^t \|\alpha'\| d\tau$$

la cui derivata valutata in $t = 0$ restituisce

$$\|d\varphi_p(v)\| = \|(\varphi \circ \alpha)'(0)\| = \|\alpha'(0)\| = \|v\|.$$

■

Sia adesso S una superficie regolare connessa e siano $p, q \in S$. Se i punti p e q appartengono ad una carta locale connessa allora esiste una curva differenziabile che li congiunge (esercizio per il lettore). Se p e q non appartengono ad una carta locale, poiché S è connessa per archi, esiste una curva continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Adesso $\alpha([0, 1])$ è un compatto di S da cui esistono

un numero finito di carte locali $(U_1, X_1), \dots, (U_n, X_n)$ la cui unione ricopre $\alpha([0, 1])$. Supponiamo, senza ledere la generalità, che $p \in X_1(U_1)$, $q \in X_n(U_n)$ e che $X_i(U_i) \cap X_{i+1}(U_{i+1}) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n-1$. Allora possiamo scegliere $n-1$ punti $p_i \in X_i(U_i) \cap X_{i+1}(U_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$. Segua che p e p_1 appartengono a $X_1(U_1)$ e possono quindi essere collegati con una curva differenziabile. Allo stesso modo p_1 con p_2 e così via sino a collegare, con una curva differenziabile, i punti p_{n-1} e q . In conclusione i punti p e q si possono collegare con una curva differenziabile a tratti, infatti la differenziabilità non è garantita nei punti $p_1, \dots, p_{n-1}$ di concatenazione delle curve differenziabili. Possiamo quindi considerare il seguente insieme non vuoto

$$C(p, q) = \{\gamma: [a, b] \rightarrow S: \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \text{ con } \gamma \text{ differenziabile a tratti}\}$$

Definiamo il seguente numero

$$d_S(p, q) = \inf_{\gamma \in C(p, q)} L(\gamma). \quad (13.1)$$

Osservazione 13.5 Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $p, q \in S$, allora, dal Problema 1.10,

$$d_S(p, q) \geq \|p - q\|.$$

Quindi la distanza tra due punti p e q su una superficie è sempre maggiore o uguale alla distanza euclidea dei punti p e q visti come punti di $\mathbb{R}^3$.

Vale il seguente teorema.

Teorema 13.1 Sia S una superficie regolare connessa. Allora la funzione $d_S: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ definita in (13.1) soddisfa:

- (a) $d_S(p, q) = d_S(q, p)$ per ogni $p, q \in S$;
- (b) $d_S(p, q) \leq d_S(p, x) + d_S(x, q)$ per ogni $p, q, x \in S$;
- (c) $d_S(p, q) \geq 0$ e $d_S(p, q) = 0$ se e solo se $p = q$.

Dimostrazione. Per il punto (a). Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ una curva che unisce p a q . Definiamo

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t).$$

Allora $\tilde{\gamma}$ unisce q a p e $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$. Quindi

$$d_S(q, p) \leq L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

Passando all'inf su tutte le curve γ :

$$d_S(q, p) \leq d_S(p, q).$$

Scambiando i ruoli si ottiene l'uguaglianza.

Per il punto (b). Ricordiamo la definizione di curva concatenata. Siano $\gamma_1: [a, b] \rightarrow S$ e $\gamma_2: [b, c] \rightarrow S$ due curve tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. La loro concatenazione $\gamma_1 * \gamma_2: [a, c] \rightarrow S$ è definita da

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Siano γ_1 una curva da p a x e γ_2 una curva da x a q . Allora la curva concatenata $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ unisce p a q e

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Quindi

$$d_S(p, q) \leq L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Passando all'inf si ottiene

$$d_S(p, q) \leq d_S(p, x) + d_S(x, q).$$

Per il punto (c). Poiché la lunghezza di una curva è sempre non negativa,

$$d_S(p, q) \geq 0.$$

Se $p = q$, la curva costante $\gamma(t) = p$ ha lunghezza nulla, dunque

$$d_S(p, p) = 0.$$

Viceversa, sia $p \neq q$. Allora dall'Osservazione 13.5

$$d_S(p, q) \geq \|p - q\| > 0.$$

■

Dal Teorema 13.1 segue che la funzione d_S definisce una distanza sulla superficie S . Segue, dalla Proposizione 13.2, che se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria locale allora, localmente, $d_{S_1}(p, q) = d_{S_2}(\varphi(p), \varphi(q))$. Questo fatto giustifica l'importanza delle isometrie locali dal punto di vista geometrico.

■ **Esempio 13.5** Si consideri la sfera $\mathbb{S}^2$ parametrizzata da

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

La parametrizzazione X induce su $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ la metrica $ds^2 = \sin^2 \varphi d\vartheta^2 + d\varphi^2$. Dati due punti sulla sfera è possibile, tramite una rotazione di $\mathbb{R}^3$ che fissa l'origine, far sì che i due punti si trovino su uno stesso meridiano. Le rotazioni di $\mathbb{R}^3$ che fissano l'origine sono isometrie di $\mathbb{R}^3$ che ristrette alla sfera definiscono isometrie globali della sfera in se stessa. La distanza tra i due punti quindi non cambia dopo l'applicazione di tale rotazione. Con questa premessa possiamo supporre che i due punti p, q appartengano ad un meridiano e descrivere le loro coordinate come

$$p = (\vartheta_0, \varphi_1), \quad q = (\vartheta_0, \varphi_2), \quad \varphi_2 \geq \varphi_1.$$

Sia adesso $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva, $\gamma(t) = X(\vartheta(t), \varphi(t))$, con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Si trova

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'\|_{ds^2} d\tau = \int_0^1 \sqrt{\sin^2 \varphi \vartheta'^2 + \varphi'^2} d\tau \\ &\geq \int_0^1 |\varphi'| d\tau \geq \int_0^1 \varphi' d\tau = \varphi_2 - \varphi_1 = L(\gamma_0), \end{aligned}$$

dove γ_0 è l'arco di meridiano (circonferenza massima) congiungente p e q . Segue che la distanza tra due punti su una sfera è data dalla lunghezza dell'arco minore di cerchio massimo (raggio del cerchio pari al raggio della sfera) che congiunge i due punti. ■

In conclusione, una proprietà di una superficie regolare si dice *intrinseca* quando è invariante per superfici localmente isometriche. Per esempio, la lunghezza di una curva, l'angolo tra due vettori tangenti etc. Ci sono quantità notevoli di una superficie che non sono intrinseche. Per esempio, la funzione curvatura media non è una quantità intrinseca, infatti per il cilindro dell'Esempio 13.3 è la funzione costante $1/2$ mentre per il piano è la funzione costante 0 nonostante le due superfici siano localmente isometriche.

13.3 Problemi proposti

Problema 13.1 Dimostrare che, se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ è un'isometria tra due superfici compatte, allora le loro aree sono uguali.

Problema 13.2 Dimostrare che la composizione di due isometrie locali è un'isometria locale.

Problema 13.3 Sia $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ un diffeomorfismo locale. Dimostrare che φ è un'isometria locale se e solo se per ogni parametrizzazione locale (U, X) di S , le prime forme fondamentali indotte su U da X e da $\varphi \circ X$ sono le stesse.

Problema 13.4 Sia S una superficie parametrizzata di rivoluzione. Dimostrare che le rotazioni attorno al suo asse sono isometrie di S .

Problema 13.5 Un'applicazione $f : S_1 \rightarrow S_2$ è una trasformazione *localmente conforme* se per ogni $p \in S_1$ esiste un aperto V di S_1 , $p \in V$, e un aperto $\bar{V}$ di S_2 , $f(p) \in \bar{V}$, tale che $f : V \rightarrow \bar{V}$ è un'applicazione conforme, cioè per ogni $q \in V$ esiste un $\lambda(q) > 0$ tale che:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_{S_1} = \lambda(q) \langle df(w_1), df(w_2) \rangle_{S_2}, \quad \forall w_1, w_2 \in T_q S_1$$

Un'applicazione differenziabile $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ *conserva gli angoli* se per ogni $p \in S_1$ e per ogni coppia $v_1, v_2 \in T_p S_1$ si ha

$$\cos \widehat{v_1, v_2} = \cos d\varphi_p(\widehat{v_1}, \widehat{d\varphi_p(v_2)}).$$

Dimostrare che φ è localmente conforme se e solo se conserva gli angoli.

Problema 13.6 Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, dove u e v sono funzioni differenziabili che soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Mostrare che φ è una applicazione localmente conforme da $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ a $\mathbb{R}^2$, dove $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u_x^2 + u_y^2 = 0\}$.

Problema 13.7 Sia $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, data da

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

con $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi\}$, una parametrizzazione della sfera unitaria $\mathbb{S}^2$. Si ponga

$$u = \log \tan(\varphi/2), \quad v = \theta.$$

Mostrare che

$$Y(u, v) = \left(\frac{1}{\cosh u} \cos v, \frac{1}{\cosh u} \sin v, -\tanh u \right).$$

è una nuova parametrizzazione dell'aperto coordinato $X(U) = V$. Dimostrare inoltre che nella parametrizzazione Y i coefficienti della prima forma fondamentale sono

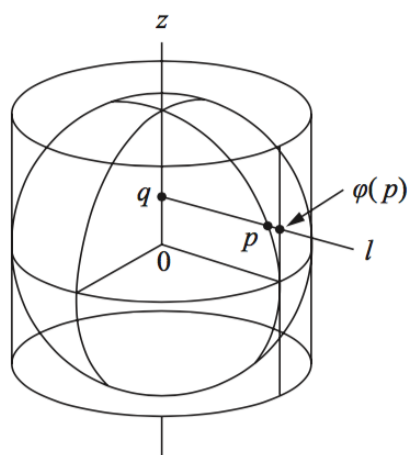
$$E = G = \left(\frac{1}{\cosh u} \right)^2, \quad F = 0$$

Quindi, $Y^{-1} : V \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione conforme che trasforma i meridiani e i paralleli di $\mathbb{S}^2$ in rette del piano. Questa è chiamata la proiezione di Mercatore.

Problema 13.8 Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera unitaria e sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ il cilindro circoscritto. Sia

$$\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} = M \rightarrow C$$

l'applicazione definita nel modo seguente. Per $p \in M$ si consideri la retta per p perpendicolare all'asse z e sia q il punto di intersezione di tale retta con l'asse z . Sia l la semiretta da q passante per p . Definiamo $\varphi(p) = C \cap l$.



Dimostrare che φ conserva l'area, nel senso che l'area di ogni regione $R \subset M$ è uguale all'area di $\varphi(R)$. Dire se φ è un'applicazione localmente conforme.

14. Il Teorema Egregium di Gauss

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di isometria locale tra superfici che ci ha permesso di chiarire il significato della geometria intrinseca, cioè delle proprietà geometriche di una superficie che sono invarianti per isometrie locali. Abbiamo anche osservato che la funzione curvatura media non ha carattere intrinseco. Il presente capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione e alle conseguenze del fatto che, diversamente dalla curvatura media, la curvatura di Gauss ha carattere intrinseco.

14.1 I simboli di Christoffel

Sia S una superficie regolare e sia (U, X) una carta locale. Siano X_u, X_v i campi coordinati e sia $N = X_u \wedge X_v / \|X_u \wedge X_v\|$ il campo di vettori normale unitario definito su $X(U)$. Allora, in ogni punto di $X(U)$ la terna $\{X_u, X_v, N\}$ forma un riferimento di $\mathbb{R}^3$ chiamato riferimento locale adattato di $\mathbb{R}^3$. Segue che le derivate seconde del vettore posizione $X(u, v)$ si possano esprimere, in ogni punto di U , come combinazione lineare della base $\{X_u, X_v, N\}$, cioè

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + h_{11} N \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + h_{12} N \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + h_{21} N \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + h_{22} N \end{cases} \quad (14.1)$$

dove le funzioni Γ_{ij}^k sono chiamate *simboli di Christoffel*. Si trova subito, poiché $X_{uv} = X_{vu}$, che $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Inoltre

$$h_{11} = \langle X_{uu}, N \rangle = e, \quad h_{12} = h_{21} = \langle X_{uv}, N \rangle = f, \quad h_{22} = \langle X_{vv}, N \rangle = g.$$

Nel seguito denotiamo con $u_1 = u$ e con $u_2 = v$ così che la (14.1) assume la forma

$$\begin{cases} X_{11} = \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + h_{11} N \\ X_{12} = \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 + h_{12} N \\ X_{22} = \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 + h_{22} N \end{cases} \quad (14.2)$$

Moltiplicando scalarmente le tre equazioni in (14.2) per X_1 e X_2 si ottengono i tre sistemi

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{11}, X_1 \rangle = \frac{1}{2} E_1 \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{11}, X_2 \rangle = F_1 - \frac{1}{2} E_2 \end{cases} \quad (14.3)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{12}, X_1 \rangle = \frac{1}{2} E_2 \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{12}, X_2 \rangle = \frac{1}{2} G_1 \end{cases} \quad (14.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{22}, X_1 \rangle = F_2 - \frac{1}{2} G_1 \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{22}, X_2 \rangle = \frac{1}{2} G_2 \end{cases} \quad (14.5)$$

Dove, per calcolare ad esempio $\langle X_{11}, X_2 \rangle$ si è derivata rispetto ad u_1 l'identità $\langle X_1, X_2 \rangle = F$ ottenendo $\langle X_{11}, X_2 \rangle = F_1 - \langle X_1, X_{21} \rangle = F_1 - 1/2 E_2$.

Si osservi che i tre sistemi si possono pensare come sistemi lineari 2×2 nelle incognite $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ il primo $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2$ il secondo e $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ il terzo. Inoltre, il determinante della matrice dei coefficienti di ciascun sistema è pari a $EG - F^2 \neq 0$ quindi i sistemi hanno un'unica soluzione che può essere data nella forma che segue. Se indichiamo con

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

si può verificare, risolvendo i sistemi (14.3)–(14.5), che

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 g^{km} \{ \partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij} \}, \quad i, j, k \in \{1, 2\}. \quad (14.6)$$

■ **Esempio 14.1** Per una parametrizzazione ortogonale ($F = g_{12} = g_{21} = 0$) si trova

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_v}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

■

■ **Esempio 14.2** Per una superficie di rotazione parametrizzata da

$$\begin{aligned} X: (0, 2\pi) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \end{aligned}$$

con $\alpha(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v))$ non necessariamente parametrizzata con l'ascissa curvilinea, si ottiene

$$E = g_{11} = \varphi^2(v), \quad F = g_{12} = g_{21} = 0, \quad G = g_{22} = \varphi'^2(v) + \psi'^2(v)$$

La (14.7) restituisce

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{\varphi\varphi'}{\varphi'^2 + \psi'^2}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\varphi'}{\varphi} \\ \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{\varphi'^2 + \psi'^2}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

■

L'equazione (14.6) mostra che i simboli di Christoffel dipendono esclusivamente dai coefficienti della prima forma fondamentale e dalle loro derivate.

14.2 Il Teorema Egregium

Data una superficie S , nel seguito denotiamo con $X^\top$ la proiezione ortogonale sul piano tangente di un campo di vettori X a valori in $\mathbb{R}^3$ definito lungo la superficie S . Dalle (14.2) si ottiene immediatamente

$$\begin{cases} X_{11}^\top = \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 \\ X_{12}^\top = \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 \\ X_{22}^\top = \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 \end{cases} \quad (14.9)$$

Consideriamo adesso la quantità

$$\langle (X_{22}^\top)_1 - (X_{12}^\top)_2, X_1 \rangle. \quad (14.10)$$

Importante: dalle (14.9) e dal fatto che i simboli di Christoffel dipendono dai coefficienti della prima forma fondamentale e dalle loro derivate si deduce che l'espressione (14.10) dipende anch'essa esclusivamente dai coefficienti della prima forma fondamentale e dalle loro derivate (si tenga presente che i termini del tipo $(X_{22}^\top)_1$ contengono anche termini dipendenti dalle h_{ij} che però risultano nulli una volta eseguito il prodotto scalare con X_1). La sua espressione esplicita è piuttosto complicata ma è un utile esercizio calcolare la (14.10) nel caso $F = 0$ avvalendosi delle espressioni (14.7) per i simboli di Christoffel. Si ottiene

$$\langle (X_{22}^\top)_1 - (X_{12}^\top)_2, X_1 \rangle = -\frac{\sqrt{EG}}{2} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}, \quad F = 0. \quad (14.11)$$

Procediamo adesso ad un calcolo alternativo dell'espressione (14.10). Per questo, scriviamo la (14.9) nel seguente modo equivalente

$$\begin{cases} X_{11}^\top = X_{11} - \langle X_{11}, N \rangle N = X_{11} + \langle X_1, N_1 \rangle N \\ X_{12}^\top = X_{12} - \langle X_{12}, N \rangle N = X_{12} + \langle X_1, N_2 \rangle N \\ X_{22}^\top = X_{22} - \langle X_{22}, N \rangle N = X_{22} + \langle X_2, N_2 \rangle N. \end{cases} \quad (14.12)$$

Derivando $X_{12}^\top$ e $X_{22}^\top$ si trova

$$\begin{cases} (X_{12}^\top)_2 = X_{122} + \langle X_1, N_2 \rangle_2 N + \langle X_1, N_2 \rangle N_2 \\ (X_{22}^\top)_1 = X_{221} + \langle X_2, N_2 \rangle_1 N + \langle X_2, N_2 \rangle N_1. \end{cases} \quad (14.13)$$

L'espressione (14.10) diventa

$$\begin{aligned} \langle (X_{22}^\top)_1 - (X_{12}^\top)_2, X_1 \rangle &= \langle X_2, N_2 \rangle \langle X_1, N_1 \rangle - \langle X_1, N_2 \rangle \langle X_1, N_2 \rangle \\ &= (eg - f^2). \end{aligned}$$

Infine, dalla (10.4) si perviene all'importante equazione

$$K = \frac{\langle (X_{22}^\top)_1 - (X_{12}^\top)_2, X_1 \rangle}{EG - F^2}. \quad (14.14)$$

L'equazione (14.14) manifesta il fatto sorprendente che, nonostante la curvatura di Gauss K sia definita utilizzando la seconda forma fondamentale della superficie, di fatto dipende esclusivamente dai coefficienti della prima forma fondamentale e dalle loro derivate. Questo risultato ci permette di dimostrare il celebre

Teorema 14.1 — Teorema Egregium di Gauss. Siano S_1 e S_2 due superfici regolari localmente isometriche e siano K_1, K_2 le corrispondenti curvature di Gauss. Allora

$$K_2(\varphi(p)) = K_1(p), \quad \forall p \in S_1$$

dove $\varphi : V \rightarrow W$ è l'isometria da un aperto V di p in un aperto W di S_2 .

Dimostrazione. Sia $p \in S_1$ e sia $\varphi : V \rightarrow W$ l'isometria da un aperto V di p in un aperto W di S_2 . Sia (U, X) una carta locale con $p \in X(U)$ e supponiamo che $V \subseteq X(U)$ (se non fosse basterebbe restringere V). Allora $\bar{X} = \varphi \circ X : X^{-1}(V) \rightarrow S_2$ definisce una carta locale di S_2 intorno al punto $\varphi(p)$ e i coefficienti E, F, G indotti da X e da $\bar{X} = \varphi \circ X$ su $X^{-1}(V)$ coincidono: basta osservare che, per esempio,

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = \langle d\varphi(X_u), d\varphi(X_u) \rangle = \langle X_u, X_u \rangle = E,$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato che $d\varphi$ conserva il prodotto scalare poiché è un'isometria. Dalla (14.14) la curvatura di Gauss dipende esclusivamente dai coefficienti E, F, G e dalle loro derivate. Quindi, essendo $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$ si ha che in un dato punto $(u, v) \in X^{-1}(V)$, $K_1(u, v) = K_2(u, v)$. In conclusione, se (u_o, v_o) sono le coordinate locali di p e quindi di $\varphi(p)$, si trova

$$K_1(p) = K_1(u_o, v_o) = K_2(u_o, v_o) = K_2(\varphi(p)).$$

■

Osservazione 14.1 Se $X : U \rightarrow S$ è una parametrizzazione ortogonale ($F = 0$) di una superficie regolare S , allora applicando la (14.14) e tenendo conto della (14.11), si ottiene la seguente formula per il calcolo della curvatura di Gauss nota con il nome di *Formula di Bianchi*:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}. \quad (14.15)$$

In particolare, se $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$, allora la (14.15) diventa

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2} \Delta \ln \lambda^2, \quad (14.16)$$

dove con Δ abbiamo indicato l'*operatore di Laplace* definito, per una funzione $f(u, v)$, da

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Osservazione 14.2 Se due superfici S_1 e S_2 hanno le corrispondenti curvatures di Gauss costanti ma diverse, allora non esiste alcuna applicazione che faccia corrispondere le due curvatures in punti corrispondenti. Conseguentemente, dal Teorema Egregium, tali superfici non possono essere localmente isometriche. Per esempio il piano non è localmente isometrico ad una sfera.

