

LIMITI DI $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$

LA CONTINUITÀ SI ESPRIME CON

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = f(P) \quad (\text{iii})$$

QUANDO P È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

PER DARE LA DEFINIZIONE SERVE CHE P SIA PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

NON SERVE $P \in A$

PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$,

$$A \cap B_\varepsilon(P) \setminus \{P\} \neq \emptyset$$

LIMITE FINITO $l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = l$ SE PER OGNI INTERVALLO V DI l

ESISTE UN INTERVALLO U DI P TALE CHE

$f(U \setminus \{P\}) \subset V$. NOTA: LE INTERSEZIONI $A \cap B_\varepsilon(P)$ SONO INTERVALLI RELATIVI.

EQUIVALENTEMENTE: $\forall \varepsilon \in (0, +\infty)$

$\exists \delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE PER OGNI $x \in A$

SE $0 < \|x - P\| < \delta$ SI ABBAIA $|f(x) - l| < \varepsilon$.

CONDIZIONE NECESSARIA:

$$\lim_{t \rightarrow P_1} f(t, P_2, \dots, P_n) = l$$

AMMESSO CHE $(t, P_2, \dots, P_n) \in A$

LIMITE INFINITO: LE SEMIRETTE $(a, +\infty) \in \mathbb{R}$

SONO INTERVALLI BUCATI DI $+\infty$. LE $(-\infty, b)$

LO SONO DI $-\infty$. SI SCRIVE

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = +\infty$$

SE PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE

CHE PER OGNI $x \in A$ SE $0 < \|x - P\| < \delta$ SI HA $f(x) > \alpha$

SI SCRIVE

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = -\infty$$

SE PER OGNI $b \in \mathbb{R}$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE

CHE PER OGNI $x \in A$ SE $0 < \|x - P\| < \delta$

SI HA $f(x) < b$

DATO $F: A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^n$, E P PUNTO DI ACCUMULAZIONE ($P \in DA$), SI SCRIVE

$$\lim_{x \rightarrow P} F(x) = v \text{ SE } \lim_{x \rightarrow P} f_i(x) = v_i \in \mathbb{R}$$

PER OGNI $i = 1, \dots, k$ OVVERO SE

$$\lim_{x \rightarrow P} \|F(x) - v\| = 0$$

ESEMPI

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$$

PRESO $\alpha \in \mathbb{R}$ FACCIAMO IN MODO CHE

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > \alpha$$

QUANDO $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ CIOÈ

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\text{PRENDENDO } \delta = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{SE } \alpha > 0 \\ 1, & \text{SE } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

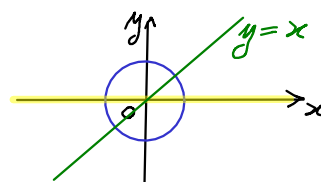
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

PER CAPIRE l , STUDIAMO $f(x, 0) = 0$ PER $x \neq 0$
QUINDI $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.

RESTA DA VEDERE SE

$$\left| \frac{2xy}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

PER $(x,y) \in B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}$



$f(x,x) = 1$ IMPLICA CHE LA f NON HA LIMITE

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

$$\text{DOVE } f(x,y) = \begin{cases} ye^{x/y}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$\text{SI TROVA } \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$$

$$\text{E } \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} ye^{0/y} = 0$$

$$\text{ALLORA PONIAMO } y = mx, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

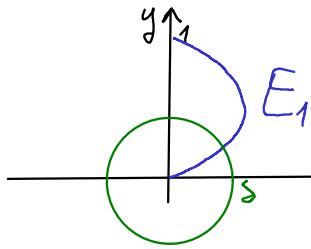
$$\text{E TROVIAMO } \lim_{x \rightarrow 0} ye^{x/y} = \lim_{x \rightarrow 0} mx e^{1/m} = 0.$$

$$\text{CERCHIAMO } E_1 = \{(x,y) : f(x,y) = 1\}$$

$$\text{STUDIANDO } ye^{x/y} = 1, \quad y > 0$$

$$\text{RICAVIAMO } e^{x/y} = \frac{1}{y} \text{ DA CUI } \frac{x}{y} = -\log y$$

$$\text{E INFINE } x = -y \log y \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$$



IL CHE ESCLUDE CHE

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$