

LEZIONE 14-10-26

Svolgimento esercizi: 1) disegnare $4x + x^2 + y^2 = 12$

Questa è una circ, completamente dei quadrati:

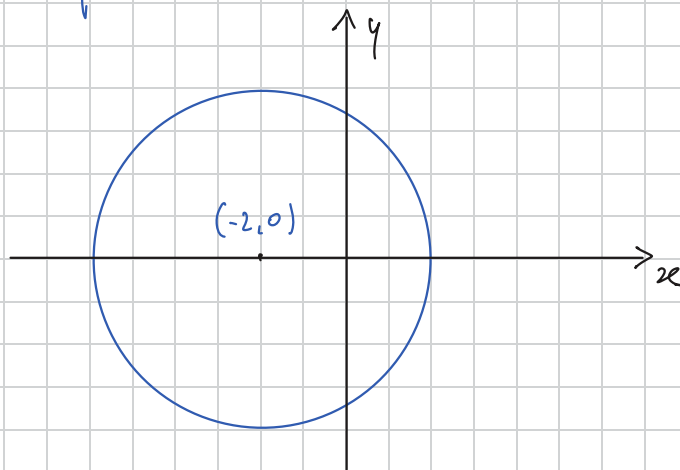
$$(x^2 + 4x) + (y^2) = 12$$

$$(x^2 + 4x + 4) + y^2 = 12 + 4 \rightarrow$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 16$$

Centro $C = (-2, 0)$

Raggio $r = 4$



2) eq. della retta per $C = (-3, 2)$ e $D = (-3, -1)$:

poiché $x_C = x_D = -3$, la retta cercata è $x = -3$

3) eq. della retta per $E = (3, 0)$ e $O = (0, 0)$:

poiché $x_E \neq x_O$ risolvo il sistema con $y = mx + q$:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 3 + q \\ 0 = m \cdot 0 + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = 0 \cdot x + 0$$

ovv $y = 0$

4) circ di centro $(-1, 1)$ e raggio $\frac{1}{2}$:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + \frac{7}{4} = 0$$

5) disegnare $x^2 + y^2 + 2y \geq 0$: partiamo da $x^2 + y^2 + 2y = 0$
e completiamo i quadrati

$$(x^2) + (y^2 + 2y) = 0$$

$$x^2 + (y^2 + 2y + 1) = +1$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 1$$

Centro $(0, -1)$

raggio $r = 1$

Per capire se
la disequazione

$$x^2 + y^2 + 2y \geq 0$$

identifica le

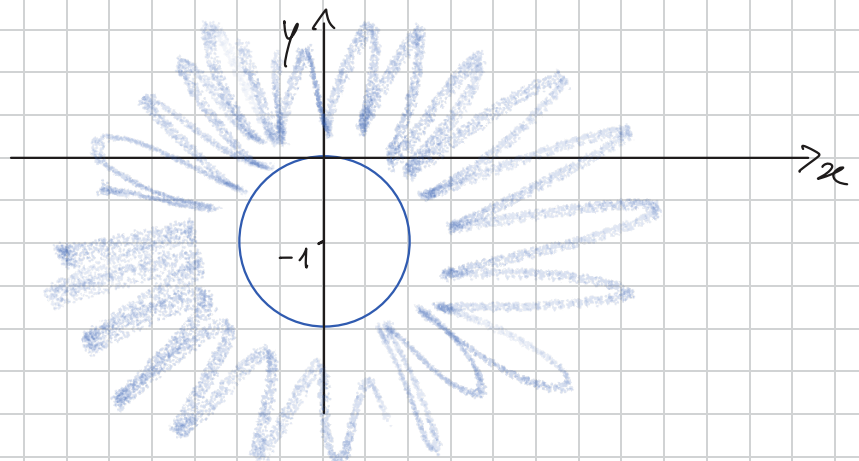
regione interne o esterne, vediamo se è soddisfatta dal centro:

