

LA DIFFERENZIABILITÀ

DATI $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ E

$P \in \hat{A}$, CONSIDERIAMO $E(a_1, \dots, a_n)$

GRAFICO DI $Z(x_1, \dots, x_n) = f(P_1, \dots, P_n) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - P_i)$ PASSANTE PER

$(P_1, \dots, P_n, f(P_1, \dots, P_n))$. SE ESISTONO VALORI DI $a_1, \dots, a_n$ TALI CHE

$$\lim_{x \rightarrow P} \frac{f(x_1, \dots, x_n) - Z(x_1, \dots, x_n)}{\|x - P\|} = 0$$

SI DICE CHE f È DIFFERENZIABILE NEL PUNTO P , IL DIFFERENZIALE DI f È L'APPLICAZIONE LINEARE $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DATA DA $Lh = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$ PER $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ E IL PIANO $E(a_1, \dots, a_n)$ SI DICE PIANO TANGENTE.

LEMMA. IN TAL CASO, f È DERIVABILE PARZIALMENTE E $\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ PER $i=1, \dots, n$

CASO PARTICOLARE: $n=2$

$$\frac{f(x, y) - \left[f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - P_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - P_2) \right]}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}}$$

$\xrightarrow{(x, y) \rightarrow P} 0$: DIFFERENZIABILITÀ

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. SAPIAMO PER IPOTESI CHE

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n) - \left[f(P) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - P_i) \right]}{\|x - P\|} \rightarrow 0$$

CERCHIAMO $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)$, QUINDI PONIAMO $x_i = P_i$ PER $i=2, \dots, n$ E TROVIAMO CHE

$$\frac{f(x_1, P_2, \dots, P_n) - f(P) - \alpha_1 (x_1 - P_1)}{|x_1 - P_1|} \rightarrow 0$$

MOLTIPLICHO PER $\frac{|x_1 - P_1|}{x_1 - P_1} \in \{-1, 1\}$

E OTTENIAMO

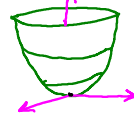
$$\frac{f(x_1, P_2, \dots, P_n) - f(P)}{x_1 - P_1} \rightarrow \alpha_1 \text{ C.V.D.}$$

ESEMPLO. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (0, 0)$.

NON È DIFFERENZIABILE PERCHÈ NON ESISTONO

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ E } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad P = (0, 0). \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$



$$\frac{x^2 + y^2 - \left[0 + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \checkmark$$

LA $f(x, y)$ È DIFFERENZIABILE E IL PIANO TANGENTE È IL GRAFICO DI $Z(x_1, \dots, x_n) = f(P_1, \dots, P_n) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - P_i)$ CIOÈ $Z=0$.

NOTA: LA DIFFERENZIABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ

$$\text{PONIAMO } o(1) = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - \left[f(P) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - P_i) \right]}{\|x - P\|} \rightarrow 0$$

E SCRIVIAMO

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(P) = \|x - P\| o(1) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - P_i)$$

$$\text{QUINDI } \lim_{x \rightarrow P} \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(P)}{\|x - P\|} = 0$$

$$\text{ESEMPIO: } f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } xy = 0 \\ 1, & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$$

È DISCONTINUA IN $(0, 0)$, QUINDI NON È DIFFERENZIABILE BENCHÈ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

$$\text{IDEM } f(x, y) = \begin{cases} y e^{x/y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

DISCONTINUA IN $(0, 0)$, NON DIFFERENZIABILE,

$$\text{BENCHÈ ESISTANO } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ E } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

VERIFICA. PRENDIAMO $\hat{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2$
CON $\alpha \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ E CONSIDERIAMO

$$\frac{f(0 + t \cos \alpha, 0 + t \sin \alpha) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \frac{t \sin \alpha e^{\frac{t \cos \alpha}{t \sin \alpha}}}{t} = \sin \alpha e^{\cot \alpha}$$

$$\text{QUINDI } \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = \sin \alpha e^{\cot \alpha}$$

$$\text{PER } \alpha = 0 \text{ SI HA } \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\text{E, PER } \alpha = \pi, \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