Vale il seguente risultato che si può considerare un altro risultato di rigidità della sfera

Teorema 14.2 Sia $\mathbb{S}^2(R)$ la sfera di raggio R e sia S una superficie connessa orientabile. Se esiste un'isometria locale $\varphi : \mathbb{S}^2(R) \rightarrow S$ allora S è una sfera rotonda di raggio R .

Dimostrazione. Poiché $\varphi : \mathbb{S}^2(R) \rightarrow S$ è un'isometria locale, allora φ è un diffeomorfismo locale da cui si deduce che φ è un'applicazione aperta. Segue che $\varphi(\mathbb{S}^2(R))$ è un aperto di S . Ma essendo $\mathbb{S}^2(R)$ compatta si ha che $\varphi(\mathbb{S}^2(R))$ è anche chiuso. Dalla connessione di S segue che $\varphi(\mathbb{S}^2(R)) = S$, cioè φ è suriettiva. Quindi $\mathbb{S}^2(R)$ e S sono localmente isometriche. Poiché la curvatura di Gauss di $\mathbb{S}^2(R)$ è $1/R^2 > 0$ anche S deve avere curvatura di Gauss costante positiva uguale a $1/R^2$. Inoltre, poiché $\varphi : \mathbb{S}^2(R) \rightarrow S$ è un'applicazione continua, aperta e suriettiva, si deduce che S è compatta. Dal Teorema di Hilbert-Liebmann segue che S è una sfera rotonda di raggio R . ■

Nel caso in cui le curvature di Gauss di due superfici siano costanti vale il viceversa del Teorema Egregium, cioè due superfici con curvatura di Gauss costante ed uguale sono localmente isometriche. Quest'ultimo risultato è l'enunciato del Teorema di Minding che dimostreremo nel Teorema 16.1. Invece, se le curvature di Gauss di due superfici non sono costanti, il viceversa del Teorema Egregium potrebbe non valere, come mostrato nel seguente esempio.

■ **Esempio 14.3** Mostriamo che esistono superfici regolari per le quali esiste un'applicazione che faccia corrispondere le curvature di Gauss nonostante le superfici non siano localmente isometriche. Sia

$$\begin{aligned} X : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (v \cos u, v \sin u, u) \end{aligned}$$

la parametrizzazione di un elicoide e sia

$$\begin{aligned} \bar{X} : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, \ln \bar{v}) \end{aligned}$$

la parametrizzazione di una superficie ottenuta ruotando la funzione logaritmo. La superficie che si ottiene è chiamata, per la sua forma, *superficie ad imbuto*. Si può verificare che sia $X : U \rightarrow X(U)$ che $\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U)$ sono omeomorfismi e i corrispondenti differenziali sono applicazioni iniettive per ogni $q \in U$. Segue che $S_1 = X(U)$ e $S_2 = \bar{X}(U)$ sono due superfici regolari. Le metriche indotte dalle due parametrizzazioni su U sono

$$ds^2 = (v^2 + 1)du^2 + dv^2, \quad d\bar{s}^2 = \bar{v}^2 d\bar{u}^2 + \frac{\bar{v}^2 + 1}{\bar{v}^2} d\bar{v}^2.$$

Utilizzando la (14.15) le corrispondenti curvature di Gauss assumono l'espressione

$$K = -\frac{1}{(1 + v^2)^2}, \quad \bar{K} = -\frac{1}{(1 + \bar{v}^2)^2}. \quad (14.17)$$

Quindi l'applicazione $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$, definita da $\varphi(p) = \bar{X} \circ X^{-1}(p)$ definisce un'applicazione (localmente l'identità) tale che $K_2(\varphi(p)) = K_1(p)$.

Mostriamo che le due superfici S_1 e S_2 non sono localmente isometriche. A tal scopo supponiamo, per assurdo, che siano localmente isometriche. Allora per ogni punto $p \in S_1$ dovrebbe esistere un aperto V e un'isometria $\varphi : V \rightarrow W$ con W aperto di S_2 . Sia $\varphi(u, v) = (\bar{u} = \bar{u}(u, v), \bar{v} = \bar{v}(u, v))$ l'espressione locale di tale φ . Poiché φ è un'isometria le curvature di Gauss devono coincidere in punti corrispondenti. Dall'espressione (14.17) delle curvature di Gauss in coordinate locali si deve avere

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u}(u, v) \\ \bar{v} = \pm v. \end{cases}$$

Segue che

$$\begin{cases} d\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv \\ d\bar{v} = \pm dv. \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate sopra nell'espressione di $d\bar{s}^2$ si trova

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv^2 \\ &= v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2v^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dudv + \left(v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^2 + 1 + \frac{1}{v^2} \right) dv^2. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Se φ fosse un'isometria allora la (14.18) dovrebbe coincidere con $ds^2 = (v^2 + 1)du^2 + dv^2$, da cui si ottiene, in particolare,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0$$

la quale implica

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0.$$

Se $\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 0$ dall'uguaglianza dei coefficienti E e $\bar{E}$ si trova l'assurdo

$$0 = v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2 = v^2 + 1 \neq 0.$$

Uguualmente, se $\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0$, dall'uguaglianza dei coefficienti G e $\bar{G}$ si trova l'assurdo

$$1 + \frac{1}{v^2} = 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{v^2} = 0.$$

In conclusione non può esistere un'isometria locale tra le due superfici. ■

L'importanza della formula (14.14) risiede nel fatto che per calcolare la curvatura di Gauss di una superficie è sufficiente conoscere solo la metrica indotta. Si può quindi definire la curvatura di Gauss di una superficie astratta (varietà Riemanniana) (U, g) dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $g = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$ è una metrica su U , utilizzando la (14.14). Un esempio notevole è il seguente.

■ **Esempio 14.4** Con riferimento all'Esempio 7.5, sia

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$$

il semipiano superiore aperto con la metrica

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2).$$

Utilizzando la (14.16) si trova che la curvatura di Gauss è

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2} \Delta \ln \lambda^2 = -\frac{v^2}{2} \Delta \ln v^{-2} = v^2 (\ln v)_{vv} = v^2 \left(-\frac{1}{v^2} \right) = -1.$$

La superficie Riemanniana $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$ ha quindi curvatura costante negativa pari a -1 . Questo modello, detto anche *Piano di Poincaré*, rappresenta uno dei modelli di geometria iperbolica. ■

14.3 Problemi proposti

Problema 14.1 Sia $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione isoterma, cioè

$$E = G = \lambda^2, \quad F = 0.$$

1. Mostrare che $X_{uu} + X_{vv}$ è normale alla superficie $X(U)$. Dedurre che $X_{uu} + X_{vv} = \mu N$, dove N è il campo di vettori normale unitario.
2. Calcolare la curvatura media per una parametrizzazione isoterma e dimostrare che

$$\mu = 2\lambda^2 H.$$

Concludere che $H = 0$ se e solo se $X_{uu} + X_{vv} = 0$

Problema 14.2 Siano $X, Y : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni isoterme che inducono la stessa prima forma fondamentale su U .

1. Mostrare che se X, Y soddisfano al sistema di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} X_u = -Y_v \\ X_v = Y_u \end{cases}$$

allora $H_X = H_Y = 0$, cioè X e Y definiscono due superfici parametrizzate minime.

2. Sotto le ipotesi del punto precedente mostrare che la parametrizzazione

$$Z_t = \cos t X + \sin t Y \quad t \in [0, \pi/2]$$

ha, per ogni t , curvatura media zero ed induce la stessa metrica di X e Y su U .

Problema 14.3 Si consideri l'aperto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ di $\mathbb{R}^2$ con la metrica

$$ds_D^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$$

1. Calcolare la curvatura di Gauss.
2. Dimostrare che l'applicazione $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ definita da

$$(x, y) \mapsto \left(u = \frac{4x}{x^2 + (y+1)^2}, v = \frac{4(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} - 2 \right)$$

è un'isometria tra (D, ds_D^2) e $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$.

Aiuto: per mostrare che φ è biettiva mostrate che l'applicazione

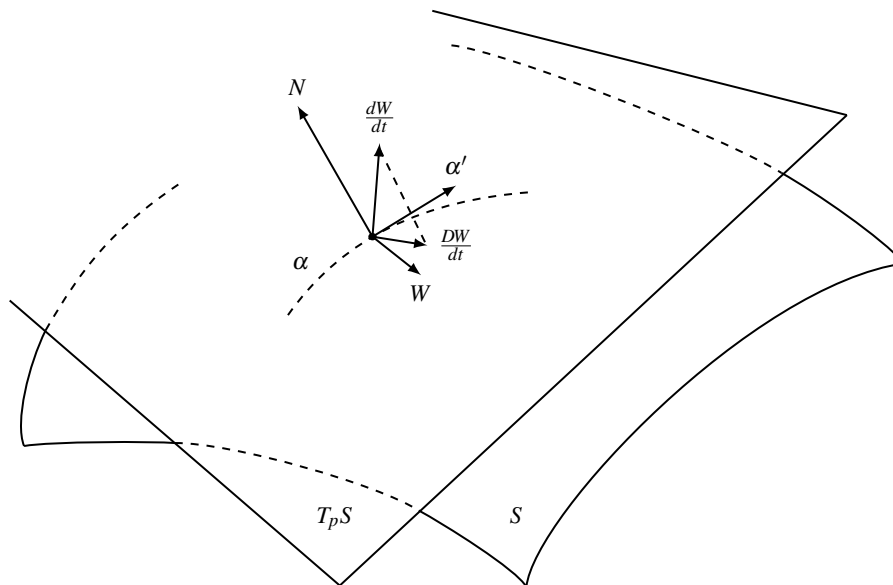
$$(u, v) \mapsto \left(x = \frac{4u}{u^2 + (v+2)^2}, y = \frac{4(v+2)}{u^2 + (v+2)^2} - 1 \right)$$

è l'inversa di φ .

15. Campi di vettori paralleli e geodetiche su una superficie

Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva differenziabile su una superficie regolare S . Un campo di vettori tangente lungo $\alpha : I \rightarrow S$ è un'applicazione $W : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $W(t) \in T_{\alpha(t)}S$ per ogni $t \in I$. Diciamo che un campo di vettori W è differenziabile in $p = \alpha(t)$ se $W(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t))$ e le funzioni W_i , $i = 1, 2, 3$, sono differenziabili in t , equivalentemente, se in una carta locale $X : U \rightarrow S$, $p \in X(U)$, $W = w_1(t)X_u + w_2(t)X_v$ e w_1, w_2 sono differenziabili in t . Ad esempio, il campo α' è un campo di vettori differenziabile lungo α .

Con riferimento alla figura seguente



la derivata $\frac{dW}{dt}$ è un vettore di $\mathbb{R}^3$ applicato nel punto $p = \alpha(t)$ il quale non risulta necessariamente tangente alla superficie. Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 15.1 La *derivata covariante* di un campo vettori tangente W lungo una curva α è il campo di vettori

$$\frac{DW}{dt} = \left[\frac{dW}{dt} \right]^\top, \quad (15.1)$$

dove $[\]^\top$ indica la proiezione ortogonale sul piano tangente T_pS .

Procediamo con il calcolo della derivata covariante di un campo di vettori tangente in coordinate locali. Sia (U, X) una carta locale con $p \in X(U)$ e sia $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ l'espressione locale di

α . Allora

$$W(t) = w_1(t) X_u((u(t), v(t))) + w_2(t) X_v((u(t), v(t)))$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= w_1' X_u + w_1 (X_{uu} u' + X_{uv} v') + w_2' X_v + w_2 (X_{uv} u' + X_{vv} v') \\ &= w_1' X_u + w_2' X_v + w_1 u' X_{uu} + (w_1 v' + w_2 u') X_{uv} + w_2 v' X_{vv}. \end{aligned}$$

Segue che, tenendo conto della (14.9),

$$\begin{aligned} \frac{DW}{dt} &= w_1' X_u + w_2' X_v + w_1 u' [X_{uu}]^\top + (w_1 v' + w_2 u') [X_{uv}]^\top + w_2 v' [X_{vv}]^\top \\ &= w_1' X_u + w_2' X_v + w_1 u' (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v) + (w_1 v' + w_2 u') (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v) \\ &\quad + w_2 v' (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v) \\ &= [w_1' + w_1 u' \Gamma_{11}^1 + (w_1 v' + w_2 u') \Gamma_{12}^1 + w_2 v' \Gamma_{22}^1] X_u \\ &\quad + [w_2' + w_1 u' \Gamma_{11}^2 + (w_1 v' + w_2 u') \Gamma_{12}^2 + w_2 v' \Gamma_{22}^2] X_v. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Dalla (15.2) si deduce che $\frac{DW}{dt}$ dipende da $\alpha'(t) = (u'(t), v'(t))$ e dai simboli di Christoffel, quindi solo dalla prima forma fondamentale definita sulla superficie. Questo significa che la derivata covariante è una quantità intrinseca.

■ **Esempio 15.1** Se $E = G = 1$, $F = 0$, cioè se S è localmente isometrica a un piano o a un cilindro, allora i simboli di Christoffel sono identicamente nulli, da cui

$$\frac{DW}{dt} = w_1' \frac{\partial}{\partial u} + w_2' \frac{\partial}{\partial v}$$

la quale rappresenta l'usuale derivata direzionale di un campo di vettori nel piano. ■

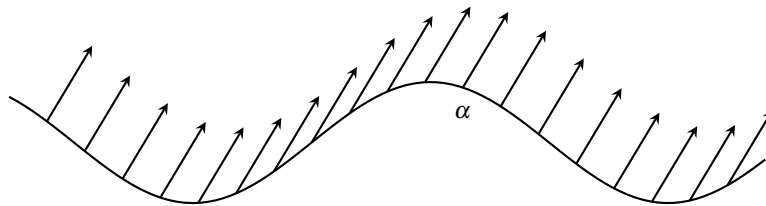
Osservazione 15.1 Geometricamente la derivata covariante di un campo di vettori W tangente ad una superficie lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S$ è la proiezione del campo di vettori $W'(t)$ sul piano tangente alla superficie lungo i punti della curva $\alpha(t)$. Siano S_1 e S_2 due superfici tangenti lungo una curva α . Allora la derivata covariante di un campo di vettori W tangente alle due superfici lungo la curva α coincide sia che sia fatta rispetto alla superficie S_1 che rispetto alla superficie S_2 . Per esempio, la derivata covariante di un campo di vettori tangente sia alla sfera che al cilindro circoscritto lungo l'equatore coincide.

■ **Definizione 15.2** Un campo di vettori tangente W lungo una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow S$ è detto *parallelo* se $\frac{DW}{dt}(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

■ **Esempio 15.2** Se S è un piano di $\mathbb{R}^3$ con la metrica piatta $ds^2 = du^2 + dv^2$ allora la derivata covariante di un campo di vettori tangente W è

$$\frac{DW}{dt} = w_1' \frac{\partial}{\partial u} + w_2' \frac{\partial}{\partial v}.$$

Segue che $\frac{DW}{dt} = 0$ se e solo se W è un campo di vettori costante lungo α così che la nozione di campo parallelo coincide con la nozione euclidea di parallelismo.



■

Proposizione 15.1 Siano W e V due campi di vettori paralleli lungo una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow S$. Allora

$$\langle W(t), V(t) \rangle = \text{costante}.$$

Dimostrazione. Se W è un campo parallelo, allora $\frac{dW}{dt} = W'(t) \perp T_{\alpha(t)}S$. Segue che

$$\frac{d}{dt} \langle W(t), V(t) \rangle = \langle W'(t), V(t) \rangle + \langle W(t), V'(t) \rangle = 0 + 0 = 0,$$

da cui $\langle W(t), V(t) \rangle$ è costante. ■

Dalla proposizione precedente si trova, in particolare, che la norma di un campo di vettori parallelo è costante lungo la curva α e che l'angolo tra due campi di vettori paralleli è costante.

Dal teorema di esistenza e unicità dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine si ha immediatamente il seguente importante fatto.

Proposizione 15.2 Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizzata su una superficie regolare S e sia $w_o \in T_{\alpha(t_o)}S$, $t_o \in I$. Allora esiste un unico campo di vettori parallelo $W(t)$ lungo α tale che $W(t_o) = w_o$.

Dimostrazione. Se $W(t)$ è un campo di vettori parallelo significa che, in una carta locale (U, X) contenente $\alpha(t_o)$, $W(t) = w_1(t)X_u + w_2(t)X_v$ con w_1, w_2 soluzioni del sistema di equazioni differenziali del primo ordine (si veda la (15.2))

$$\begin{cases} w_1' + w_1 u' \Gamma_{11}^1 + (w_1 v' + w_2 u') \Gamma_{12}^1 + w_2 v' \Gamma_{22}^1 = 0, \\ w_2' + w_2 v' \Gamma_{22}^2 + (w_1 v' + w_2 u') \Gamma_{12}^2 + w_1 u' \Gamma_{11}^2 = 0. \end{cases} \quad (15.3)$$

Quest'ultimo sistema ammette un'unica soluzione con le condizioni iniziali

$$w_1(t_o) = w_o^1, \quad w_2(t_o) = w_o^2, \quad w_o = w_o^1 X_u + w_o^2 X_v.$$

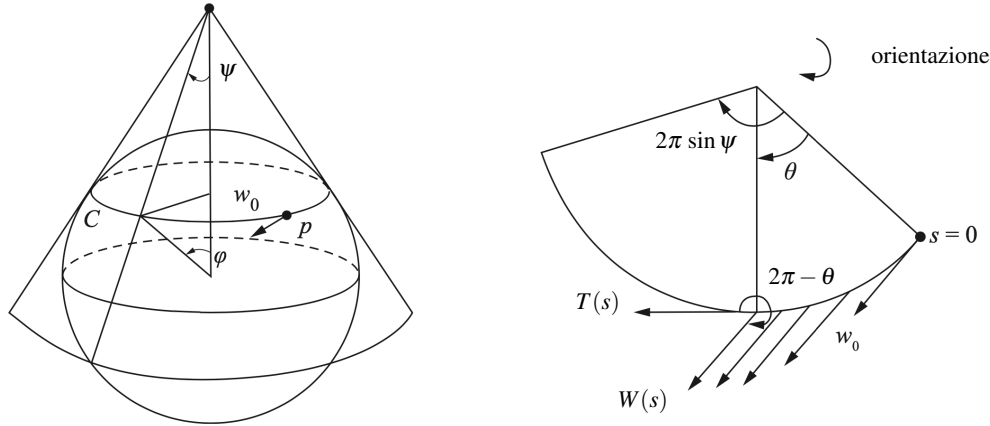
Definizione 15.3 Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizzata su una superficie regolare S e sia $w_o \in T_{\alpha(t_o)}S$, $t_o \in I$. Sia $W(t)$ l'unico campo di vettori parallelo lungo α con $W(t_o) = w_o$. Allora il vettore $W(t_1) \in T_{\alpha(t_1)}S$, $t_1 \in I$, è chiamato il *trasporto parallelo* di w_o lungo α nel punto t_1 .