$$0^2 + (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \geq 0$$

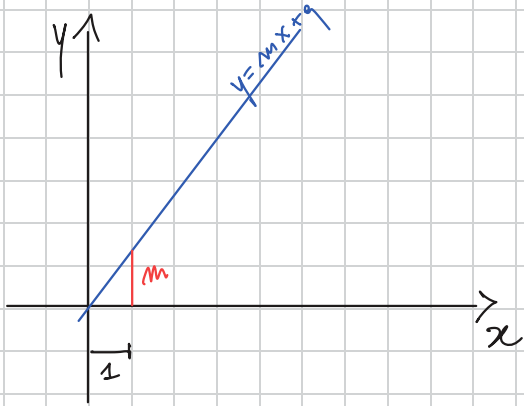
$$0 + 1 - 2 \geq 0$$

$$-1 \geq 0 \quad \text{X}$$

pertanto il centro sta nella regione sbagliata. Quella giusta è quella ESTERNA.



Nota: significato geometrico di m . Nelle forme esplicite $y = mx + q$ di una retta, m rappresenta l'incremento



della retta dopo uno spostamento unitario della x . Una cosa che possiamo quindi concludere è che se r, t sono due rette parallele allora m sarà uguale per entrambe. Esso

è chiamato COEFFICIENTE ANGOLARE delle rette.

Esempio: $r: y = 3x + 2$ $t: y = 3x - 1$ hanno
stesso coeff. angolare $m = 3$ e sono quindi parallele.

Esercizio: rappresentare r, t .

Domanda: se invece l, s sono due rette PERPENDICOLARI, come sono tra loro i coeff. angolari m_l, m_s ?

Esercizio: scrivere le eq. delle rette su cui giacciono
i lati del triangolo $A = (1, 0)$ $B = (0, 0)$
 $C = (2, 1)$.

Se $m > 0$ la retta è crescente;
 $m < 0$ la retta è decrescente.

Coniche in forme canonica:

La FORMA CANONICA di una cf è quella del tipo
$$x^2 + y^2 = r^2$$

ovvero dove il centro è l'origine $(0, 0)$ e il raggio

è esplicitato (e 2° membro). Non è in forma canonica l'espressione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

(piano cartesiano)

DEF: Una CONICA è il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfanno un'equazione polinomiale di 2° grado:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Un esempio sono le circonferenze ($b=0$ e $a=c$).

ELLISSE: È rappresentata da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(stessa cosa di... $\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 = 1$)

e il suo grafico è:

Intersez. con asse x ($y=0$):

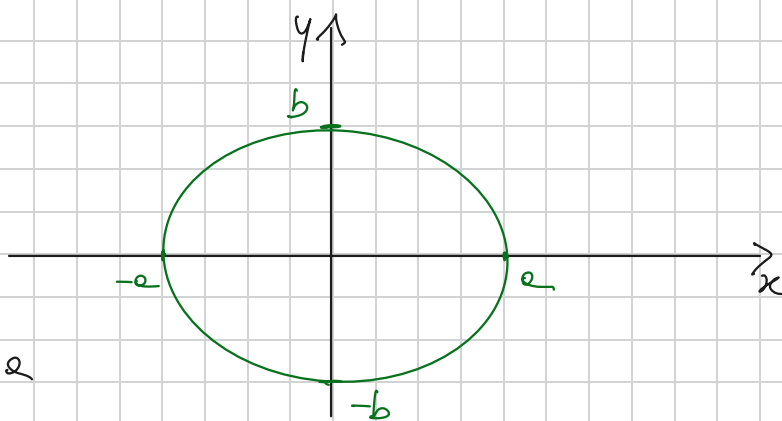
$$\frac{x^2}{a^2} + 0 = 1 \rightarrow x^2 = a^2$$

$$\rightarrow x = a, x = -a$$

Intersez. con asse y ($x=0$):