MORALE: SE $n \geq 2$ LA DERIVABILITA' IN TUTTE LE DIREZIONI NON IMPLICA LA CONTINUITA'

UN'IMPORTANTE CONSEGUENZA DELLA DIFFERENZIABILITA' E' LA FORMULA DEL GRADIENTE:

SE f E' DIFFERENZIABILE IN $P \in \dot{A}$, ALLORA PER OGNI VETTORE $\hat{v}$ ESISTE $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(P)$ E

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(P) = \hat{v} \cdot \nabla f(P)$$

DIMOSTRAZIONE. PER IPOTESI,

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n) - \left[f(P) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot (x_i - P_i) \right]}{\|x - P\|} \rightarrow 0$$

SOSTITUIAMO $x = P + t \hat{v}$ CIOE' $x_i = P_i + t v_i$
E TROVIAMO

$$\frac{f(P + t \hat{v}) - f(P) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot t v_i}{|t|} \rightarrow 0$$

E QUINDI, MOLTIPLICANDO PER $\frac{|t|}{t} \in \{-1, 1\}$

$$\frac{f(P + t \hat{v}) - f(P)}{t} \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot v_i = \hat{v} \cdot \nabla f(P)$$

MA COME SI VEDE SE UNA $f(x_1, \dots, x_n)$ E'

DIFFERENZIABILE IN $P \in \dot{A}$?

CONDIZIONE SUFFICIENTE: IN UN $B_P(P)$ ESISTANO

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ PER $i=1, \dots, n$ E SIANO CONTINUE

NEL PUNTO P . LO DIMOSTRIAMO NEL CASO $n=2$

DOBBIAMO STUDIARE IL RAPPORTO

$$\frac{f(x, y) - f(P) - \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - P_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - P_2)}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}}$$

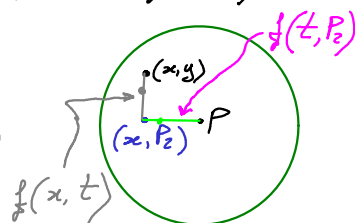
$$\text{ARTIFICIO: } f(x, y) - f(P) =$$

$$= f(x, y) - f(x, P_2) + f(x, P_2) - f(P_1, P_2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, c(x, y))(y - P_2)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(d(x, y), P_2)(x - P_1)$$

PER L'ESISTENZA DI
 $\frac{\partial f}{\partial x}$ E $\frac{\partial f}{\partial y}$ IN $B_P(P)$



$$\frac{d}{dt} f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

MA

$$\frac{\partial f}{\partial x}(d(x, y), P_2) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow P} \frac{\partial f}{\partial x}(P)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, c(x, y)) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow P} \frac{\partial f}{\partial y}(P)$$

PER L'IPOTESI DI CONTINUITA' DI $\frac{\partial f}{\partial x}$ E

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(d(x, y), P_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(P) = o(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, c(x, y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) = o(1) \text{ E, SOSTITUENDO,}$$

$$\text{TROVIAMO } f(x, y) - f(P) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) + o(1) \right) (x - P_1)$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P) + o(1) \right) (y - P_2) \text{ DUNQUE}$$

$$\frac{f(x, y) - f(P) - \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - P_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - P_2)}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} =$$

$$= \frac{o(1)(x - P_1) + o(1)(y - P_2)}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} =$$

$$= o(1) \frac{x - P_1}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} +$$

$$+ o(1) \frac{y - P_2}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (P_1, P_2)} 0$$

$$\text{PERCHE' } |x - P_1| = \sqrt{(x - P_1)^2} \leq \sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}$$

$$\text{QUINDI } \frac{|x - P_1|}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} \leq 1 \text{ E SIMILMENTE}$$

$$\frac{|y - P_2|}{\sqrt{(x - P_1)^2 + (y - P_2)^2}} \leq 1$$