Osservazione 15.2 Il trasporto parallelo dipende dal campo di vettori parallelo W soluzione del sistema (15.3) il quale dipende esclusivamente dai simboli di Christoffel, quindi dai coefficienti della prima forma fondamentale e dalle loro derivate. Segue che il trasporto parallelo è invariante per isometrie locali nel senso che, se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria locale e se $\alpha : I \rightarrow S_1$ è una curva parametrizzata, allora il trasporto parallelo di un vettore $w_o \in T_{\alpha(t_o)}S_1$ lungo α coincide con il trasporto parallelo di $d\varphi_{\alpha(t_o)}(w_o)$ lungo la curva $\varphi \circ \alpha$. Inoltre, se $W(t)$ è un campo di vettori parallelo lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S_1$ e se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria locale, allora $d\varphi_{\alpha(t)}(W(t))$ definisce un campo di vettori parallelo lungo la curva $\varphi \circ \alpha$.

Osservazione 15.3 In virtù dell'Osservazione 15.1 se due superfici S_1 e S_2 sono tangenti lungo una curva α e se $w_o \in T_{\alpha(t_o)}S_1 = T_{\alpha(t_o)}S_2$, allora il trasporto parallelo di w_o rispetto a S_1 coincide con il trasporto parallelo di w_o rispetto a S_2 . Vediamo un esempio esplicito in cui si applica

questa proprietà.

■ **Esempio 15.3** Con riferimento alla figura seguente



si consideri il cono tangente ad un parallelo C , di latitudine φ , della sfera $\mathbb{S}^2$. Sia $p \in C$ un suo punto e sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea la cui traccia appartiene al parallelo C e tale che $\alpha(0) = p$. Sia $w_0 \in T_p \mathbb{S}^2$ un vettore tangente a C in p . Determiniamo il trasporto parallelo su $\mathbb{S}^2$ di w_0 lungo α . Grazie all'Osservazione 15.3, il problema si riduce alla determinazione del trasporto parallelo di w_0 , lungo C , rispetto al cono tangente. Il cono meno un generatore è, tuttavia, isometrico ad un settore circolare aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto, in coordinate polari, da $0 < \rho < +\infty$ e $0 < \theta < 2\pi \sin \psi$, dove $\psi = \pi/2 - \varphi$ è l'angolo al vertice del cono (si veda l'Esercizio 13.2). Poiché nel piano il trasporto parallelo coincide con la nozione usuale, otteniamo, per uno spostamento s di p , corrispondente all'angolo centrale θ , che l'angolo orientato formato dal vettore tangente $T(s)$ con il trasporto parallelo $W(s)$ è dato da $2\pi - \theta$. Ripiegando il settore circolare, in modo che risulti il cono tangente alla sfera lungo il parallelo, il vettore $W(s)$ diviene il trasporto parallelo, lungo il parallelo della sfera, del vettore w_0 . ■

Osservazione 15.4 Se $\alpha : I \rightarrow S, t \in I$, è una curva regolare, il trasporto parallelo non dipende dalla parametrizzazione della traccia $\alpha(I)$. Infatti, sia $\beta : J \rightarrow S, \sigma \in J$, una riparametrizzazione di α ed indichiamo con $t(\sigma)$ il diffeomorfismo da J a I . Allora per il campo di vettori $W(t(\sigma))$ si trova dalla (15.2)

$$\frac{DW}{d\sigma} = \frac{DW}{dt} \frac{dt}{d\sigma}.$$

Poiché $dt/d\sigma \neq 0$ segue che $W(t)$ è parallelo se e solo se $W(\sigma)$ è parallelo.

15.1 Geodetiche su una superficie

Definizione 15.4 Una curva parametrizzata $\gamma : I \rightarrow S$ è una *geodetica* in $t_0 \in I$ se γ' è un campo di vettori parallelo lungo γ in t_0 . La curva γ è detta una *geodetica parametrizzata* se è una geodetica per ogni $t \in I$.

Se $\gamma : I \rightarrow S$ è una geodetica parametrizzata allora

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0, \quad \forall t \in I.$$

In particolare, per una geodetica non costante $\|\gamma'\| = c = \text{costante}$ da cui la funzione ascissa curvilinea è data da $s(t) = ct + c_1$. Quindi se $\gamma : I \rightarrow S$ è una geodetica parametrizzata l'ascissa curvilinea

è una funzione affine del parametro t .

Siamo pronti per dare la seguente definizione

Definizione 15.5 Una curva regolare $C \subseteq S$ di una superficie regolare S è una *geodetica* se, per ogni $p \in C$, la parametrizzazione con ascissa curvilinea $\alpha(s)$ di un intorno di p è una geodetica parametrizzata.

■ **Esempio 15.4** Nel piano $\mathbb{R}^2$ con la metrica piatta $ds^2 = du^2 + dv^2$, una curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ è una geodetica parametrizzata se e solo se

$$\frac{D\gamma'}{dt} = \gamma''(t) = 0$$

quindi se e solo se $\gamma(t) = At + B, A, B \in \mathbb{R}^2$, cioè la traccia di γ è una retta. ■

■ **Esempio 15.5** Se una retta r dello spazio $\mathbb{R}^3$ è contenuta in una superficie regolare S , allora la retta r è una geodetica della superficie. Infatti, sia $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di r con l'ascissa curvilinea. Allora $\gamma'' = 0$ da cui

$$\frac{D\gamma'}{ds} = (\gamma''(s))^\top = 0.$$

■

Osservazione 15.5 — Esistenza ed unicità delle geodetiche. Sia $\gamma: I \rightarrow S$ una curva parametrizzata di una superficie regolare S . Sia (U, X) una carta locale e supponiamo che $\gamma(I) \subseteq X(U)$ da cui $\gamma' = u'X_u + v'X_v$. Segue dalla (15.3) che γ definisce una geodetica parametrizzata se e solo se

$$\begin{cases} u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases} \quad (15.4)$$

In particolare, dal teorema di esistenza e unicità dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie si ha immediatamente la seguente importante proposizione.

Proposizione 15.3 Dato un punto $p \in S$ ed un vettore $v_p \in T_p S$ esiste ed è unica la geodetica uscente da p con velocità v_p .

Osservazione 15.6 Sia $\gamma: (a, b) \rightarrow S$ una curva parametrizzata di una superficie regolare S e sia $(u(t), v(t))$ la sua parametrizzazione locale in una carta locale (U, X) . Sia $\alpha: (a/\lambda, b/\lambda) \rightarrow S$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, la curva parametrizzata $\alpha(t) = \gamma(\lambda t)$ e siano $u_\alpha(t) = u(\lambda t)$ e $v_\alpha(t) = v(\lambda t)$ le componenti locali di α . Allora se γ è una geodetica parametrizzata, cioè se $(u(t), v(t))$ soddisfano al sistema (15.4), anche α è una geodetica parametrizzata. Per convincersi, basta osservare che

$$\begin{cases} u''_\alpha + u'^2_\alpha \Gamma_{11}^1 + 2u'_\alpha v'_\alpha \Gamma_{12}^1 + v'^2_\alpha \Gamma_{22}^1 = \lambda^2 (u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1), \\ v''_\alpha + u'^2_\alpha \Gamma_{11}^2 + 2u'_\alpha v'_\alpha \Gamma_{12}^2 + v'^2_\alpha \Gamma_{22}^2 = \lambda^2 (v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2). \end{cases}$$

■ **Esempio 15.6 — Geodetiche della sfera.** Da un punto di vista esterno alla superficie S , una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea γ è una geodetica se il vettore accelerazione $\gamma''(s) = kN_\gamma(s)$ è normale al piano tangente, cioè se è parallelo alla normale alla superficie. In altre parole, una curva regolare $C \subseteq S$, con curvatura $k \neq 0$, è una geodetica se e solo se la sua normale principale $N_\gamma(s)$ è parallela alla normale a S in p in ciascun punto $p \in C$. Ad esempio, i cerchi massimi di una sfera $\mathbb{S}^2$ sono geodetiche. Infatti, i cerchi massimi C si ottengono intersecando la sfera con un piano che passa per il centro O della sfera. La normale principale in un punto $p \in C$

ha la direzione della retta che collega p con O , poiché C è un cerchio di centro O . In più, per una sfera, la normale alla superficie ha la stessa direzione del vettore posizione. Segue che la normale principale di un cerchio massimo è parallela alla normale della superficie, da cui la tesi desiderata. Inoltre, per ogni punto p della sfera $\mathbb{S}^2$ e per ogni vettore tangente $v_p \in T_p\mathbb{S}^2$, passa esattamente un cerchio massimo, che, come abbiamo dimostrato prima, è una geodetica. Pertanto, per l'unicità vista nell'Osservazione 15.5, i cerchi massimi sono le uniche geodetiche della sfera (il lettore è invitato a svolgere tutto il ragionamento necessario per concludere che se α è una geodetica uscente da un punto p allora è un cerchio massimo). ■

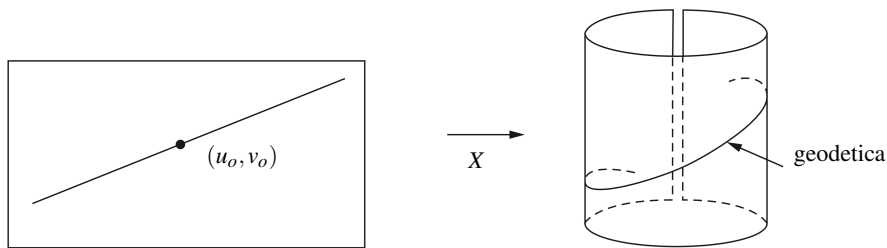
■ **Esempio 15.7 — Geodetiche del cilindro.** Per il cilindro circolare retto $x^2 + y^2 = 1$ è chiaro che i cerchi ottenuti dall'intersezione del cilindro con i piani orizzontali sono geodetiche. Questo perché la normale principale di un parallelo in uno qualsiasi dei suoi punti è parallela alla normale al cilindro in quel punto. D'altra parte, dall'Esempio 15.5, le rette verticali del cilindro (meridiani) sono delle geodetiche. Per verificare l'esistenza di altre geodetiche sul cilindro passanti per un dato punto p consideriamo l'isometria locale $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ dal piano al cilindro. In un intorno di un punto $p = X(u_o, v_o)$ l'eventuale geodetica può essere parametrizzata da $X(u(s), v(s))$, dove s è l'ascissa curvilinea. Poiché, per l'Osservazione 15.2, le geodetiche sono invarianti per isometrie locali, la curva $(u(s), v(s))$ deve essere una geodetica del piano passante per (u_o, v_o) . Ma le geodetiche del piano sono i segmenti di rette. Pertanto, esclusi i casi già studiati,

$$u(s) = as + u_o, \quad v(s) = bs + v_o, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a, b \neq 0.$$

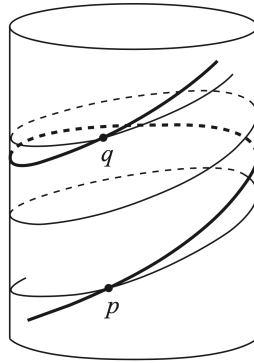
Ne consegue che se una curva regolare C (che non è né un parallelo o un meridiano) è una geodetica del cilindro allora, localmente, può essere parametrizzata da

$$\gamma(s) = (\cos(as + u_o), \sin(as + u_o), bs + v_o), \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a, b \neq 0,$$

la quale rappresenta un elica. In questo modo vengono determinate tutte le geodetiche di un cilindro circolare retto.



È importante osservare che dati due punti su un cilindro che non si trovano nello stesso parallelo, è possibile collegarli attraverso un numero infinito di eliche. Questo fatto significa che due punti di un cilindro possono, in generale, essere collegati attraverso un numero infinito di geodetiche, in contrasto con la situazione nel piano. Si noti che tale situazione può verificarsi solo con geodetiche che effettuano un *giro completo*, poiché il cilindro meno un generatore è isometrico (diffeomorfo) ad una striscia di piano.



■

15.2 La curvatura geodetica

Cerchiamo adesso di determinare, per una curva su una superficie, una nozione di curvatura che sia l'analogia di quella di curvatura con segno per una curva del piano. Iniziamo considerando un campo di vettori tangente unitario W lungo una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow S$. Allora $W'(t) \perp W(t)$ da cui anche $\frac{DW}{dt} \perp W(t)$. Segue che

$$\frac{DW}{dt} \parallel (N(t) \wedge W(t)),$$

dove $N(t)$ rappresenta la restrizione del campo normale della superficie alla curva α . Quindi esiste una funzione $\lambda(t)$ tale che

$$\frac{DW}{dt} = \lambda(t) (N(t) \wedge W(t)).$$

Definizione 15.6 Il numero $\lambda(t)$ si chiama *valore algebrico* della derivata covariante $\frac{DW}{dt}$ in t e si indica con

$$\left[\frac{DW}{dt} \right].$$

Osservazione 15.7 Il valore algebrico di un campo di vettori tangente unitario $W(t)$ lungo una curva α si può calcolare tramite la formula

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = \lambda(t) = \langle W'(t), N(t) \wedge W(t) \rangle.$$

Infatti, $W' = \langle W', N \rangle N + \frac{DW}{dt}$, da cui

$$\begin{aligned} \langle W'(t), N(t) \wedge W(t) \rangle &= \left\langle \frac{DW}{dt}, N(t) \wedge W(t) \right\rangle = \lambda(t) \langle N(t) \wedge W(t), N(t) \wedge W(t) \rangle \\ &= \lambda(t) \|N(t) \wedge W(t)\|^2 = \lambda(t). \end{aligned}$$

Siamo nella giusta posizione per definire la curvatura con segno di una curva su una superficie.

Definizione 15.7 Sia C una curva regolare di una superficie regolare S orientata e sia $\alpha(s)$ una parametrizzazione con l'ascissa curvilinea di C in un intorno di un punto $p \in C$, $p = \alpha(s)$. Il

numero

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'}{ds} \right] = \langle \alpha''(s), N(s) \wedge \alpha'(s) \rangle$$

è chiamato *curvatura geodetica* di C in $p = \alpha(s)$.

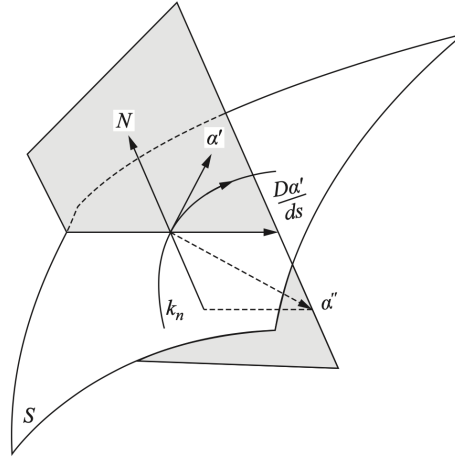
Osservazione 15.8 Una curva C di una superficie regolare è una geodetica se e solo se la curvatura geodetica si annulla in tutti i suoi punti.

■ **Esempio 15.8** Sia S il piano xy e $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ una curva nel piano $z = 0$ parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se scegliamo la normale $N = (0, 0, 1)$, allora $N \wedge \alpha'(s) = (-y'(s), x'(s), 0) = J\alpha'(s)$ da cui

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), N \wedge \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = k_2(s),$$

confermando che la curvatura geodetica è una generalizzazione, per una curva su una superficie, della curvatura con segno per le curve piane. ■

Da un punto di vista esterno alla superficie, con riferimento alla figura seguente



il vettore α'' si decompone come

$$\alpha'' = \frac{D\alpha'}{ds} + k_n N$$

da cui segue la relazione

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2, \quad (15.5)$$

dove k rappresenta la curvatura della curva in $\mathbb{R}^3$ mentre k_n è la curvatura normale.

■ **Esempio 15.9** Si consideri la sfera $\mathbb{S}^2$ parametrizzata da

$$\begin{aligned} X: U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) &\mapsto (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

Sia C il parallelo $\varphi = \varphi_o$. Allora C è un cerchio di raggio $\sin \varphi_o$ da cui $k^2 = 1/\sin^2 \varphi_o$. Inoltre, la curvatura normale in un qualunque punto di $\mathbb{S}^2$ rispetto ad ogni direzione tangente vale $k_n = 1$. Applicando la (15.5) si ottiene

$$k_g^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi_o} - 1 = \frac{\cos^2 \varphi_o}{\sin^2 \varphi_o}.$$

La formula precedente mostra che l'unico parallelo che sia una geodetica è quello equatoriale per $\varphi = \pi/2$ in accordo con il fatto che le geodetiche della sfera sono i cerchi massimi. ■

Siano V e W due campi di vettori unitari lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S$. Sia $V^\perp$ il campo di vettori tangente unitario lungo α , ortogonale a V , tale che $V \wedge V^\perp = N$ dove N è il campo normale unitario lungo S . Segue che

$$W(t) = a(t)V(t) + b(t)V^\perp(t),$$

dove $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni differenziabili con $a^2 + b^2 = 1$. Con una costruzione simile a quella vista nella Proposizione 2.2 si mostra che esiste una funzione differenziabile $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (unica a meno di una costante) tale che $a(t) = \cos \phi(t)$ e $b(t) = \sin \phi(t)$. Di fatto, tale funzione si scrive come

$$\phi(t) = \phi_o + \int_{t_o}^t (ab' - ba')d\tau$$

dove $t_o \in I$ e ϕ_o è tale che $a(t_o) = \cos \phi_o$ e $b(t_o) = \sin \phi_o$. Chiamiamo ϕ la funzione angolo tra $V(t)$ e $W(t)$.

Vale il seguente lemma.

Lemma 15.1 Sia S una superficie regolare e siano V e W due campi di vettori unitari tangenti ad S lungo una curva $\alpha : I \rightarrow S$. Allora

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] - \left[\frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\phi}{dt}, \quad (15.6)$$

dove $\phi(t)$ è la funzione angolo tale che

$$W(t) = \cos \phi V(t) + \sin \phi V^\perp(t).$$

Dimostrazione. Sia $N(t) = N(\alpha(t))$ la normale unitaria alla superficie lungo la curva. Poniamo $JV = N \wedge V$. Poiché V è unitario e tangente alla superficie, $\{V, JV\}$ è una base ortonormale positiva del piano tangente lungo α . Per definizione della funzione angolo,

$$W = \cos \phi V + \sin \phi JV.$$

Indichiamo con

$$a(t) = \left[\frac{DV}{dt} \right]$$

il valore algebrico della derivata covariante di V . Questo significa che

$$\frac{DV}{dt} = aJV.$$

Il passaggio centrale è dimostrare che

$$\frac{D(JV)}{dt} = -aV.$$

Possiamo verificarlo usando soltanto le relazioni di ortonormalità e la compatibilità della derivata covariante con il prodotto scalare. Derivando $\langle JV, JV \rangle = 1$, otteniamo

$$\left\langle \frac{D(JV)}{dt}, JV \right\rangle = 0.$$

Il campo $D(JV)/dt$ è tangente e ortogonale a JV , dunque è un multiplo di V . Per determinarne il coefficiente deriviamo $\langle V, JV \rangle = 0$:

$$0 = \left\langle \frac{DV}{dt}, JV \right\rangle + \left\langle V, \frac{D(JV)}{dt} \right\rangle = a + \left\langle V, \frac{D(JV)}{dt} \right\rangle.$$

Pertanto

$$\frac{D(JV)}{dt} = -aV.$$

Ora deriviamo covariantemente

$$W = \cos \varphi V + \sin \varphi JV.$$

Applicando la regola di Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{DW}{dt} &= -\varphi' \sin \varphi V + \cos \varphi \frac{DV}{dt} + \varphi' \cos \varphi JV + \sin \varphi \frac{D(JV)}{dt} \\ &= -\varphi' \sin \varphi V + a \cos \varphi JV + \varphi' \cos \varphi JV - a \sin \varphi V \\ &= (a + \varphi')(-\sin \varphi V + \cos \varphi JV). \end{aligned}$$

D'altra parte, poiché $N \wedge (JV) = -V$,

$$N \wedge W = \cos \varphi (N \wedge V) + \sin \varphi N \wedge (JV) = -\sin \varphi V + \cos \varphi JV.$$

Quindi

$$\frac{DW}{dt} = (a + \varphi')(N \wedge W).$$

Per definizione, il coefficiente di $N \wedge W$ è il valore algebrico della derivata covariante di W . Ne segue

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = a + \varphi' = \left[\frac{DV}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

ossia

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] - \left[\frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}.$$

■

Osservazione 15.9 Sia C una curva regolare e sia $\alpha(s)$ una parametrizzazione locale di C con l'ascissa curvilinea. Sia $V(s)$ un campo di vettori unitario parallelo lungo α . Se poniamo $W(s) = \alpha'(s)$ la (15.6) implica che

$$k_g = \left[\frac{D\alpha'}{ds} \right] = \frac{d\phi}{ds}.$$

Quindi la curvatura geodetica, così come la curvatura con segno per le curve piane, misura la velocità con cui varia la funzione angolo tra un campo di vettori unitario parallelo lungo α e il vettore velocità α' .

