

1.1 Esercizi aggiuntivi Lista 1

Esercizio 1.11 (Esempi riguardanti la teoria). Siano date le seguenti serie numeriche e di funzioni:

- Condizione necessaria della convergenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + (x^2 + 3)n^3 + 1} - \sqrt{n^4 + 2xn^3 + 9})$$

- Criterio del rapporto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{3}{n})}{n^2}$$

- Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n$$

- Serie Telescopica (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

- Convergenza puntuale

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{-\frac{1}{2} \log n}$$

- Convergenza uniforme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+2}, \quad x \in [0, 1]$$

- Convergenza totale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 x^n}, \quad x \in [1, \infty); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1.12 (Serie di potenze). Verificare che le seguenti serie di potenze hanno raggio di convergenza $r = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^5}$$

Studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esercizio 1.13. Determinare il raggio di convergenza r delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+2} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+3/n)^n}$$

Esercizio 1.14. Determinare l'intervallo di convergenza I della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^2 e^n}{n 6^n} x^n$$

Esercizio 1.15. Determinare l'intervallo di convergenza I delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n n^4}$$

Serie di potenze e convergenza uniforme.

Esercizio 1.16. Determinare l'intervallo di convergenza I delle seguenti serie di potenze (compreso lo studio del comportamento agli estremi):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} (x+2)^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n e^n} (x-2)^n.$$

Esercizio 1.17. Trovato un intervallo opportuno in cui poter integrare termine a termine, calcolare:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n dx$$

Esercizio 1.18. Trovato un intervallo opportuno in cui poter derivare termine a termine, calcolare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$$

Domini e superfici.

Esercizio 1.19. Rappresentare graficamente i seguenti domini normali del piano:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, \quad -3 \leq y \leq 1 \right\}; \\ B &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 2x \right\}; \\ C &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^y \leq x \leq e^2, \quad 0 \leq y \leq 2 \right\}; \\ D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq x \right\} \end{aligned}$$

Esercizio 1.20. Rappresentare graficamente le seguenti (porzioni di) superfici dello spazio:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z - 3 = 0 \right\};$$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0 \right\};$$

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0 \right\}.$$