$$0 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = b^2$$

$$\rightarrow y = b, y = -b$$



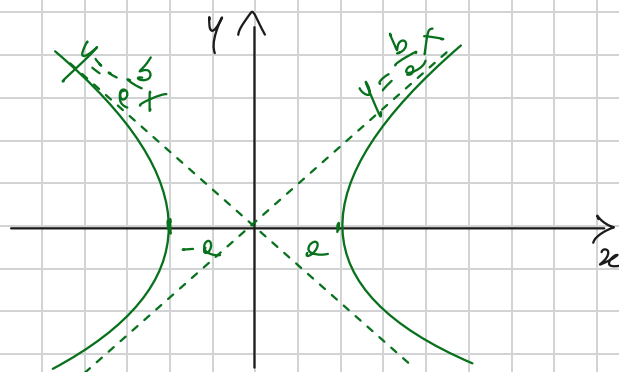
Ovviamente se $a=b$, l'ellisse è una cirf!

IPERBOLE: È rappresentata da

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Intersez. con asse x ($y=0$):

$$\frac{x^2}{a^2} - 0 = 1 \rightarrow x^2 = a^2$$



Intersez. con asse y ($x=0$):

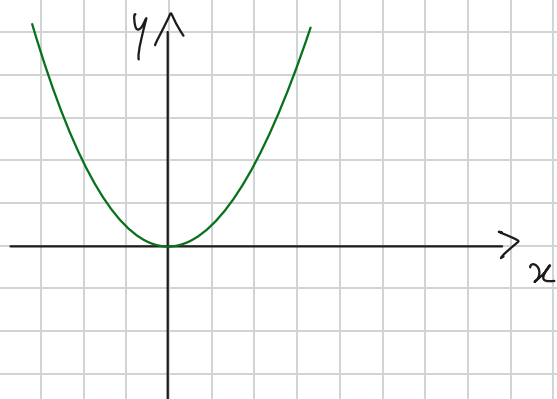
$$0 - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = -b^2$$

IMPOSSIBILE (non si può fare $\sqrt{-b^2}$)

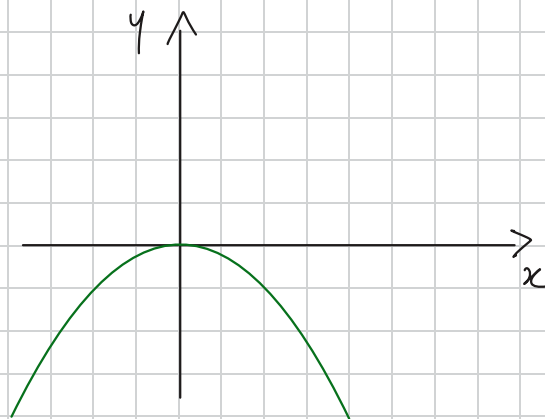
PARABOLA: È rappresentata da:

$$2py = x^2$$

[🌱, VEDI PIÙ AVANTI]



$p > 0$
(CONCAVITÀ VERSO L'ALTO)

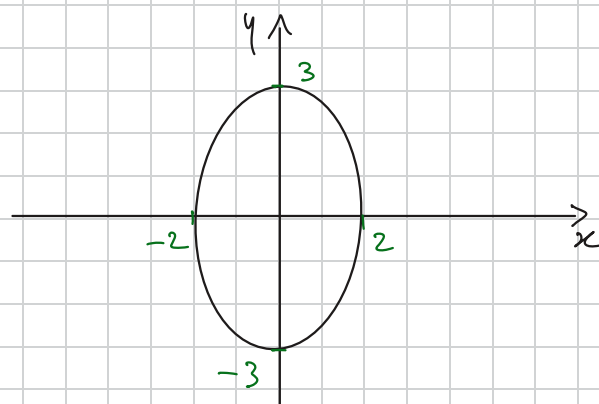


$p < 0$
(CONCAVITÀ VERSO IL BASSO)

Esempi:

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ellisse)