Proposizione 15.4 Sia S una superficie regolare orientata e sia (U, X) una carta locale ortogonale. Sia $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva su $X(U) \subseteq S$ e sia W un campo di vettori unitario tangente ad S lungo α . Allora

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\phi}{dt}, \quad (15.7)$$

dove ϕ è la funzione angolo tra X_u e $W(t)$ calcolata in accordo con l'orientazione scelta su S .

Dimostrazione. Siccome $X : U \rightarrow S$ è una parametrizzazione ortogonale i campi $e_1 = X_u/\sqrt{E}$ e $e_2 = X_v/\sqrt{G}$ formano una base ortonormale dello spazio tangente lungo la curva α . Segue che

$$W(t) = \cos \phi e_1 + \sin \phi e_2,$$

dove ϕ è la funzione angolo tra X_u e $W(t)$. Dalla (15.6) si trova

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\phi}{dt}.$$

Rimane quindi da calcolare $\left[\frac{De_1}{dt} \right]$. Si ha

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u u' + (e_1)_v v', e_2 \rangle.$$

Adesso, derivando rispetto a u la quantità $\langle X_u, X_v \rangle = 0$, si trova $\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{uv} \rangle = -(1/2)E_v$. Quindi

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_u u', e_2 \rangle &= \left\langle \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}} + \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \right)_u X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle u' = \left\langle \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle u' = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v u', \\ \langle (e_1)_v v', e_2 \rangle &= \left\langle \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}} + \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \right)_v X_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle v' = \left\langle \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle v' = \frac{1}{2\sqrt{EG}} G_u v', \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Osservazione 15.10 Se $\alpha : I \rightarrow S$ è una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, ponendo $W = \alpha'$ nella Proposizione 15.4, si ottiene l'utile formula per il calcolo della curvatura geodetica in coordinate locali ortogonali:

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\phi}{ds}, \quad (15.8)$$

dove ϕ è la funzione angolo tra X_u e $\alpha'(s)$ calcolata in accordo con l'orientazione scelta su S .

Sia adesso $\alpha(s) = X(u(s), v_o)$, $v_o = \text{costante}$, una curva coordinata parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Ovviamente $dv/ds = 0$, mentre, da

$$\alpha' = \frac{du}{ds} X_u \quad \text{e} \quad 1 = \|\alpha'\|^2 = \left(\frac{du}{ds} \right)^2 E$$

segue che (a meno del segno, cioè del verso di percorrenza della curva α)

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

Quindi la curvatura geodetica $(k_g)_1$ lungo le curve coordinate $v = v_o$ è, dalla (15.8),

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

In modo analogo si verifica che la curvatura geodetica $(k_g)_2$ lungo le curve coordinate $u = u_o$ è

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Le formule appena trovate ci permettono di riscrivere la (15.8) nella seguente forma che prende il nome di *Formula di Liouville* (valida sempre quando $F = 0$):

$$k_g = (k_g)_1 \cos \phi + (k_g)_2 \sin \phi + \frac{d\phi}{ds}, \quad (15.9)$$

dove ϕ è la funzione angolo tra $e_1 = X_u/\sqrt{E}$ e $\alpha'(s)$ calcolata in accordo con l'orientazione scelta su S .

Per dimostrare la (15.9), si sostituiscano le espressioni di $(k_g)_1$ e $(k_g)_2$ nella (15.8) per ottenere

$$k_g = (k_g)_1 \sqrt{E} u' + (k_g)_2 \sqrt{G} v' + \frac{d\phi}{ds},$$

e si osservi che

$$\cos \phi e_1 + \sin \phi e_2 = \alpha' = u' X_u + v' X_v = \sqrt{E} u' \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \sqrt{G} v' \frac{X_v}{\sqrt{G}} = \sqrt{E} u' e_1 + \sqrt{G} v' e_2.$$

15.3 Integrazione delle geodetiche

Sia S una superficie regolare e sia (U, X) una carta locale. Dall'Osservazione 15.5 per ottenere l'espressione locale esplicita della geodetica $X(u(s), v(s))$, parametrizzata con l'ascissa curvilinea, uscente da un punto $p \in X(U)$ con velocità $v_p \in T_p S$ bisogna integrare il sistema

$$\begin{cases} u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases} \quad (15.10)$$

Quest'ultimo sistema è, di solito, piuttosto difficile rendendo il compito di trovare l'espressione esplicita delle geodetiche alquanto arduo. Vediamo in questa sezione alcuni esempi notevoli.

■ **Esempio 15.10 — Geodetiche delle superfici di rotazione.** Consideriamo una curva parametrica regolare

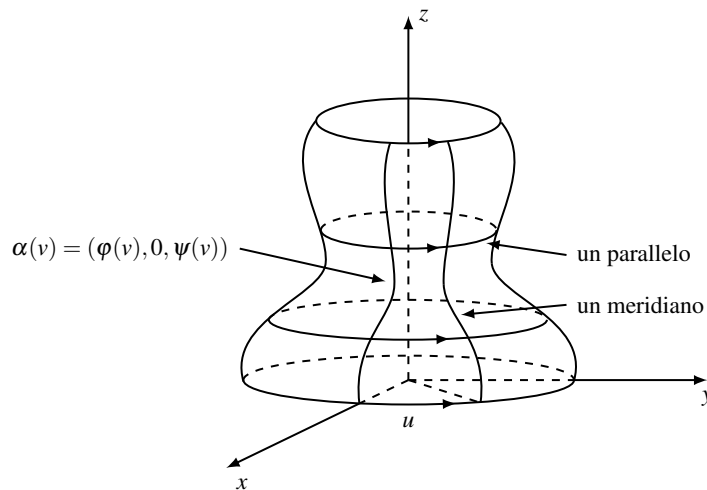
$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto (\varphi(v), 0, \psi(v)) \end{aligned}$$

la cui traccia appartiene al piano xz e con $\varphi(v) > 0$. Ruotando la traccia della curva γ attorno all'asse z si ottiene una superficie parametrizzata regolare, che abbiamo chiamato superficie di rotazione. La parametrizzazione è data da

$$\begin{aligned} X: (0, 2\pi) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \end{aligned}$$

Ricordiamo che, per una superficie di rotazione con $\gamma(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v))$ non necessariamente parametrizzata con l'ascissa curvilinea, la metrica indotta è

$$ds^2 = \varphi^2 du^2 + (\varphi'^2 + \psi'^2) dv^2$$



Nell'Esempio 14.2 abbiamo calcolato i simboli di Christoffel per una superficie di rotazione da cui segue che le equazioni delle geodetiche diventano (qui per non generare confusione utilizziamo il punto per indicare la derivata rispetto al parametro t , mentre $'$ indicherà la derivata rispetto a v)

$$\begin{cases} \ddot{u} + \frac{2\varphi\varphi'}{\varphi^2} \dot{u}\dot{v} = 0 \\ \ddot{v} - \frac{\varphi\varphi'}{\varphi'^2 + \psi'^2} \dot{u}^2 + \frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} \dot{v}^2 = 0. \end{cases} \quad (15.11)$$

Un meridiano $\alpha(s) = (u_o, v(s))$ parametrizzato con l'ascissa curvilinea soddisfa ovviamente la prima equazione del sistema (15.11). Quindi è una geodetica se e solo se

$$\ddot{v} + \frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} \dot{v}^2 = 0. \quad (15.12)$$

Adesso, $\dot{\alpha}(s) = (0, \dot{v}(s))$ da cui

$$1 = \|\dot{\alpha}\|^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2) \dot{v}^2 \Rightarrow \dot{v}^2 = \frac{1}{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Derivando l'ultima equazione si ottiene

$$2\dot{v}\ddot{v} = -2\frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^2} \dot{v} = -2\frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} \dot{v}^3$$

da cui

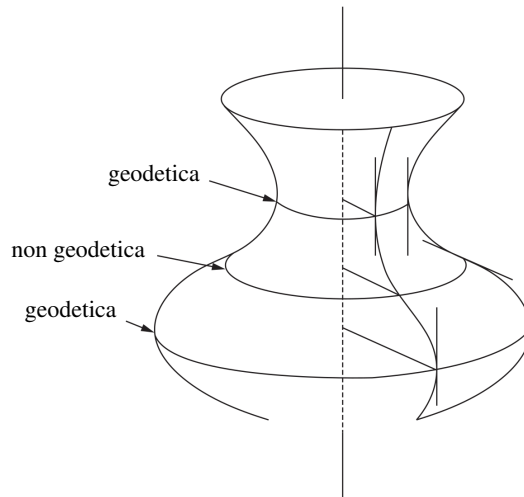
$$\ddot{v} + \frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} \dot{v}^2 = 0$$

che coincide con la (15.12). In conclusione, *tutti* i meridiani sono delle geodetiche di una superficie di rotazione.

Analizziamo adesso i paralleli. Un parallelo parametrizzato da $\alpha(s) = (u(s), v_o)$ è una geodetica se e solo se

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ \frac{\varphi\varphi'}{\varphi'^2 + \psi'^2} \dot{u}^2 = 0. \end{cases} \quad (15.13)$$

La prima condizione implica che $\dot{u} = \text{costante} \neq 0$ mentre la seconda significa che $\varphi(v_o)\varphi'(v_o)\dot{u}^2 = 0$. Segue, poiché $\dot{u} \neq 0$ e $\varphi(v_o) > 0$, che un parallelo $v = v_o$ è una geodetica se e solo se $\varphi'(v_o) = 0$, cioè se e solo se il vettore tangente alla curva profilo risulta parallelo all'asse di rotazione. Si veda la figura sotto.



Supponiamo adesso che la geodetica non sia né un parallelo né un meridiano. La prima equazione del sistema (15.11) si può riscrivere come

$$\varphi^2 \ddot{u} + 2\varphi\varphi' \dot{u}\dot{v} = \frac{d}{dt}(\varphi^2 \dot{u}) = 0$$

quindi lungo la geodetica la quantità $\varphi^2 \dot{u} = \text{costante}$. Se indichiamo con ϕ l'angolo che X_u forma con $\dot{\alpha}$ si ha

$$\cos \phi = \frac{\langle X_u, \dot{\alpha} \rangle}{\|X_u\| \|\dot{\alpha}\|} = \frac{\langle X_u, \dot{u}X_u + \dot{v}X_v \rangle}{\varphi} = \dot{u}\varphi.$$

La condizione $\varphi^2 \dot{u} = \text{costante}$ diventa quindi $\varphi \cos \phi = \text{costante}$ la quale può essere riscritta nella forma seguente che prende il nome di *relazione di Clairaut*:

$$r \cos \phi = c = \text{costante} \quad (15.14)$$

dove r è la distanza di un punto della geodetica dall'asse di rotazione. In conclusione la relazione di Clairaut afferma che:

lungo una geodetica di una superficie di rotazione che non sia né un meridiano né un parallelo il prodotto della distanza della geodetica dall'asse di rotazione per il coseno dell'angolo che il vettore tangente forma con i paralleli rimane costante.

Tale proprietà permette di studiare, da un punto di vista *qualitativo*, le geodetiche delle superfici di rotazione come vedremo in alcuni esempi. ■

■ **Esempio 15.11 — Geodetiche dell'ellissoide.** Sia S un ellissoide di rotazione di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad b > a > 0.$$

Sia α una geodetica che non sia né un parallelo né un meridiano e supponiamo che in un certo punto t_o la curva α tagli il parallelo $z = 0$ sotto un angolo $\phi_o \in (0, \pi/2)$ e poi, per $t > t_o$ prosegua verso l'alto. In t_o si ha

$$a \cos \phi_o = c, \quad a > c.$$

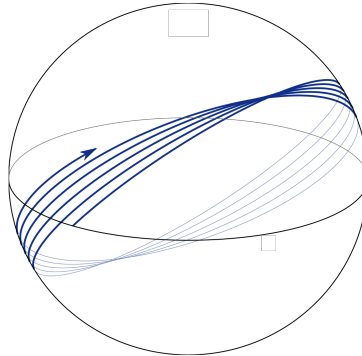
Dalla relazione di Clairaut risulta

$$r \cos \phi = c, \quad \forall t > t_o,$$

dove r è la distanza di un punto della geodetica dall'asse di rotazione. Quindi man mano che t cresce, siccome la geodetica prosegue verso l'alto, r diminuisce e, di conseguenza, $\cos \phi$ aumenta. Ovviamente $\cos \phi$ può aumentare sino a raggiungere il valore 1 per un certo valore t_1 e in tale punto

$$r_1 \cos \phi(t_1) = r_1 = c.$$

In t_1 la geodetica risulta tangente al parallelo di raggio $r = c$ del piano $z = (b/a)\sqrt{a^2 - c^2}$. Per valori di $t > t_1$ la geodetica deve proseguire verso il basso, in modo che la quantità $\cos \phi$ diminuisca, sino a raggiungere e tagliare il parallelo $z = 0$ sotto un angolo diverso da 0 e $\pi/2$. La geodetica continua quindi in modo simmetrico sino al parallelo di raggio $r = c$, del piano $z = -(b/a)\sqrt{a^2 - c^2}$, dove risulterà tangente a quest'ultimo per poi riprendere verso l'alto e ripetere il ciclo.



■ **Esempio 15.12 — Geodetiche del piano di Poincaré.** Consideriamo il semipiano aperto

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$$

con la metrica

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2).$$

Le equazioni delle geodetiche sono

$$\begin{cases} u'' - \frac{2u'v'}{v} = 0 \\ v'' + \frac{1}{v}(u'^2 - v'^2) = 0. \end{cases} \quad (15.15)$$

La prima equazione è equivalente alla condizione

$$\frac{u'}{v^2} = c = \text{costante}.$$

Si presentano due casi

$c = 0$ In questo caso $u' = 0$ da cui $u = \text{costante}$, mentre $v(s)$ è soluzione dell'equazione

$$v'' - \frac{v'^2}{v} = 0$$

la cui soluzione è $v(s) = ae^{bs}$, $a > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Segue che la curva $\alpha(s) = (u_0, ae^{bs})$ è una geodetica del Piano di Poincaré la cui traccia è una retta verticale.

$c \neq 0$ In questo caso $u' = cv^2$. Sia adesso

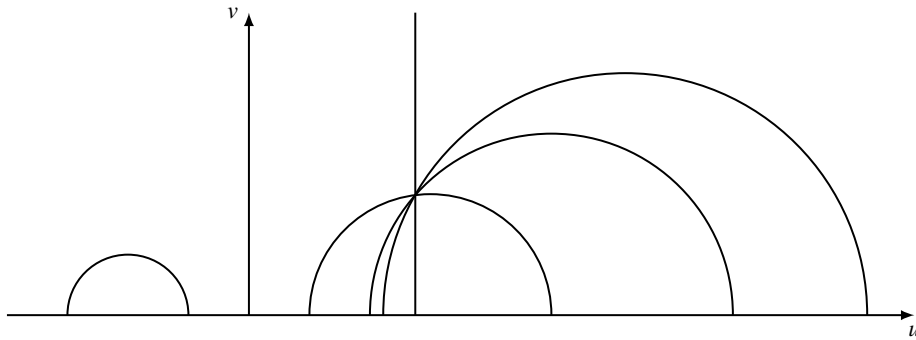
$$\xi = \frac{vv'}{u'} + u = \frac{1}{c} \frac{v'}{v} + u.$$

Utilizzando la seconda equazione del sistema (15.15) e $u'^2 = c^2v^4$ si verifica che $\xi' = 0$ da cui

$$\frac{vv'}{u'} + u = a = \text{costante} \Rightarrow 2uu' + 2vv' = 2au' \Rightarrow u^2 + v^2 - 2au = b.$$

Quindi la curva $\alpha(s) = (u(s), v(s))$ appartiene ad una circonferenza con centro sull'asse $v = 0$.

L'immagine seguente mostra i due tipi di geodetiche trovate del piano di Poincaré.



Concludiamo che le rette verticali e i semicerchi perpendicolari all'asse $v = 0$ sono geodetiche del piano di Poincaré. Queste sono tutte le geodetiche di $\mathbb{R}_+^2$, poiché per ogni punto $q \in \mathbb{R}_+^2$ e per ogni direzione uscente da q passa o una circonferenza tangente a quella retta e normale all'asse $v = 0$ oppure una retta verticale (quando la direzione è verticale).

Tale varietà riemanniana $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$ è *geodeticamente completa*, dove per geodeticamente completa (si veda anche la Definizione 16.2) intendiamo che le geodetiche possono essere definite per tutti i valori del parametro, cioè per tutti i valori reali. Per dimostrarlo, supponiamo che una geodetica parametrizzata con l'ascissa curvilinea non sia definita per tutti i valori del parametro, allora dovrà avere lunghezza finita da un punto fissato p_o . Abbiamo già osservato che le rette verticali hanno lunghezza infinita (si veda l'Esempio 7.5) sia quindi γ una semicirconferenza che interseca l'asse $v = 0$ perpendicolarmente e sia $p_o = (u_o, v_o)$ il punto di massimo della semicirconferenza. Se parametrizziamo la semicirconferenza come $\gamma(\vartheta) = (v_o \cos \vartheta + u_o, v_o \sin \vartheta)$, si trova che la lunghezza del quarto di circonferenza a destra di p_o è data da

$$\ell = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} d\vartheta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(\sin \frac{\pi}{2}) - \ln(\sin \varepsilon)) = \infty,$$

contro l'ipotesi che la lunghezza dovesse essere finita. ■

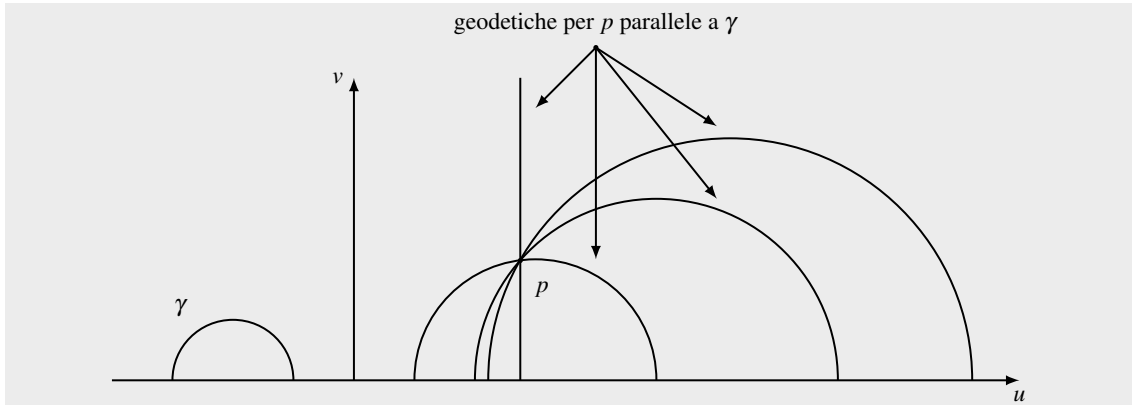
Osservazione 15.11 — Geometrie non euclidee. I cinque postulati di Euclide della geometria piana recitano

1. Per due punti passa una ed una sola retta.
2. Un segmento si può prolungare infinitamente in linea retta.
3. Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.
5. Dati un punto p e una retta r , esiste una e una sola retta per p parallela ad r .

Un modello di Geometria non Euclidea è costituito da una superficie Riemanniana (U, g) per la quale valgono l'analogo dei primi quattro postulati di Euclide ma la negazione del quinto. Gli analoghi per una superficie Riemanniana dei primi quattro postulati sono:

1. Per due punti passa una ed una sola geodetica.
2. Un geodetica si può definire per tutti i valori del parametro.
3. Esiste un cerchio geodetico con qualsiasi centro e qualsiasi raggio geodetico.
4. Dati due punti sulla superficie esiste un'isometria che li fa corrispondere.

Si può verificare che in $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$, utilizzando la completezza, valgono i primi tre postulati descritti sopra (dopo aver studiato il Capito 16 il lettore dovrebbe riuscire a fare una dimostrazione di quanto affermato). Per il quarto è necessario dare una descrizione esplicita delle isometrie di $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$, fatto che non svolgeremo in questo corso. Invece, per quanto riguarda il quinto postulato si verifica immediatamente che da un punto p che non appartiene ad una data geodetica γ si possono tracciare un numero infinito di geodetiche che non incontrano γ come mostrato nella figura seguente



La superficie Riemanniana $(\mathbb{R}_+^2, ds_{\mathbb{H}}^2)$ rappresenta quindi un modello di Geometria non Euclidea, detta *iperbolica*, dove il quinto postulato è sostituito con la negazione

5. Dato un punto p e una geodetica γ , con $p \notin \gamma$, esistono infinite geodetiche per p che non incontrano γ .

15.4 Problemi proposti

Problema 15.1

1. Mostrare che se una curva $C \subset S$ è sia curva principale che una geodetica, allora C è una curva piana.
2. Mostrare che se una geodetica (non rettilinea) è una curva piana, allora è una curva principale.
3. Fornire un esempio di una curva principale piana che non sia una geodetica.
4. Dimostrare che una curva $C \subset S$ è contemporaneamente una curva asintotica ed una geodetica se e solo se C è un segmento di retta.

Problema 15.2 Si consideri il toro di rivoluzione generato ruotando il cerchio $(x-a)^2 + z^2 = r^2$, $y=0$, attorno all'asse z ($a > r > 0$). I paralleli generati dai punti $(a+r, 0)$, $(a-r, 0)$, (a, r) sono chiamati rispettivamente il parallelo massimo, il parallelo minimo e il parallelo superiore. Verificare quale di questi paralleli è

1. una geodetica;
2. una curva asintotica;
3. una curva principale.

Problema 15.3 Intersecare il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con un piano che passa attraverso l'asse x e forma un angolo θ , $0 < \theta < \pi/2$, con il piano xy .

1. mostrare che la curva di intersezione è un'ellisse C ;
2. calcolare il valore assoluto della curvatura geodetica di C .

Problema 15.4 Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, con curvatura e torsione diverse da zero. Considerare la superficie parametrizzata

$$X(s, v) = \alpha(s) + vB(s), \quad s \in I, \quad -\varepsilon < v < \varepsilon$$

dove B è il vettore binormale di α . Dimostrare che se ε è sufficientemente piccolo, $X(I \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ è una superficie regolare della quale $\alpha(I)$ è una geodetica.

Problema 15.5 Si consideri la geodetica passante per un punto p della parte superiore ($z > 0$) di un iperboloido di rivoluzione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e sia ϕ l'angolo che la geodetica forma con il parallelo che passa attraverso p . Assumendo che $\cos \phi = 1/r$, dove r è la distanza da p all'asse z , mostrare che seguendo la geodetica nella direzione dei paralleli di raggio decrescente, questa si avvicina asintoticamente al parallelo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Problema 15.6 Sia T il toro di rivoluzione parametrizzato da

$$X(u, v) = ((r \cos v + a) \cos u, (r \cos v + a) \sin u, r \sin v)$$

Provare che

1. Se una geodetica è tangente al parallelo $v = \pi/2$, allora è interamente contenuta nella regione di T data da $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$.
2. Una geodetica che interseca il parallelo $v = 0$ sotto un angolo ϕ ($0 < \phi < \pi/2$) interseca anche il parallelo $v = \pi$ se

$$\cos \phi < \frac{a-r}{a+r}.$$

Problema 15.7 Si consideri la falda superiore del cono C di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$. Verificare che l'applicazione $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow C$, $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, è un'isometria locale se si introduce in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ la metrica $ds^2 = v^2 du^2 + 2dv^2$. Segue che l'immagine tramite φ di una geodetica di $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, ds^2 = v^2 du^2 + 2dv^2)$ è una geodetica del cono.

1. Calcolare le equazioni delle geodetiche in $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, ds^2 = v^2 du^2 + 2dv^2)$ e verificare che sono:

$$\begin{cases} u'' + \frac{2}{v} u' v' = 0 \\ v'' - \frac{v}{2} (u')^2 = 0 \end{cases}$$

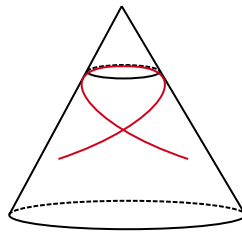
2. Integrare la prima equazione ed ottenere $u'(s) = \mu/v^2$ con $\mu > 0$, sostituire nella seconda ed integrare in modo da ottenere

$$v(s) = \sqrt{A(s-s_0)^2 + \frac{\mu^2}{2A}}, \quad A > 0,$$

Ottenere infine

$$u(s) = u_0 + \sqrt{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2A}(s-s_0)}{\mu} \right).$$

3. Utilizzando la relazione di Clairaut spiegare che il comportamento di una geodetica del cono che non sia un meridiano è quello mostrato nella figura seguente



15.5 Le equazioni di Codazzi–Mainardi - Facoltativo

Come abbiamo già notato, il punto cruciale nella dimostrazione del Teorema Egregium è dimostrare che la quantità $eg - f^2$ è determinata da E, F, G e dalle loro derivate. In questa sezione consideriamo la naturale domanda se ci siano altre relazioni tra i coefficienti delle due forme fondamentali oltre a quella fornita dalla (14.14) che chiamiamo *equazione di Gauss*:

$$\langle (X_{vv}^\top)_u - (X_{uv}^\top)_v, X_u \rangle = eg - f^2. \quad (15.16)$$

Per esempio, se $F = 0$ l'equazione di Gauss assume la forma esplicita

$$\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u = -\frac{2}{\sqrt{EG}}(eg - f^2).$$

Tale ricerca ci condurrà a una discussione sul teorema di Bonnet, parte del quale afferma che una superficie in $\mathbb{R}^3$ è “sostanzialmente” completamente determinata, a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$, dalla sua prima e seconda forma fondamentale a patto che queste ultime soddisfino alcune condizioni. Questo è l’analogo, per le superfici in $\mathbb{R}^3$, del Teorema Fondamentale della teoria locale delle curve.

Per ottenere queste condizioni, osserviamo che le equazioni (14.1) implicano delle condizioni di compatibilità determinate dal fatto che le derivate parziali miste commutano. Ad esempio, poiché $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$, si ha

$$\langle (X_{uu})_v, N \rangle = \langle (X_{uv})_u, N \rangle,$$

quindi, usando la (14.1) troviamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (X_{uu})_v, N \rangle - \langle (X_{uv})_u, N \rangle \\ &= \langle (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v, N \rangle - \langle (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u, N \rangle \\ &= f\Gamma_{11}^1 + g\Gamma_{11}^2 + e_v - e\Gamma_{12}^1 - f\Gamma_{12}^2 - f_u. \end{aligned}$$

L’ultima condizione può essere riscritta come

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 - f(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) - g\Gamma_{11}^2. \quad (15.17)$$

Allo stesso modo, considerando la differenza $\langle (X_{vv})_u, N \rangle - \langle (X_{uv})_v, N \rangle$ otteniamo

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 - f(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) - g\Gamma_{12}^2. \quad (15.18)$$

Le equazioni (15.17) e (15.18) sono chiamate *equazioni di Codazzi–Mainardi*. Nel caso di una parametrizzazione locale ortogonale, queste possono essere scritte in modo relativamente semplice in termini dei coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale,

$$\begin{cases} e_v - f_u = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) - \frac{f}{2} \left(\frac{E_u}{E} - \frac{G_u}{G} \right) \\ f_v - g_u = -\frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) - \frac{f}{2} \left(\frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{G} \right) \end{cases}.$$

Nel caso di una parametrizzazione locale isotermica con $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$, la curvatura media H è data da $2H = (e + g)/\lambda^2$, da cui segue che le equazioni di Codazzi–Mainardi diventano

$$e_v - f_u = 2H\lambda\lambda_v, \quad g_u - f_v = 2H\lambda\lambda_u.$$

Tornando alla situazione generale, quanto sopra riportato mostra che la formula di Gauss e le equazioni di Codazzi–Mainardi sono necessariamente soddisfatte in una carta locale di una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Il seguente teorema, che enunceremmo senza dimostrazione, mostra che tali condizioni sono anche sufficienti.

Teorema 15.1 — Teorema di Bonnet. Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e siano $E, F, G; e, f, g$ funzioni differenziabili definite su U con $E > 0, G > 0$ e $EG - F^2 > 0$. Supponiamo che le funzioni $E, F, G; e, f, g$ soddisfino la formula di Gauss e le equazioni di Codazzi–Mainardi. Allora, se $p \in U$, esiste un intorno aperto V di p in U e un’applicazione $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

1. $X(V) = S$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$;
2. X è una parametrizzazione di S tale che E, F, G e e, f, g sono i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S nella carta locale (V, X) .

Inoltre, se V è connesso, X (e quindi S) è unica a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$.

16. L'applicazione esponenziale - Facoltativo

In questo capitolo introduciamo alcuni sistemi di coordinate speciali definiti localmente su una superficie regolare i quali risulteranno piuttosto utili per alcune applicazioni geometriche. Il modo naturale per introdurre tali coordinate è tramite l'applicazione esponenziale, che ora descriviamo.

Come illustrato nell'Osservazione 15.5 dato un punto $p \in S$ e un vettore $v \in T_p S$ esiste un'unica geodetica $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Denoteremo tale geodetica con $\gamma(t, p, v)$ per indicare che dipende sia dal punto che dal vettore tangente.

Il primo risultato è una proprietà di omogeneità delle parametrizzazioni delle geodetiche

Lemma 16.1 Sia $\gamma(t, p, v)$ una geodetica definita per $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, allora la geodetica $\gamma(t, p, \lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, è definita in $(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ ed inoltre $\gamma(t, p, \lambda v) = \gamma(\lambda t, p, v)$.

Dimostrazione. Sia $\gamma(t, p, v)$ la geodetica per p con velocità v . Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, e consideriamo la curva $\alpha: (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda) \rightarrow S$ definita da $\alpha(t) = \gamma(\lambda t, p, v)$. Allora $\alpha(0) = \gamma(0, p, v) = p$ e $\alpha'(0) = \lambda \gamma'(0, p, v) = \lambda v$. Se dimostriamo che $\alpha(t)$ è una geodetica, per l'unicità, si trova che $\gamma(t, p, \lambda v) = \alpha(t) = \gamma(\lambda t, p, v)$. Siano $(u_\alpha(t), v_\alpha(t))$ le componenti locali della curva α . Per definizione di α si ha $u_\alpha(t) = u(\lambda t)$ e $v_\alpha(t) = v(\lambda t)$ dove $(u(t), v(t))$ sono le componenti locali della geodetica $\gamma(t, p, v)$. Segue dall'Osservazione 15.6 che α è una geodetica. ■

Il Lemma 16.1 garantisce che variando in modo opportuno la norma del vettore tangente in un punto p aumenta l'intervallo di definizione del parametro t della geodetica $\gamma(t, p, v)$.

Definizione 16.1 Sia $p \in S$ e sia $H = \{v \in T_p S: \gamma(1, p, v) \text{ è definito}\} \subseteq T_p S$. L'applicazione

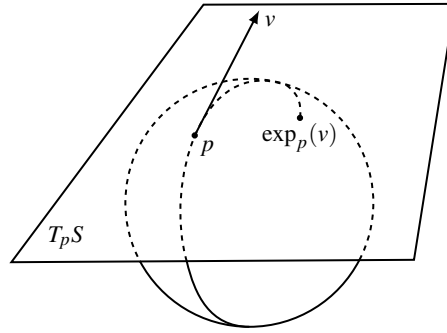
$$\exp_p: H \rightarrow S$$

definita da $\exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$ si chiama *applicazione esponenziale*.

Geometricamente $\gamma(1, p, v)$ corrisponde ad un punto su S la cui lunghezza di arco di geodetica da p a $\gamma(1, p, v)$ sia proprio $\|v\|$. Infatti la lunghezza di tale arco è data da

$$\int_0^1 \|\gamma'\| dt = \int_0^1 \|v\| dt = \|v\|.$$

Si veda la figura seguente che mostra l'applicazione esponenziale della sfera $\mathbb{S}^2$.



Osservazione 16.1 L'applicazione esponenziale non è necessariamente definita in tutto lo spazio tangente. Per esempio, se C è il cono circolare e $p \in C$ un suo punto, allora $\exp_p(v)$ con v in direzione del meridiano passante per p e verso che punta il vertice, è definito a patto che $\|v\|$ sia minore della distanza del punto p dal vertice del cono.

In ogni caso, si può dimostrare con un po' di analisi il seguente fatto.

Proposizione 16.1 Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_p$ sia definita e differenziabile nel disco $D(\varepsilon)$ di raggio ε di $T_p S$ con centro in p .

Mostriamo adesso che il differenziale dell'applicazione esponenziale è un isomorfismo nell'origine.

Proposizione 16.2 Sia $\exp_p : D(\varepsilon) \subseteq T_p S \rightarrow S$ l'applicazione esponenziale. Allora

$$(d\exp_p)_o = \text{Id}.$$

Dimostrazione. Sia $0 \in T_p S$ il vettore nullo. Allora $\exp_p(0) = p$ ed identificando $T_o(T_p S)$ con $T_p S$ si ha $(d\exp_p)_o : T_p S \rightarrow T_p S$. Sia $v \in T_p S$ e sia $\alpha(t) = tv$ una curva in $T_p S$ con $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = v$. Si trova, utilizzando il Lemma 16.1,

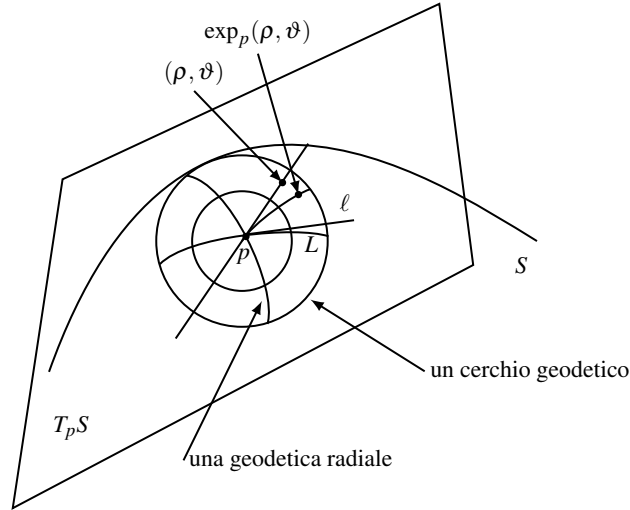
$$(d\exp_p)_o(v) = \frac{d}{dt}(\exp_p(tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, p, tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, p, v))|_{t=0} = v.$$

■

Segue dalla Proposizione 16.2 e dal Teorema 6.1 che la funzione esponenziale è un diffeomorfismo locale. Quindi esiste un aperto $U \subseteq D(\varepsilon)$ rispetto al quale $\exp_p : U \subseteq T_p S \rightarrow \exp_p(U)$ sia un diffeomorfismo. Chiamiamo l'aperto $V = \exp_p(U) \subseteq S$ un *intorno normale* del punto $p \in S$.

Utilizzando il fatto che $\exp_p : U \subseteq T_p S \rightarrow \exp_p(U) = V$ è un diffeomorfismo possiamo costruire su V delle coordinate speciali, note col nome di *coordinate polari geodetiche*, che corrispondono alle coordinate polari nel piano tangente $T_p S$ nel seguente modo. Si scelga in $T_p S$ una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$. Allora un sistema di coordinate polari (ρ, ϑ) in $T_p S$ centrato nell'origine è dato dalla rappresentazione dei vettori tangenti nella forma $\rho(\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2)$, dove $\rho > 0$ e $0 < \vartheta < 2\pi$. Le coordinate polari su $T_p S$ non sono definite nella semi retta ℓ corrispondente a $\vartheta = 0$. Si ponga $L = \exp_p(\ell)$ e si osservi che $\exp_p : U \setminus \ell \rightarrow V \setminus L$ rimane comunque un diffeomorfismo permettendoci di parametrizzare $V \setminus L$ utilizzando le coordinate polari (ρ, ϑ) che chiamiamo *coordinate polari geodetiche*. In pratica la carta locale è data da $(U \setminus \ell, \exp_p)$.

Chiamiamo l'immagine tramite $\exp_p$ di un cerchio in U centrato nell'origine *cerchio geodetico* di V e l'immagine di una retta per l'origine di $T_p S$ *geodetica radiale*. Nelle coordinate polari geodetiche (ρ, ϑ) le linee coordinate corrispondono proprio ai cerchi geodetici e alle geodetiche radiali. Si veda la figura seguente.



La prossima proposizione fornisce i coefficienti della prima forma fondamentale nelle coordinate polari geodetiche

Proposizione 16.3 Sia $X = \exp_p : U \setminus \ell \rightarrow V \setminus L$ un sistema di coordinate polari geodetiche. Allora i coefficienti della prima forma fondamentale indotta su $U \setminus \ell$ soddisfano alle condizioni

$$E(\rho, \vartheta) = 1, \quad F(\rho, \vartheta) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho, \vartheta) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G(\rho, \vartheta)})_\rho = 1.$$

Dimostrazione. Nel piano tangente $T_p S$ dotato delle coordinate polari la base coordinata è data da $\{\partial/\partial\rho, \partial/\partial\vartheta\}$ dove

$$\partial/\partial\rho = \cos\vartheta e_1 + \sin\vartheta e_2, \quad \partial/\partial\vartheta = \rho(-\sin\vartheta e_1 + \cos\vartheta e_2).$$

Segue che i campi coordinati lungo $V \setminus L$ sono

$$X_\rho = (d\exp_p)_{(\rho, \vartheta)}(\partial/\partial\rho), \quad X_\vartheta = (d\exp_p)_{(\rho, \vartheta)}(\partial/\partial\vartheta)$$

Il campo X_ρ è per costruzione il campo di vettori tangente alla geodetica radiale uscente da p con vettore tangente in p dato da $\partial/\partial\rho$ mentre il campo X_ϑ è il campo di vettori tangente al cerchio geodetico. Poiché la norma del vettore velocità della geodetica radiale in p è $\|\partial/\partial\rho\| = 1$ ed essendo la norma del vettore velocità di una geodetica costante si trova che $E = \langle X_\rho, X_\rho \rangle = 1$. Mostriamo che $F = 0$. Dalla relazione

$$F_\rho = \langle X_\rho, X_\vartheta \rangle_\rho = \langle X_{\rho\rho}, X_\vartheta \rangle + \langle X_\rho, X_{\vartheta\rho} \rangle$$

ed utilizzando che le curve radiali $\vartheta = \text{costante}$ sono delle geodetiche, cioè $[X_{\rho\rho}]^\top = 0$, si ricava

$$F_\rho = \langle X_\rho, X_{\vartheta\rho} \rangle = \frac{1}{2} \langle X_\rho, X_\rho \rangle_\vartheta = \frac{1}{2} E_\vartheta = 0.$$

Quindi F non dipende da ρ . Lungo una geodetica radiale in $V \setminus L$ si trova

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} X_\vartheta = \lim_{\rho \rightarrow 0} (d\exp_p)_{(\rho, \vartheta)}(\partial/\partial\vartheta) = (d\exp_p)_0(0) = 0.$$

Segue che lungo tale geodetica radiale in $V \setminus L$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \vartheta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \langle X_\rho, X_\vartheta \rangle = 0.$$

Poiché F non dipende da ρ si deve avere che $F(\rho, \vartheta) = 0$ per ogni ρ . Prima di procedere con la dimostrazione degli ultimi due punti, consideriamo nell'intorno V di S un nuovo sistema di coordinate date, via l'applicazione esponenziale, dalle coordinate rettangolari su U , cioè parametrizzando U come $\bar{u}e_1 + \bar{v}e_2$ dove $\{e_1, e_2\}$ è la base ortonormale di $T_p S$ scelta per definire le coordinate polari. Si osservi che tali coordinate, chiamate *coordinate normali geodetiche*, sono definite anche in p e, se denotiamo con $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ i coefficienti della prima forma fondamentale nelle coordinate $(\bar{u}, \bar{v})$, si trova

$$\bar{E}(p) = 1, \quad \bar{F}(p) = 0, \quad \bar{G}(p) = 1. \quad (16.1)$$

La (16.1) segue dal fatto che in p i campi coordinati, poiché $(d \exp_p)_o = \text{Id}$, sono esattamente e_1 e e_2 . Sia adesso

$$\bar{u} = \rho \cos \vartheta, \quad \bar{v} = \rho \sin \vartheta, \quad \rho > 0, \quad 0 < \vartheta < 2\pi$$

il cambio di coordinate dalle coordinate polari geodetiche alle coordinate normali geodetiche. Si ha, tenendo conto della (7.5),

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \vartheta)} \right|$$

Quindi

$$\sqrt{G} = \rho \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}$$

da cui, tenendo conto della (16.1),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1.$$

■

Osservazione 16.2 Dal punto di vista geometrico il fatto che in coordinate polari geodetiche $F = 0$, come mostrato nella Proposizione 16.3, implica che le geodetiche radiali uscenti da un punto p di una superficie regolare S incontrano i cerchi geodetici centrati in p perpendicolarmente. Tale fatto è noto in letteratura col nome di *Lemma di Gauss*.