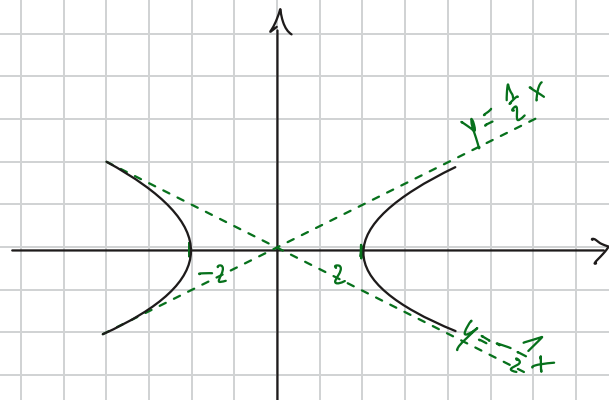
$a=2$, $b=3$



2) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (iperbole)

$a=2$, $b=1$

(gli ASINTOTI sono $y = -\frac{b}{a}x$
o $y = -\frac{1}{2}x$ e
 $y = \frac{b}{a}x$ o $y = \frac{1}{2}x$)

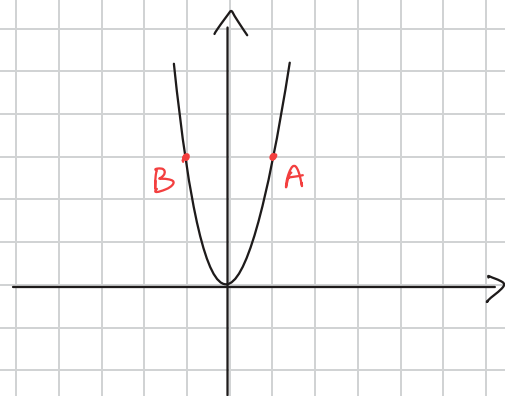


3) $y = 3x^2$ (parabola)

passa per i punti

$x = 1 \rightarrow y = 3 \cdot 1^2 = 3 \quad A = (1, 3)$

$x = -1 \rightarrow y = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \quad B = (-1, 3)$



Esercizio: rappresentare le coniche:

(i) $\frac{x^2}{9} + 4y^2 = 1$

(ii) $y^2 - 1 = 4x^2 - 10$

(iii) $y = \frac{x^2}{2}$

Grafici di funzioni nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

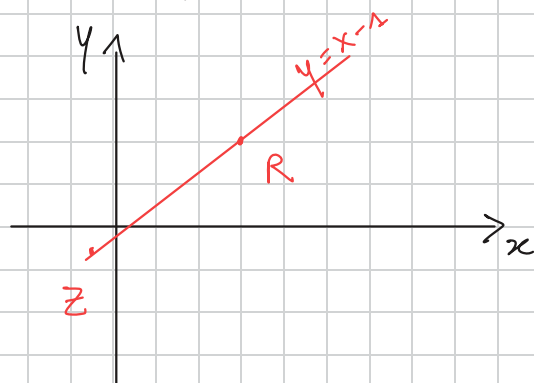
Dato una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il suo grafico è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$, ossia

$$\Gamma f = \text{Grafico}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

« l'insieme delle coppie/punti del piano cartesiano »

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1$. Il suo grafico è

$$\Gamma f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1\} \quad \text{ossia la retta}$$



$y = x - 1$,
che rappresentiamo a lato.

Provo 2 punti per cui passa:

$x = 3 \rightarrow y = 3 - 1 = 2$

ossia il punto $R = (3, 2)$;

$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ ossia il punto $Z = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Un polinomio di 2° grado ha dunque come grafico una conica: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$, allora il grafico è $\Gamma f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{y = ax^2 + bx + c}_{\text{conica}}\}$

Osservazione: poiché in $y = ax^2 + bx + c$ non compare il termine y^2 , il grafico di f non potrà mai essere una cif, una ellisse o un'iperbole!

Può essere però una parabola, che per essere rappresentata segue 2 regole:

- i) la concavità è verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$ [VEDI DISEGNI (93)]
- ii) le intersezioni con l'asse delle x , la cui ascissa è data dalle soluzioni dell'eq. $ax^2 + bx + c = 0$.