16.1 Il Teorema di Minding

Sia S una superficie regolare e consideriamo in un intorno normale V le coordinate polari geodetiche. Allora in tali coordinate la metrica indotta è data da

$$ds^2 = d\rho^2 + G d\vartheta^2$$

con $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$. Segue dalla Formula di Bianchi (14.15) che la curvatura di Gauss è

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

Se K è costante allora la funzione $\sqrt{G}$ soddisfa all'equazione differenziale

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0. \quad (16.2)$$

Studiamo la (16.2) per i diversi valori della costante K .

1. Se $K = 0$, allora $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0$ da cui $(\sqrt{G})_\rho$ non dipende da ρ . Poiché $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$ concludiamo che $(\sqrt{G})_\rho = 1$. Quindi $\sqrt{G} = \rho + f(\vartheta)$ ma

$$f(\vartheta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0.$$

In conclusione

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

2. Se $K > 0$, la soluzione dell'equazione (16.2) è data da

$$\sqrt{G} = A(\vartheta) \cos(\sqrt{K}\rho) + B(\vartheta) \sin(\sqrt{K}\rho)$$

dove $A(\vartheta)$ e $B(\vartheta)$ sono funzioni di ϑ . Dalla condizione $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ ricaviamo che $A(\vartheta) = 0$ da cui $(\sqrt{G})_\rho = B(\vartheta)\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}\rho)$ che, assieme a $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$, conduce a $B(\vartheta) = 1/\sqrt{K}$. In conclusione in questo caso

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\rho).$$

2. Se $K < 0$, la soluzione della (16.2) è data da

$$\sqrt{G} = A(\vartheta) \cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\vartheta) \sinh(\sqrt{-K}\rho)$$

e con l'ausilio delle condizioni iniziali come nei casi precedenti si conclude che

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{-K} \sinh^2(\sqrt{-K}\rho).$$

La discussione precedente conduce alla dimostrazione del seguente importante risultato.

Teorema 16.1 — Teorema di Minding. Se due superfici regolari S e $\bar{S}$ hanno la stessa curvatura di Gauss costante allora sono localmente isometriche.

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 16.1

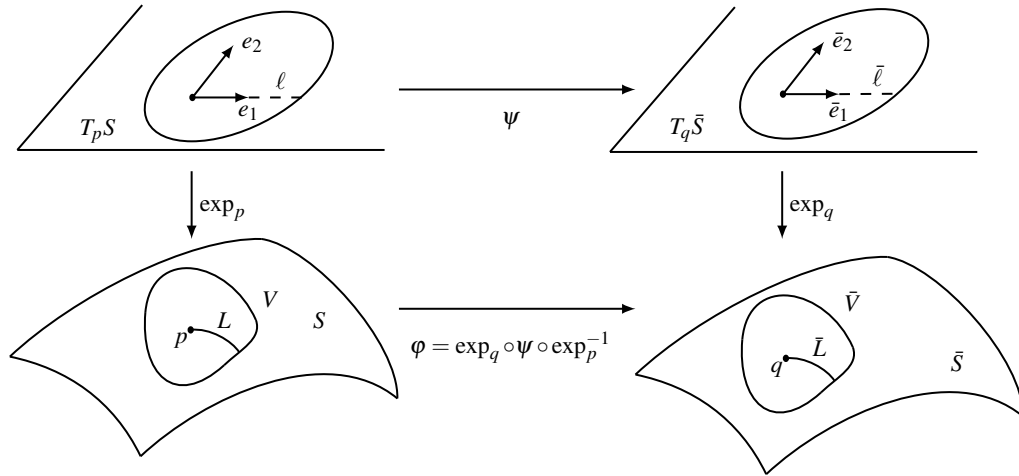


Figura 16.1: Isometria locale tra superfici con stessa curvatura costante di Gauss.

Siano $p \in S$, $q \in \bar{S}$ e siano $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormale di $T_p S$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortonormale di $T_q \bar{S}$. Siano V e $\bar{V}$ intorni normali di p e di q rispettivamente con stesso raggio. Definiamo un'isometria lineare $\psi : T_p S \rightarrow T_q \bar{S}$ chiedendo che $\psi(e_i) = \bar{e}_i$, $i = 1, 2$. Definiamo infine l'applicazione $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ come $\varphi = \exp_q \circ \psi \circ \exp_p^{-1}$.

Siano (ρ, ϑ) coordinate polari in $T_p S$ con asse ℓ e denotiamo con $L = \exp_p(\ell)$ e con $\bar{L} = \exp_q(\bar{\ell})$ dove $\bar{\ell} = \psi(\ell)$. Se $v \in T_p S$, $v = \rho(\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2)$, allora $\psi(v) = \psi(\rho(\cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2)) = \rho(\cos \vartheta \psi(e_1) + \sin \vartheta \psi(e_2)) = \rho(\cos \vartheta \bar{e}_1 + \sin \vartheta \bar{e}_2)$. Segue che la restrizione di φ a $V \setminus L$ manda un intorno coordinato polare centrato in p con coordinate (ρ, ϑ) in un intorno coordinato polare centrato in q con le stesse coordinate (ρ, ϑ) . Siccome le due superfici hanno la stessa curvatura di

Gauss costante K , per la discussione fatta dell'equazione (16.2), i coefficienti della prima forma fondamentale coincidono nei punti corrispondenti, cioè $\varphi_{V \setminus L} : V \setminus L \rightarrow \bar{V} \setminus \bar{L}$ è un'isometria. Per continuità φ conserva il prodotto scalare anche nei punti di L , così che $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ definisce l'isometria desiderata. ■

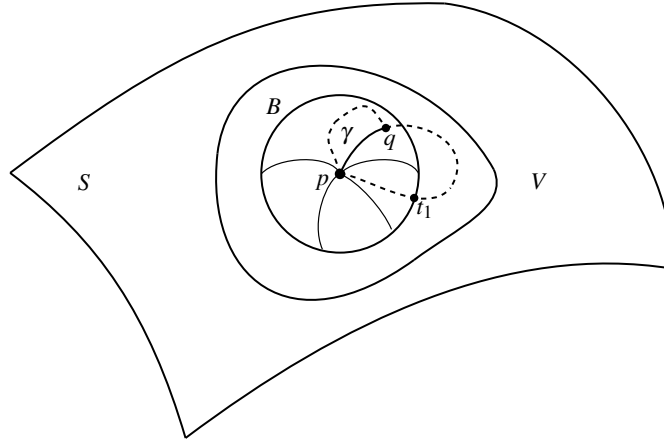
16.2 Proprietà di minimo della lunghezza delle geodetiche e il Teorema di Hopf-Rinow

Il teorema che segue rappresenta una delle giustificazioni più valide allo studio delle geodetiche su una superficie e chiarisce che le geodetiche sono, almeno localmente, l'equivalente delle rette nel piano.

Teorema 16.2 Sia S una superficie regolare, sia $p \in S$ un suo punto, sia V un intorno normale di p e sia $B \subseteq V$ un disco geodetico centrato in p . Sia $\gamma : [0, a] \rightarrow B$ la geodetica radiale parametrizzata con l'ascissa curvilinea con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = q$. Allora per ogni altra curva parametrizzata regolare $\alpha : [0, a] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha(a) = q$ si ha

$$a = L_0^a(\gamma) \leq L_0^a(\alpha),$$

e l'uguaglianza vale se e solo se la traccia $\alpha([0, a])$ coincide con la traccia $\gamma([0, a])$.



Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $\alpha([0, a]) \subseteq B$. Scegliamo delle coordinate polari geodetiche su $V \setminus L$ e supponiamo che $\alpha([0, a])$ non intersechi L . Siccome $\exp_p$ è un diffeomorfismo su V , la curva $\alpha(t)$, $t \neq 0$, si può scrivere in modo unico come $\alpha(t) = \exp_p(\rho(t), \vartheta(t)) = X(\rho(t), \vartheta(t))$. Inoltre si osservi che, essendo $\alpha(a) = q$ ed essendo q ad una distanza geodetica a da p , $\rho(a) = a$. Come al solito scriviamo

$$\alpha' = X_\rho \rho'(t) + X_\vartheta \vartheta'(t),$$

da cui, tenendo conto della Proposizione 16.3,

$$\|\alpha'\|^2 = (\rho')^2 + G(\rho, \vartheta) (\vartheta')^2 \geq (\rho')^2.$$

Quindi

$$L_\varepsilon^a(\alpha) = \int_\varepsilon^a \sqrt{(\rho')^2 + G(\rho, \vartheta) (\vartheta')^2} dt \geq \int_\varepsilon^a \sqrt{(\rho')^2} dt \geq \int_\varepsilon^a \rho' dt = \rho(a) - \rho(\varepsilon).$$

Prendendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ della precedente si ottiene

$$L_0^a(\alpha) \geq \rho(a) = a = L_0^a(\gamma).$$

Inoltre, l'uguaglianza vale se e solo se $\vartheta' = 0$, cioè $\vartheta = \text{costante}$, e $\rho' > 0$. Quindi se la curva α è una riparametrizzazione monotona crescente della geodetica radiale γ . Sotto queste condizioni, la traccia $\alpha([0, a])$ coincide con la traccia $\gamma([0, a])$.

Se $\alpha([0, a])$ dovesse intersecare L si considerino i punti $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ di intersezione (che sono in un numero finito poiché sono punti isolati di un insieme compatto, quindi se fossero infiniti ammetterebbero, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, un punto di accumulazione che sarebbe ancora di intersezione ma non più isolato) e, con un argomento analogo a quello visto sopra, si dimostra che la lunghezza di α da t_i a t_{i+1} , $i = 1, \dots, k-1$, è maggiore o uguale della lunghezza dell'arco di geodetica tra $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_{i+1})$.

Se $\alpha([0, a])$ non è contenuta in B , si consideri il primo punto $t_1 \in (0, a)$ per il quale $\alpha(t_1)$ appartiene al bordo di B . Se r è il raggio del disco geodetico B , si ha

$$L_0^a(\alpha) \geq L_0^{t_1}(\alpha) \geq r > L_0^a(\gamma).$$

■

Il teorema precedente non è vero globalmente, come mostra l'esempio della sfera. Due punti non antipodali di una sfera possono essere collegati da due archi di circonferenze massime di lunghezze diverse e solo il più piccolo soddisfa le conclusioni del teorema. In altre parole, una geodetica, se sufficientemente estesa, potrebbe non essere il percorso più breve tra i suoi estremi. La seguente proposizione mostra, tuttavia, che quando una curva regolare è il percorso più breve tra due qualsiasi dei suoi punti, questa curva è necessariamente una geodetica.

Proposizione 16.4 Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regolare differenziabile parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Supponiamo che la lunghezza di α tra due punti qualsiasi $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$, $t_1, t_2 \in I$, sia minore o uguale della lunghezza di qualsiasi altra curva parametrizzata regolare che unisce $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$. Allora α è una geodetica.

Dimostrazione. Sia $t_o \in I$ un punto arbitrario e sia B un disco geodetico centrato in $p = \alpha(t_o)$. Sia $q = \alpha(\bar{t}) \in B$. Allora dal Teorema 16.2 la lunghezza dell'arco di geodetica radiale congiungente p e q è minore o uguale della lunghezza di qualsiasi altra curva congiungente p e q . Segue dalle ipotesi che la lunghezza di α tra p e q coincide con la lunghezza della geodetica radiale tra p e q . Dal caso dell'uguaglianza nel Teorema 16.2 segue che α è una riparametrizzazione della geodetica radiale, da cui α è una geodetica nell'intervallo $(t_o, \bar{t})$. Poiché α è regolare per continuità α è una geodetica anche in t_o . ■

La Proposizione 16.4 si può estendere al caso delle curve differenziabili a tratti come descritto nella seguente proposizione che enunciamo senza dimostrazione.

Proposizione 16.5 Sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regolare differenziabile a tratti tale che in ogni intervallo in cui è differenziabile sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Supponiamo che la lunghezza di α tra due qualsiasi dei suoi punti sia minore o uguale della lunghezza di qualsiasi altra curva differenziabile a tratti che unisca questi due punti. Allora α è una geodetica. In particolare, α è differenziabile su tutto I .

Prima di enunciare il prossimo risultato diamo la seguente

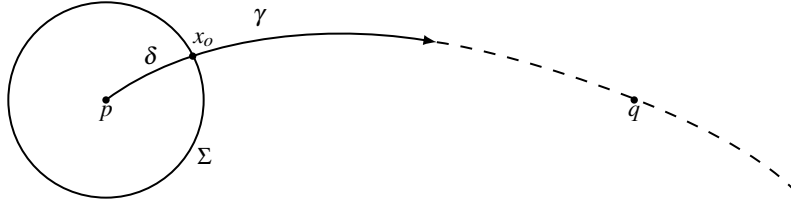
Definizione 16.2 Una superficie regolare S si dice *geodeticamente completa*, o semplicemente completa, se ogni sua geodetica può essere parametrizzata su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, equivalentemente se l'applicazione esponenziale è definita su tutto $T_p S$ per ogni punto $p \in S$.

Per esempio, la sfera è completa, la pseudosfera invece non è completa, infatti i meridiani non sono definiti per tutti i valori del parametro poiché la tratrice presenta una cuspid.

Il prossimo risultato garantisce per quali superfici vale l'analogo (almeno per l'esistenza) del *primo postulato della Geometria Euclidea*, cioè che per due dati punti esiste una geodetica che li congiunge. Il teorema è il seguente

Teorema 16.3 — Hopf-Rinow. Per ogni coppia di punti p, q di una superficie regolare S completa e connessa esiste un segmento di geodetica γ che li congiunge avente lunghezza minima, cioè $L(\gamma) = d(p, q)$, dove d è la funzione distanza sulla superficie.

Dimostrazione. Sia $d(p, q) = r$, sia $B_\delta(p)$ un disco normale geodetico centrato in p e denotiamo con $S_\delta(p) = \Sigma$ il bordo di $B_\delta(p)$. Sia x_o un punto del bordo dove la funzione continua $d(q, x), x \in \Sigma$, ha un minimo (tale punto esiste poiché Σ è compatta). Allora $x_o = \exp_p \delta v$, dove $v \in T_p S$ e $\|v\| = 1$. Sia γ la geodetica data da $\gamma(s) = \exp_p(sv)$.



Poiché S è completa la geodetica γ è definita per tutti i valori reali e quindi anche per $s = r$. Se mostriamo che $\gamma(r) = q$ concludiamo poiché γ sarebbe una geodetica congiungente p e q con $L_o(\gamma) = r = d(p, q)$, quindi minima.

Per mostrare che $\gamma(r) = q$ si consideri la condizione

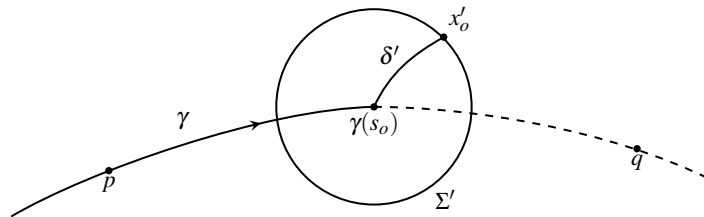
$$d(\gamma(s), q) = r - s \quad (16.3)$$

e sia $A = \{s \in [0, r] : (16.3) \text{ è vera}\}$. L'insieme A non è vuoto, poiché la (16.3) è vera per $s = 0$. Inoltre, A è un sottoinsieme chiuso di $[0, r]$: infatti, il complementare di A , $C(A) = \{s \in [0, r] : (16.3) \text{ non è vera}\}$, è aperto poiché se $\bar{s} \in C(A)$ allora $d(\gamma(\bar{s}), q) - (r - \bar{s}) \neq 0$ e, per continuità, esiste un intorno di $\bar{s}$ in cui $d(\gamma(s), q) - (r - s) \neq 0$. Supponiamo di aver dimostrato la seguente proprietà

(F) se $s_o \in A$ e $s_o < r$, allora esiste $\delta' > 0$ tale che $s_o + \delta' \in A$.

Se (F) fosse vera allora si avrebbe che $\sup A = r$, infatti se r non fosse il sup esisterebbe un maggiorante r' di A con $r' < r$ e $r' = \sup A$. Poiché un sup è un punto di accumulazione per A ed A è chiuso segue che $r' \in A$. Dalla (F) esiste un δ' con $r' + \delta' \in A$, cioè $r' < r' + \delta' \in A$ il che contraddice che r' sia un maggiorante. Quindi r è il minimo dei maggioranti, cioè $r = \sup A$. Siccome A è chiuso ed r è un punto di accumulazione, si conclude che $r \in A$, da cui dalla (16.3) $d(\gamma(r), q) = r - r = 0$, cioè $\gamma(r) = q$.

Quindi per terminare la dimostrazione mostriamo che (F) è vera. Sia $s_o \in A$ e sia $B_{\delta'}(\gamma(s_o))$ un disco normale geodetico centrato in $\gamma(s_o)$ che non contenga q ed indichiamo con $\Sigma' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_o))$ il suo bordo. Sia x'_o un punto dove la funzione continua $d(x, q), x \in \Sigma'$, ha un minimo. Si veda la figura seguente.



Si osservi che

$$d(\gamma(s_o), q) = \delta' + \min_{x \in \Sigma'} d(x, q) = \delta' + d(x'_o, q)$$

e, poiché $s_o \in A$,

$$d(\gamma(s_o), q) = r - s_o$$

quindi

$$r - s_o = \delta' + d(x'_o, q) \quad (16.4)$$

Se $x'_o = \gamma(s_o + \delta')$ si avrebbe, dalla (16.4),

$$r - s_o = \delta' + d(x'_o, q) = \delta' + d(\gamma(s_o + \delta'), q) \quad (16.5)$$

cioè

$$d(\gamma(s_o + \delta'), q) = r - (s_o + \delta')$$

la quale è la condizione (16.3) per $s_o + \delta'$. Quindi per mostrare che $s_o + \delta' \in A$ basta verificare che $x'_o = \gamma(s_o + \delta')$.

Mostriamo quindi che $\gamma(s_o + \delta') = x'_o$. Dalla disuguaglianza triangolare

$$d(p, x'_o) + d(x'_o, q) \geq d(p, q)$$

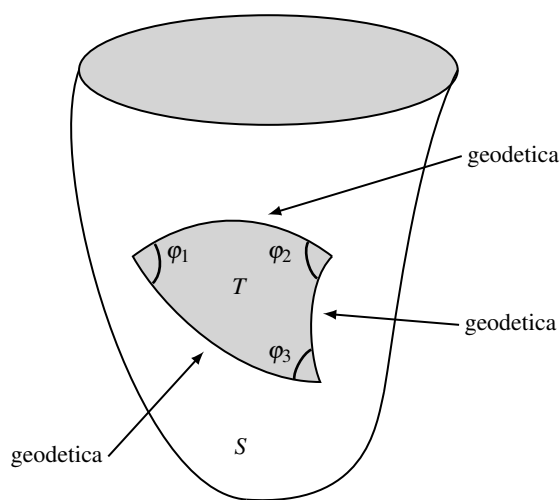
e dalla (16.4) si ha

$$d(p, x'_o) \geq d(p, q) - d(x'_o, q) = r - (r - s_o - \delta') = s_o + \delta'$$

D'altra parte la curva spezzata α che congiunge p a x'_o , la quale da p a $\gamma(s_o)$ segue la geodetica γ a da $\gamma(s_o)$ a x'_o segue la geodetica radiale, ha lunghezza $s_o + \delta'$. Quindi $d(p, x'_o) = s_o + \delta'$ e la curva α ha lunghezza minima tra tutte le curve che congiungono p con x'_o . Dalla Proposizione 16.5 segue che α è una geodetica, quindi non può essere una spezzata e deve coincidere con γ . Abbiamo quindi $\gamma(s_o + \delta') = x'_o$. ■

17. Il Teorema di Gauss-Bonnet

Il teorema di Gauss-Bonnet è probabilmente il risultato più profondo della geometria differenziale delle superfici. Il teorema mostra come la curvatura influenzi la geometria di una superficie nello spazio euclideo, fornendo ulteriori approfondimenti sul significato della curvatura di Gauss. Inoltre, mostra l'interrelazione tra curvatura e topologia che rappresenta uno dei temi centrali della geometria differenziale globale, fornendo un esempio dell'uso di quantità geometriche per calcolare gli invarianti topologici. Il teorema ha molteplici applicazioni e può essere considerato un caso speciale (se vogliamo ispiratore) di un importante teoria della matematica moderna nota come *classi caratteristiche*. La prima versione del teorema di Gauss-Bonnet è stata presentata da *C.F. Gauss* nel famoso articolo del 1827, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, lavoro che almeno una volta nella vita dovrebbe essere letto! Il Teorema di Gauss si occupa di *triangoli geodetici* sulle superfici (cioè triangoli i cui lati sono archi di geodetica)



ed afferma che l'eccesso da π della somma degli angoli interni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ di un triangolo geodetico T è uguale all'integrale della curvatura di Gauss K su T . In formula

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \int_T K dA.$$

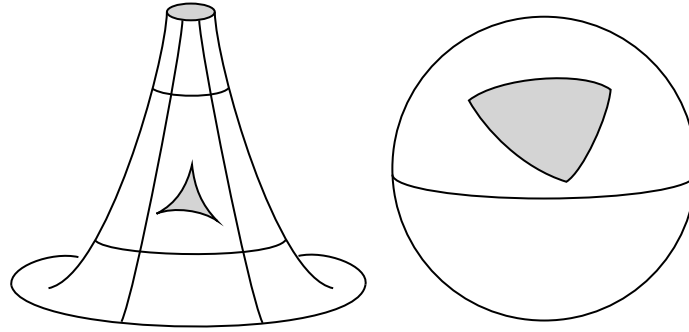
Ad esempio, se $K \equiv 0$, il Teorema di Gauss afferma che

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi,$$

ottenendo un'estensione del classico teorema di Talete della geometria euclidea alle superfici di curvatura zero. Inoltre, se $K \equiv 1$, otteniamo che

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \text{area}(T) > 0.$$

Pertanto, su una sfera unitaria la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo geodetico è maggiore di π e l'eccesso da π è esattamente l'area di T . Allo stesso modo, sulla pseudosfera la somma degli angoli interni di qualsiasi triangolo geodetico è minore di π . Si veda la figura sotto



L'estensione del teorema di Gauss a una regione delimitata da una curva semplice che non sia unione di segmenti di geodetiche è dovuta a *O. Bonnet* e sarà discussa nella seguente sezione.

17.1 La formula locale del Teorema di Gauss-Bonnet

Sia $\gamma: [0, \ell] \rightarrow S$ una curva parametrizzata di una superficie orientata S . Ricordiamo che la curva è

1. *chiusa* se $\gamma(0) = \gamma(\ell)$;
2. *semplice* se per ogni $t_1, t_2 \in [0, \ell)$, $t_1 \neq t_2$, si ha $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$;
3. *regolare a tratti* se esistono $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = \ell$ tali che γ è regolare e differenziabile in (t_i, t_{i+1}) per ogni $i = 0, \dots, k$.

I punti $\gamma(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, sono chiamati *vertici* mentre i segmenti $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ sono chiamati *archi*.

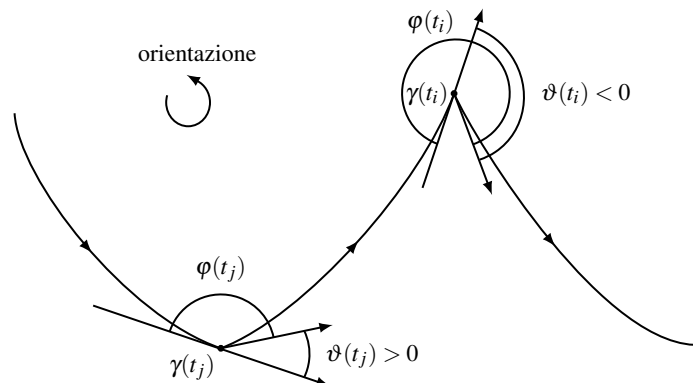
Per ogni vertice $\gamma(t_i)$ esistono i limiti

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t) = \gamma'(t_i)_-, \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t) = \gamma'(t_i)_+$$

e definiamo con $|\vartheta_i| \in [0, \pi)$ la misura dell'angolo da $\gamma'(t_i)_-$ a $\gamma'(t_i)_+$ (si osservi che stiamo implicitamente assumendo che i vertici non presentino delle cuspidi, cioè $|\vartheta_i| \neq \pi$). Inoltre assegnamo un segno a tale angolo in accordo con il segno di

$$\langle \gamma'(t_i)_- \wedge \gamma'(t_i)_+, N \rangle.$$

Per esempio, se γ è una curva nel piano $z = 0$ e $N = (0, 0, 1)$ allora gli angoli ϑ_i hanno i segni come indicato in figura



L'angolo con segno $\vartheta_i \in (-\pi, \pi)$ si chiama *angolo esterno* al vertice $\gamma(t_i)$. Il segno dell'angolo esterno, con qualche tecnicismo, si può definire anche quando $|\vartheta_i| = \pi$, cioè quando in $\gamma(t_i)$ la curva presenta una cuspid. Nel seguito, per semplicità espositiva, supporremo che non vi siano cuspidi, quindi $\vartheta_i \neq \pm\pi$. Sempre con riferimento alla figura sopra indichiamo con $\phi_i = \pi - \vartheta_i \in (0, 2\pi)$, $i = 0, \dots, k$, gli *angoli interni*.

Prima di procedere enunciamo, senza dimostrazione, una versione valida per curve differenziabili a tratti del Teorema 2.1.

Teorema 17.1 — Teorema delle tangenti ruotanti. Sia $\gamma: [a, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana differenziabile a tratti, semplice e chiusa. Siano $\phi_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k$, le funzioni angolo da $\partial/\partial u$ a γ' . Allora

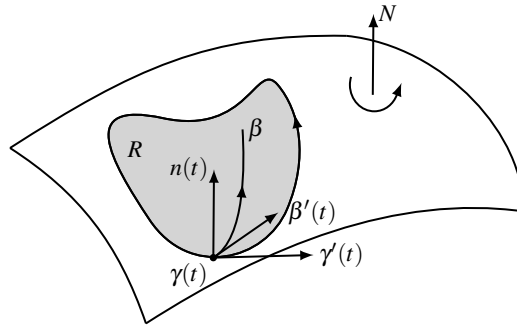
$$\sum_{i=0}^k [\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)] + \sum_{i=0}^k \vartheta_i = \pm 2\pi$$

dove il segno dipende dal verso di percorrenza della curva γ .

Il teorema afferma che la variazione totale dell'angolo che il vettore tangente a γ forma con una data direzione più i "salti" ai vertici è uguale a 2π . Anche questa versione del teorema è dovuta a *H. Hopf*.

Prima di enunciare la versione locale del teorema di Gauss-Bonnet abbiamo ancora bisogno di alcune definizioni. Sia S una superficie orientata. Una regione $R \subseteq S$ (unione di un insieme aperto connesso con il suo bordo) è chiamata una *regione semplice* se R è omeomorfa ad un disco e il bordo ∂R di R è la traccia di una curva parametrizzata regolare, semplice, chiusa, differenziabile a tratti $\gamma: I \rightarrow S$.

Inoltre, la curva γ è orientata positivamente se per ogni punto $\gamma(t)$, appartenente ad un arco regolare, vale la seguente proprietà: se un vettore $n(t)$ rende la base $\{\gamma', n(t)\}$ positiva allora $n(t)$ "punta verso l'interno" di R ; più precisamente, se per qualsiasi curva $\beta: I \rightarrow R$ con $\beta(0) = \gamma(t)$ e $\beta'(0) \neq \gamma'(t)$, si ha che $\langle \beta'(0), n(t) \rangle > 0$. Intuitivamente, ciò significa che se si cammina sulla curva γ in direzione positiva e con la testa rivolta verso la normale N , la regione R rimane a sinistra.



Infine, sia $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una superficie regolare orientata S e sia (U, X) una carta locale compatibile con l'orientazione di S . Se $R \subseteq X(U)$ è una regione limitata allora, con calcoli analoghi a quelli visti nella Proposizione 7.1, si dimostra che l'integrale

$$\int_{X^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (17.1)$$

non dipende dalla carta locale scelta. Definiamo quindi con la (17.1) l'integrale della funzione f su R e lo indichiamo con

$$\int_R f dA$$

dove con dA indichiamo l'elemento d'area sulla superficie.

Teorema 17.2 — Teorema locale di Gauss-Bonnet. Sia S una superficie regolare orientata e sia (U, X) una carta locale isoterma compatibile con l'orientazione di S e tale che U sia omeomorfo ad un disco aperto. Sia $R \subseteq X(U)$ una regione semplice e sia $\gamma: [0, \ell] \rightarrow S$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, differenziabile a tratti, orientata positivamente e tale che $\gamma([0, \ell]) = \partial R$. Siano $\{\gamma(s_0), \dots, \gamma(s_k)\}$ i vertici di γ e siano $\{\vartheta_0, \dots, \vartheta_k\}$ gli angoli esterni. Allora

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g^i(s) ds + \int_R K dA + \sum_{i=0}^k \vartheta_i = 2\pi,$$

dove k_g^i è la curvatura geodetica di $\gamma|_{(s_i, s_{i+1})}$, mentre K rappresenta la curvatura di Gauss di S .

Dimostrazione. Sia $(u(s), v(s))$ una parametrizzazione locale della curva γ . Allora, dalla (15.8), lungo $\gamma((s_i, s_{i+1}))$ la curvatura geodetica di γ è data da

$$k_g^i = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\phi_i}{ds}, \quad (17.2)$$

dove ϕ_i è la funzione angolo tra X_u e $\gamma'(s)$ definita, in accordo con l'orientazione scelta su S , lungo l'arco $\gamma((s_i, s_{i+1}))$. Integrando la (17.2) lungo $\gamma((s_i, s_{i+1}))$ e sommando per $i = 0, \dots, k$, si ottiene

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g^i ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds. \quad (17.3)$$

Per procedere ricordiamo il *Teorema della divergenza*: se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è una regione semplice limitata e W è un campo di vettori differenziabile definito in un aperto contenente A , allora

$$\int_A \operatorname{div}(W) dudv = \int_{\partial A} \langle W, n \rangle ds, \quad (17.4)$$

dove n è la normale al bordo ∂A che punta verso l'esterno. Nel nostro caso, ponendo $A = X^{-1}(R)$, il campo normale risulta $n = (v', -u')$ e se poniamo $W = P \frac{\partial}{\partial u} + Q \frac{\partial}{\partial v}$, la (17.4) diventa

$$\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) dudv = \int_{\partial A} (Pv' - Qu') ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} (Pv' - Qu') ds. \quad (17.5)$$

Ponendo adesso

$$P = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}, \quad Q = \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$$

si ottiene dalla (17.5) e tenendo conto della (14.15)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds &= \int_A \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv \\ &= \int_A \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \sqrt{EG} dudv \\ &= - \int_R K dA. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Per calcolare il termine

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds$$

si osservi che la parametrizzazione X è isoterma, quindi conserva gli angoli. Segue dal Teorema 17.1, tenendo anche in considerazione che γ è orientata positivamente, che

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\phi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k [\phi_i(s_{i+1}) - \phi_i(s_i)] = 2\pi - \sum_{i=0}^k \vartheta_i. \quad (17.7)$$

Sostituendo nella (17.3) la (17.6) e la (17.7) si ottiene la tesi. ■

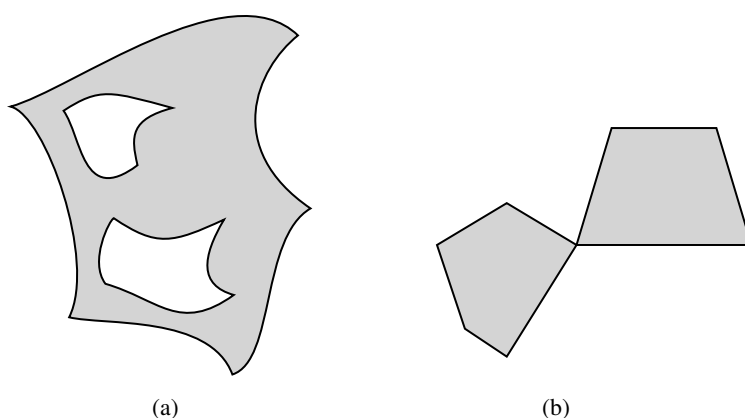
Osservazione 17.1 Se R è un triangolo geodetico e $\varphi_i = \pi - \vartheta_i$ sono i corrispondenti angoli interni, il Teorema 17.2 diventa

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi + \int_R K dA,$$

che rappresenta il teorema originale di Gauss come illustrato all'inizio di questo paragrafo.

17.2 Il Teorema globale di Gauss-Bonnet

Sia S una superficie regolare orientata. Una regione connessa $R \subseteq S$ si dice *regolare* se R è compatta e se il bordo ∂R è l'unione finita di curve semplici chiuse differenziabili a tratti che non si intersecano. Ad esempio, con riferimento alla figura sotto, la regione (a) è regolare mentre la (b) no.



Il bordo di una regione regolare può essere vuoto, ad esempio $\mathbb{S}^2$ è essa stessa una regione regolare, così come una qualunque superficie compatta senza bordo. Si osservi che la definizione che abbiamo dato di superficie regolare fa sì che ogni superficie regolare non abbia bordo. Quindi una superficie regolare compatta è automaticamente una superficie compatta senza bordo.

Una regione semplice che ha solo tre vertici si chiama *triangolo*. Una *triangolazione* di una regione regolare $R \subseteq S$ è una famiglia finita $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_n\}$ di triangoli tali che

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$;
2. se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ allora $T_i \cap T_j$ è un lato o un vertice comune ai due triangoli.

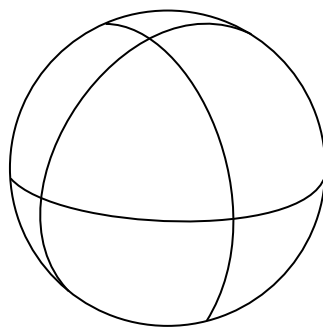
Definizione 17.1 Sia $R \subseteq S$ una regione regolare e sia $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_n\}$ una triangolazione di R . Chiamiamo il numero

$$\mathcal{X}(R) = F - E + V$$

caratteristica di Eulero-Poincaré, dove abbiamo indicato con

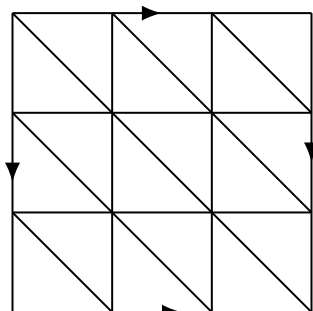
- F il numero di facce della triangolazione;
- E il numero di lati della triangolazione;
- V il numero di vertici della triangolazione.

Ad esempio per una regione formata da un singolo triangolo si trova $\mathcal{X}(T) = 1 - 3 + 3 = 1$. Per la sfera $\mathbb{S}^2$, vista come regione regolare di se stessa, una triangolazione è quella data in figura



Si contano 8 facce, 12 lati e 6 vertici, da cui $\mathcal{X}(\mathbb{S}^2) = 8 - 12 + 6 = 2$.

Tra le altre superfici compatte, per il toro topologico $\mathbb{T}^2$ una triangolazione è la seguente

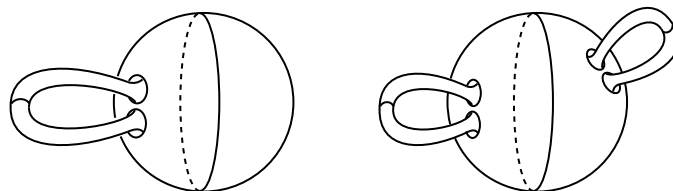


dove si contano 18 facce, 27 lati e 9 vertici, da cui $\mathcal{X}(\mathbb{T}^2) = 18 - 27 + 9 = 0$.

Proposizione 17.1 Valgono i seguenti fatti che assumiamo senza dimostrazione.

1. Ogni regione regolare $R \subseteq S$ ammette una triangolazione;
2. La caratteristica di Eulero-Poincaré non dipende dalla triangolazione scelta;
3. La caratteristica di Eulero-Poincaré è un invariante topologico.

Un teorema fondamentale di topologia, il **Teorema di Classificazione delle Superfici**, afferma che ogni superficie orientabile chiusa (compatta senza bordo) è omeomorfa a una sfera o a una sfera a cui è stata aggiunta un numero finito di “manici”. L’aggiunta di un manico avviene tagliando due dischi dalla sfera ed incollando in corrispondenza dei tagli un cilindro di lunghezza finita. La figura seguente mostra alcuni esempi. In particolare mostra una sfera con un manico che è omeomorfa ad un toro. La figura mostra anche un bitoro che, nel linguaggio del Teorema di Classificazione delle Superfici, è una sfera con due manici.

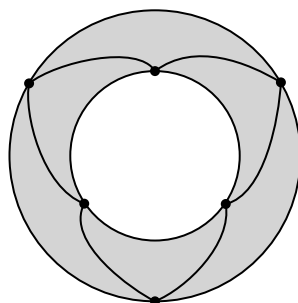


L’aggiunta di un manico riduce la caratteristica di Eulero-Poincaré di 2. Abbiamo infatti il seguente

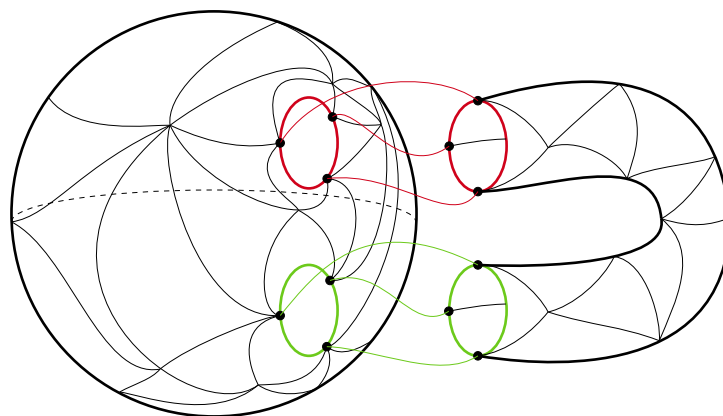
Lemma 17.1 Sia $\bar{S}$ la superficie ottenuta aggiungendo un manico alla superficie chiusa S . Allora

$$\mathcal{X}(\bar{S}) = \mathcal{X}(S) - 2$$

Dimostrazione. Identifichiamo un manico con un cilindro $\mathcal{C}$ di altezza finita il quale è omeomorfo ad una corona circolare. Adesso triangoliamo la corona circolare, e di conseguenza il corrispondente cilindro finito, nel modo seguente



Segue che la caratteristica di Eulero-Poincaré della corona circolare, e quindi del cilindro finito, è $\mathcal{X}(\mathcal{C}) = 6 - 12 + 6 = 0$. Adesso triangoliamo la superficie S in modo che ciascuno dei dischi rimossi sia la faccia di un triangolo (con tutti gli angoli interni uguali a π) ed allo stesso modo triangoliamo il cilindro in modo che le due circonferenze al bordo risultino ciascuna composta da tre lati e tre vertici. Infine incolliamo le due circonferenze del cilindro con i bordi dei dischi rimossi da S facendo corrispondere i vertici. Si veda la figura seguente.