Esempi:

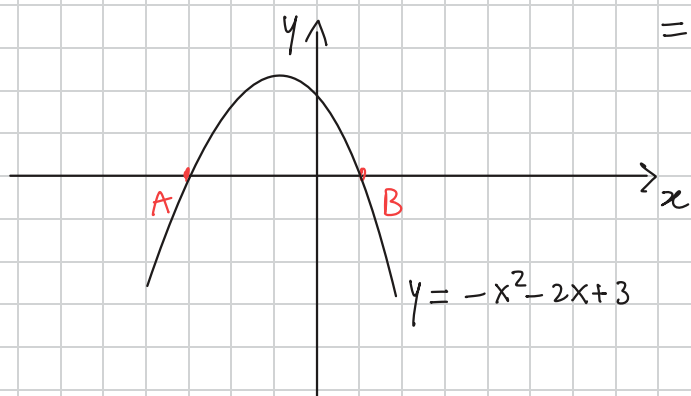
1) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

i) è una parabola con la concavità verso il basso ($a = -1 < 0$)

ii) le intersezioni hanno ascisse

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 3 &= 0 \quad \leadsto \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} \\ a &= -1, \quad b = -2, \quad c = 3 \\ &= \frac{+2 \pm \sqrt{+4 + 12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{6}{-2} &= -3 \\ \frac{-2}{-2} &= 1 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow A = (-3, 0), \quad B = (1, 0)$$

2) $y = 4x^2 - 1$ (sto sempre pensando $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x^2 - 1$
[$a=4, b=0, c=-1$] ed $y = f(x)$ è l'eq. del grafico di f).

È una parabola che ha:

i) concavità verso l'alto

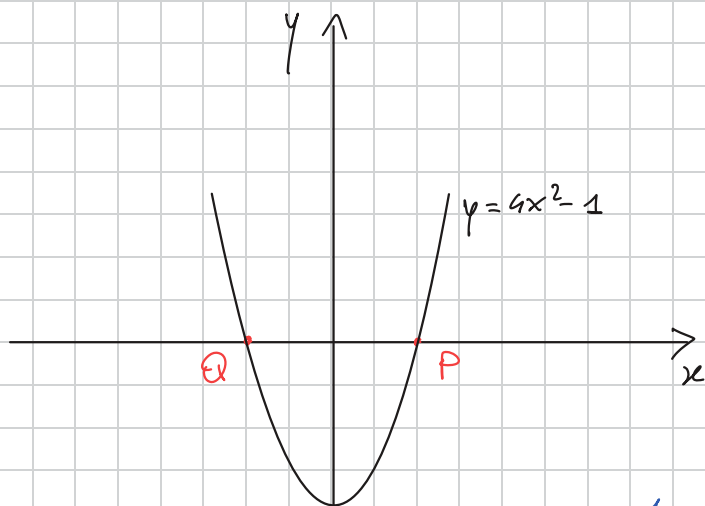
$$(a=4 > 0);$$

ii) intersezioni con l'asse x
aventi ascisse ottenute da

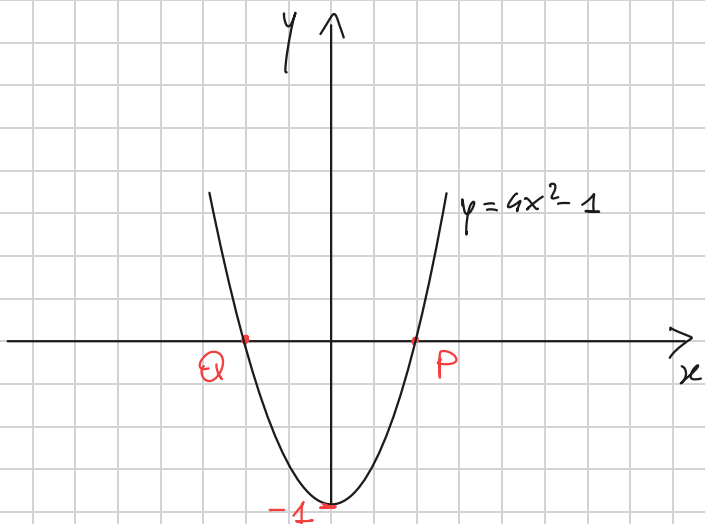
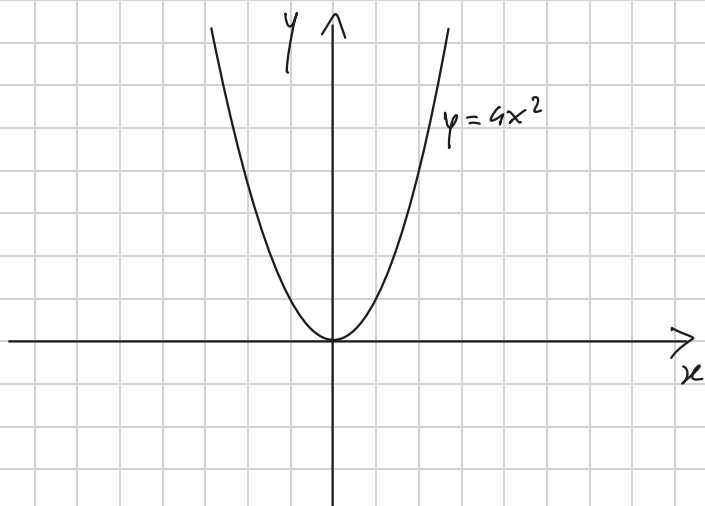
$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(4) \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 16}}{8} = \frac{\pm 4}{8} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ovvero i punti $P = (\frac{1}{2}, 0)$ e $Q = (-\frac{1}{2}, 0)$.



Osservazione: che differenza c'è tra $y = 4x^2$ e $y = 4x^2 - 1$



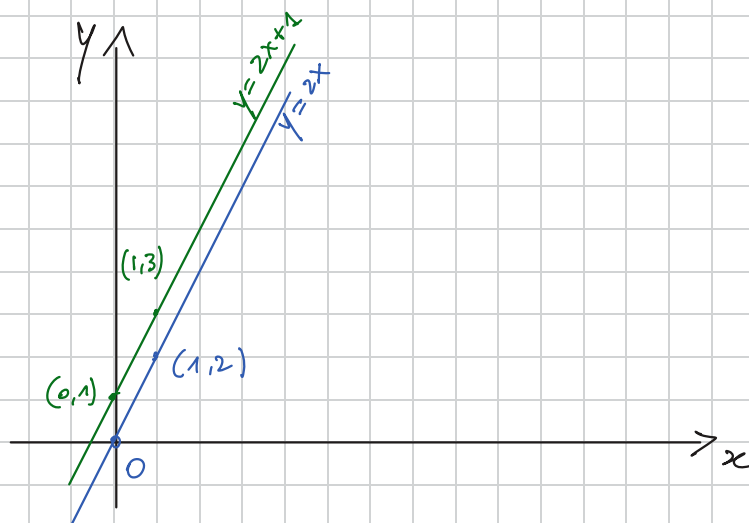
Osserviamo che la seconda parabola è ottenuta dalla prima tramite una traslazione verticale (di -1). In generale, se ho una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, la funzione $g(x) = f(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ costante fissata,
a) se $c > 0$, il grafico di g si ottiene traslando verso l'alto quello di f di una quantità pari a c ;

b) se $c < 0$, il grafico di g si ottiene traslando verso il basso quello di f di una quantità pari a c .

Esempio:

$f(x) = 2x$ cioè il grafico è la retta $y = 2x$

$g(x) = 2x + 1$ cioè il grafico è la retta $y = 2x + 1$



Esercizio: rappresentare la parabola $y = x^2 + x - 2$.