Segue che il numero di facce della triangolazione risultante di $\bar{S}$ è pari al numero delle facce della triangolazione di S meno 2 più il numero delle facce della triangolazione del cilindro $\mathcal{C}$, mentre il numero dei lati (rispettivamente vertici) è pari al numero dei lati (rispettivamente vertici) della triangolazione di S meno 6 più il numero dei lati (rispettivamente vertici) della triangolazione del cilindro $\mathcal{C}$. Segue che

$$\mathcal{X}(\bar{S}) = (F_S - 2 + F_{\mathcal{C}}) - (E_S - 6 + E_{\mathcal{C}}) + (V_S - 6 + V_{\mathcal{C}}) = \mathcal{X}(S) + \mathcal{X}(\mathcal{C}) - 2 = \mathcal{X}(S) - 2.$$

■

Se indichiamo con g il numero di manici aggiunti ad una sfera e chiamiamo questo numero *genere* della superficie chiusa, si ottiene la seguente relazione valida per una superficie S chiusa ottenuta con l'aggiunta di g manici alla sfera:

$$\mathcal{X}(S) = 2 - 2g. \quad (17.8)$$

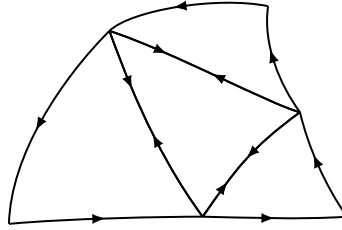
In conclusione le superfici chiuse hanno caratteristica di Eulero-Poincaré uguale a $2, 0, -2, -4, -6, \dots$.

Esercizio 17.1 Sia S_g una superficie chiusa di genere g , quindi con $\mathcal{X}(S_g) = 2 - 2g$. Dimostrare che il numero minimo di triangoli $\delta(S_g)$ di una sua triangolazione soddisfa la relazione

$$\delta(S_g) \geq 3 + \sqrt{1 + 48g} + 4g.$$

Aiuto: Si utilizzi che per una triangolazione di una superficie chiusa valgono le seguenti relazioni: $3F = 2E$; $\binom{V}{2} \geq E$; $\mathcal{X}(S_g) = F - E + V$; $\mathcal{X}(S_g) = 2 - 2g$.

Un'ultima osservazione prima di enunciare il Teorema Globale. Sia S una superficie regolare orientata e sia $\{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ un atlante di S . Sia $R \subseteq S$ una regione regolare. Allora esiste una triangolazione $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ di R tale che per ogni $T_j \in \mathcal{T}$, T_j è contenuto in qualche carta locale dell'atlante. Inoltre, se il bordo di ogni triangolo è orientato positivamente allora triangoli che si intersecano lungo un lato determinano orientazioni opposte sul lato comune, si veda la figura sotto



Con riferimento alla triangolazione descritta sopra, se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile allora l'integrale

$$\sum_{j=1}^n \int_{X_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j = \sum_{j=1}^n \int_{T_j} f dA \quad (17.9)$$

non dipende dalla scelta dell'atlante $\{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ e dalla triangolazione $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ di R a patto che per ogni $T_j \in \mathcal{T}$, T_j sia contenuto in qualche carta locale dell'atlante. Definiamo quindi tramite la (17.9) l'integrale della funzione f lungo R e lo denotiamo con

$$\int_R f dA.$$

Teorema 17.3 — Teorema di Gauss-Bonnet. Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie regolare orientata. Siano $C_1, \dots, C_n$ le curve semplici, chiuse, differenziabili a tratti, che formano il bordo di R . Supponiamo che le curve $C_i, i = 1, \dots, n$, siano orientate positivamente e sia $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_p\}$ l'insieme di tutti gli angoli esterni delle curve C_i . Allora

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds + \int_R K dA + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_\ell = 2\pi \mathcal{X}(R). \quad (17.10)$$

Dimostrazione. Si consideri una triangolazione $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_F\}$ della regione R tale che ogni triangolo T_j sia contenuto in una carta locale e si supponga che l'atlante scelto sia compatibile con l'orientazione su S e che le parametrizzazioni locali siano isoterme¹.

¹L'esistenza di un atlante di una superficie regolare formato da carte locali isoterme è un risultato che utilizza in modo profondo l'analisi complessa. Un'elegante dimostrazione si può trovare nell'articolo di S.S. Chern, An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955): 771–782.

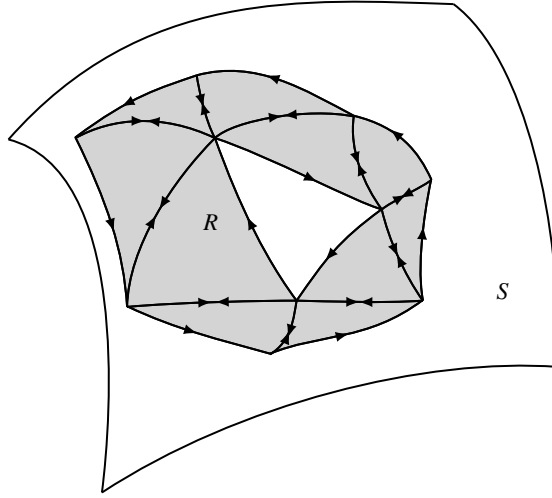
Per ogni triangolo $T_j \in \mathcal{F}$ siano $\gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \gamma_{j3}$ i lati e siano $\vartheta_{j1}, \vartheta_{j2}, \vartheta_{j3}$ gli angoli esterni. Dal Teorema locale di Gauss-Bonnet si ha

$$\sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_{jk}} k_g ds + \int_{T_j} K dA + \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} = 2\pi.$$

Sommando per tutti i $j = 1, \dots, F$ si trova

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_{jk}} k_g ds + \sum_{j=1}^F \int_{T_j} K dA + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} = 2\pi F.$$

Da quest'ultima, tenendo conto che l'integrazione lungo i lati interni è zero poiché sono percorsi due volte in direzioni opposte, si veda la figura sotto



si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds + \int_R K dA + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} = 2\pi F. \quad (17.11)$$

Per terminare la prova dobbiamo mostrare che

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} = 2\pi E - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_{\ell}.$$

A tal fine, siano $\varphi_{jk} = \pi - \vartheta_{jk}$, $k = 1, 2, 3$, gli angoli interni di T_j . Allora

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} = \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \pi - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}. \quad (17.12)$$

Denotiamo con

E_e = il numero dei lati esterni di $\mathcal{F}$, cioè dei lati che sono parte del bordo di R

E_i = il numero dei lati interni di $\mathcal{F}$

V_e = il numero dei vertici esterni di $\mathcal{F}$, cioè dei vertici che appartengono al bordo di R

V_i = il numero dei vertici interni di $\mathcal{F}$

Essendo le curve C_i chiuse si ha che

$$E_e = V_e.$$

Inoltre, per ogni triangolo vi sono tre lati e di questi quelli interni sono sempre in condivisione con due triangoli distinti quindi un lato interno contribuisce due volte al numero teorico (moltiplicando per 3 le facce) dei lati totali della triangolazione. Segue che

$$3F = 2E_i + E_e. \quad (17.13)$$

Sostituendo la (17.13) nella (17.12) si trova

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} = 3\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}. \quad (17.14)$$

Adesso, un vertice esterno può essere uno dei vertici di una delle curve C_i oppure un nuovo vertice introdotto dalla triangolazione $\mathcal{T}$. Poniamo

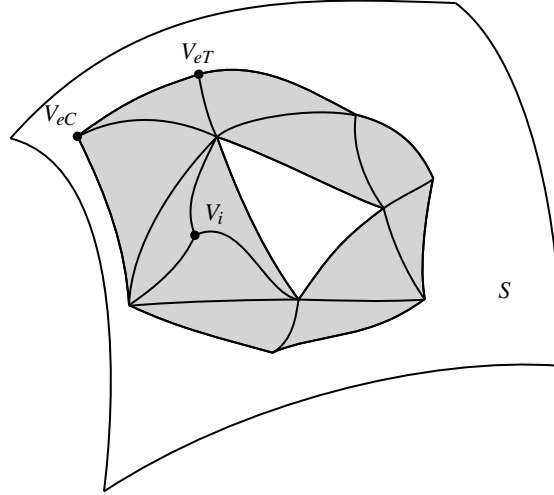
$$V_e = V_{eC} + V_{eT}$$

dove

V_{eC} = il numero dei vertici esterni che sono anche vertici di qualche curva C_i (quindi $V_{eC} = p$)

V_{eT} = il numero dei vertici esterni introdotti dalla triangolazione

Osserviamo subito che la somma degli angoli interni φ_{jk} che insistono su un vertice interno è 2π mentre la somma degli angoli interni che insistono su uno dei vertici esterni introdotti dalla triangolazione è π . Inoltre per i vertici esterni che sono anche vertici di una delle curve C_i si trova che la somma degli angoli interni che insistono su tale vertice è $\pi - \vartheta_\ell$ dove ϑ_ℓ è il corrispondente angolo esterno. Si veda la figura seguente



Troviamo quindi che

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = 2\pi V_i + \pi V_{eT} + \sum_{\ell=1}^p (\pi - \vartheta_\ell). \quad (17.15)$$

Sostituendo la (17.15) nella (17.14) si perviene a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \vartheta_{jk} &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{eT} - \sum_{\ell=1}^p (\pi - \vartheta_\ell) \\ (\text{sommando e sottraendo } \pi E_e) (\text{usando } V_{eC} = p) &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{eT} - \pi V_{eC} + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_\ell \\ (\text{usando } E = E_i + E_e) (\text{usando } E_e = V_e) &= 2\pi E - \pi V_e - 2\pi V_i - \pi(V_{eT} + V_{eC}) + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_\ell \\ (\text{usando } V_{eT} + V_{eC} = V_e) &= 2\pi E - \pi V_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_\ell \\ &= 2\pi E - 2\pi V_e - 2\pi V_i + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_\ell \\ (\text{usando } V_e + V_i = V) &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^p \vartheta_\ell. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Sostituendo la (17.16) nella (17.11) si ottiene la tesi. ■

Il seguente corollario è forse il più elegante risultato della geometria differenziale delle superfici

Teorema 17.4 Sia S una superficie orientabile chiusa (compatta senza bordo). Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dA = \mathcal{X}(S). \quad (17.17)$$

17.3 Applicazioni del Teorema di Gauss-Bonnet

Diamo alcune applicazioni del Teorema di Gauss-Bonnet.

Proposizione 17.2 Una superficie chiusa connessa con curvatura di Gauss $K > 0$ dappertutto è omeomorfa ad una sfera.

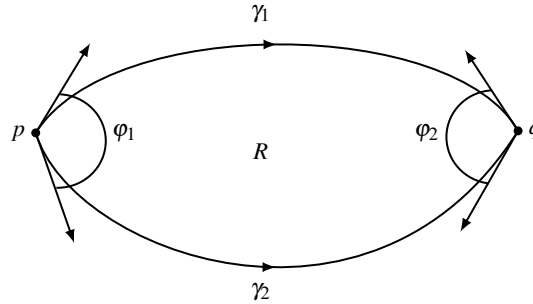
Dimostrazione. Per una superficie chiusa S dal Teorema 17.4 si ha, tenendo conto che $K > 0$,

$$0 < \frac{1}{2\pi} \int_S K dA = \mathcal{X}(S).$$

Segue che $\mathcal{X}(S) > 0$. Dal Teorema di Classificazione delle Superfici S è omeomorfa ad una sfera con l'aggiunta di g manici e la caratteristica di Eulero-Poincaré è $\mathcal{X}(S) = 2 - 2g$. Poiché $\mathcal{X}(S) > 0$ si deve avere $g = 0$ da cui S è omeomorfa ad una sfera S^2 . ■

Proposizione 17.3 Sia S una superficie orientabile con curvatura di Gauss $K \leq 0$. Allora due geodetiche γ_1 e γ_2 uscenti da un punto p non possono incontrarsi in un altro punto q in modo da racchiudere una regione semplice. In particolare, non esiste una geodetica chiusa semplice che racchiude una regione semplice.

Dimostrazione. Con riferimento alla figura seguente



supponiamo che γ_1 e γ_2 si incontrino in un altro punto q in modo da racchiudere una regione semplice R . Allora, essendo R omeomorfa ad un disco, si ha che $\mathcal{X}(R) = 1$ (verificare). Segue, dal Teorema 17.3, che

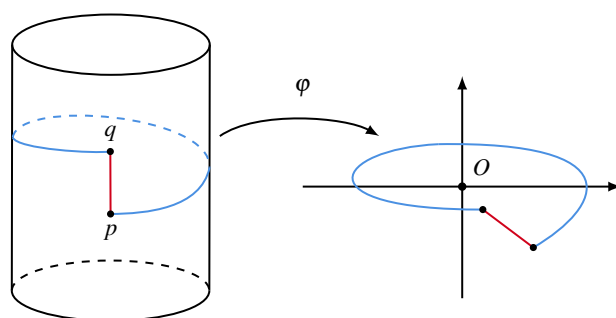
$$\int_R K dS + (\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) = 2\pi,$$

dove φ_1 e φ_2 sono gli angoli interni nei due vertici p e q . Se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ allora $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_2 > 0$ (se $\varphi_1 = 0$ le geodetiche sarebbero tangenti in p e, per l'Osservazione 15.5, dovrebbero coincidere) da cui segue che, poiché $K \leq 0$,

$$0 \geq \int_R K dS = \varphi_1 + \varphi_2 > 0,$$

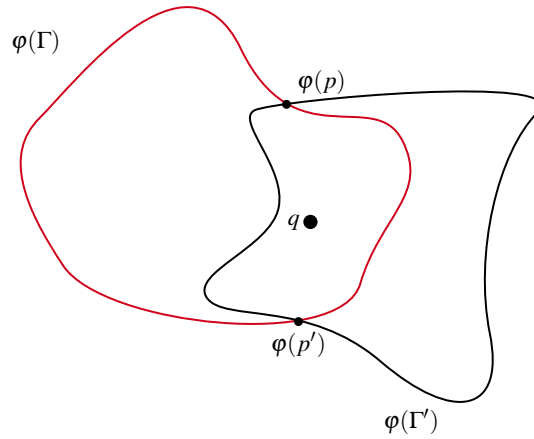
che è ovviamente assurdo. La seconda affermazione della proposizione segue dall'osservazione che data una geodetica γ chiusa e semplice, questa si può pensare come unione di due geodetiche per due punti distinti $p, q \in \gamma$ con angoli interni, in questi due punti, pari a π . ■

■ **Esempio 17.1** La condizione $K \leq 0$ nella Proposizione 17.3 è necessaria. Infatti nella sfera tutte le geodetiche sono curve chiuse (cerchi massimi) che racchiudono una regione semplice. Il cilindro contiene geodetiche semplici chiuse, tutti i paralleli, ma questi ultimi tramite il diffeomorfismo φ dal cilindro al piano meno un punto O vengono mandati in circonferenze che racchiudono il punto O mancante al piano e quindi non racchiudono una regione semplice. Analogamente, per due punti p e q del cilindro esistono più geodetiche uscenti da p che si incontrano in q . Per esempio se i due punti sono sullo stesso meridiano vi è sia l'arco di meridiano che un arco di elica che li congiungono. Anche in questo caso l'immagine tramite il diffeomorfismo φ rappresenta due curve che racchiudono una regione non semplice. Si veda la figura seguente

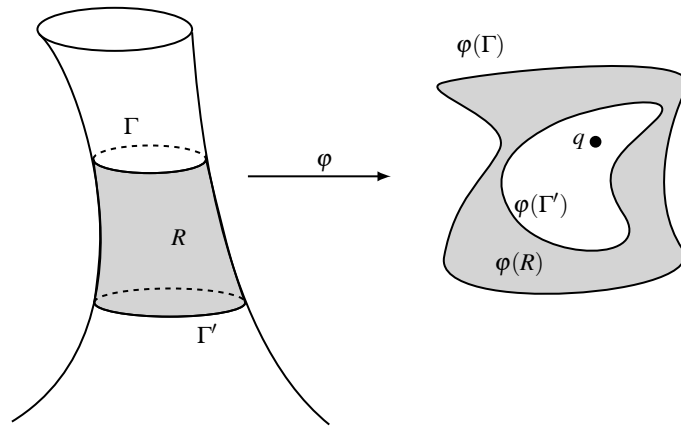


Proposizione 17.4 Sia S una superficie regolare diffeomorfa ad un cilindro con curvatura di Gauss K negativa dappertutto. Allora esiste al più una geodetica chiusa semplice.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che un cilindro è diffeomorfo ad un piano meno un punto. Infatti il cilindro, tramite l'applicazione $P \rightarrow P/\|P\|$, è diffeomorfo ad una sfera meno due punti la quale, tramite la proiezione stereografica, è diffeomorfa al piano meno un punto q . Segue che la superficie S è diffeomorfa ad un piano meno un punto q . Chiamiamo tale diffeomorfismo φ . Sia adesso Γ una geodetica chiusa e semplice di S e sia $\varphi(\Gamma)$ la sua immagine. Per la Proposizione 17.3 $\varphi(\Gamma)$ è una curva semplice e chiusa che contiene q nel suo interno (se non contenesse q allora racchiuderebbe una regione semplice, assurdo poiché la curvatura di Gauss è negativa). Supponiamo adesso, per assurdo, che esista un'altra geodetica semplice e chiusa Γ' di S . Allora $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$. Infatti se $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$ le due geodetiche si incontrerebbero in due punti p e p' distinti (le geodetiche non possono essere tangenti altrimenti, per l'Osservazione 15.5, dovrebbero coincidere). Si veda la figura sotto dove indichiamo le immagini nel piano, tramite φ , delle corrispondenti geodetiche.



Segue che l'arco di geodetica Γ da p a p' assieme all'arco esterno di geodetica Γ' da p a p' formano due segmenti di geodetiche da p a p' che racchiudono una regione semplice Q , assurdo per la Proposizione 17.3. Quindi $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\Gamma')$ sono due curve chiuse e semplici del piano che racchiudono q , si veda la figura sotto.



Sia $R \subseteq S$ la regione regolare di S la cui immagine tramite φ sia la regione del piano costituita dalla corona racchiusa tra le due curve $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\Gamma')$. Allora, per il Teorema 17.3, si ha

$$\int_R K dS = 2\pi \mathcal{X}(R).$$

Per calcolare $\mathcal{X}(R)$ possiamo calcolare $\mathcal{X}(\varphi(R))$. Poiché $\varphi(R)$ è omeomorfa ad una corona racchiusa tra due circonferenze concentriche per quanto visto nella dimostrazione del Lemma 17.1, la caratteristica di Eulero-Poincaré vale $\mathcal{X}(\varphi(R)) = 0$.

Segue, poiché $K < 0$,

$$0 > \int_R K dS = 0$$

che produce l'assurdo cercato. ■

Proposizione 17.5 Sia S una superficie chiusa connessa con $K > 0$ dappertutto. Allora due geodetiche chiuse e semplici, se esistono, si devono intersecare.

Dimostrazione. Per la Proposizione 17.2 S è omeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^2$. Se Γ e Γ' fossero due geodetiche semplici, chiuse senza intersezioni, allora, viste in $\mathbb{S}^2$ racchiuderebbero una regione R

con $\mathcal{X}(R) = 0$ (stesso calcolo della corona circolare fatto nella proposizione precedente). Segue, sempre dal Teorema 17.3, l'assurdo

$$0 < \int_R K dS = 0.$$

