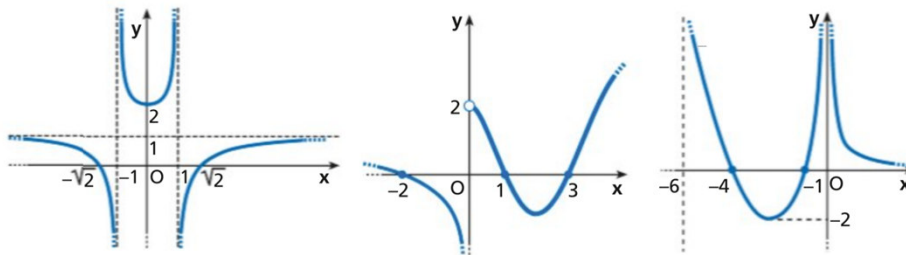


Funzioni continue



1

Funzioni continue

Definizione

Una funzione $f(x)$ si dice **continua in** x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

che equivale a dire che esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ e questo coincide con il valore assunto dalla funzione nel punto, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\ell = f(x_0))$$

Ossia: $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta)$

2

Funzioni continue

Discontinuità

a) Discontinuità eliminabile

Una funzione presenta una discontinuità eliminabile in x_0 se il limite per $x \rightarrow x_0$ esiste finito ma è diverso dal valore assunto dalla funzione nel punto (o se la funzione non è definita in x_0):

Ossia se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \quad \text{con } \ell_1 \neq \ell_2 \neq f(x_0)$$

In questo caso si può definire la funzione ausiliaria $\bar{f}(x)$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

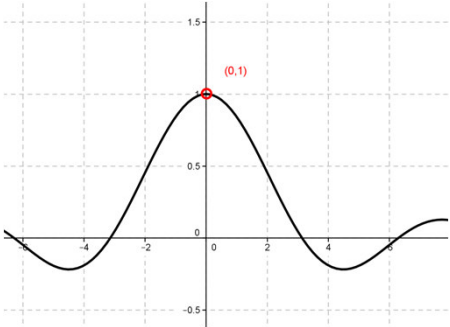
$f(x)$ è stata prolungata per continuità – ridefinita per continuità attraverso $\bar{f}(x)$.

3

Funzioni continue

Esempio di discontinuità eliminabile

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad x \neq 0$$

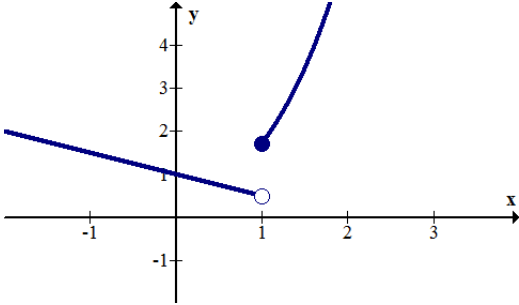
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$


4

Funzioni continue

b) **Discontinuità di prima specie (salto)**

Una funzione presenta una discontinuità di prima specie in x_0 se i limiti destro e sinistro esistono finiti ma sono diversi tra loro:

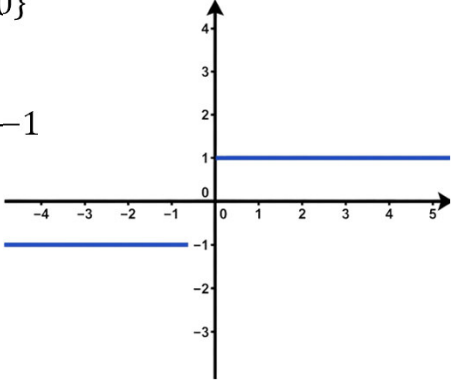
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \quad \text{con } \ell_1 \neq \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R})$$


5

Funzioni continue

Esempio di discontinuità di prima specie

$$y = \frac{|x|}{x}, \quad \text{C.E.: } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$


6

Funzioni continue

c) Discontinuità di seconda specie

Una funzione presenta una discontinuità di seconda specie in x_0 se **almeno uno dei due limiti** (destro o sinistro) **non esiste oppure è infinito** (∞):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{non esiste o è } \infty$$

7

Funzioni continue

c) Discontinuità di seconda specie

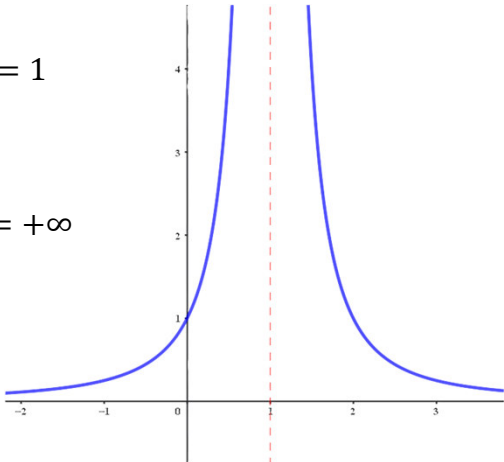
Esempio:

$$y = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad \text{con } x_0 = 1$$

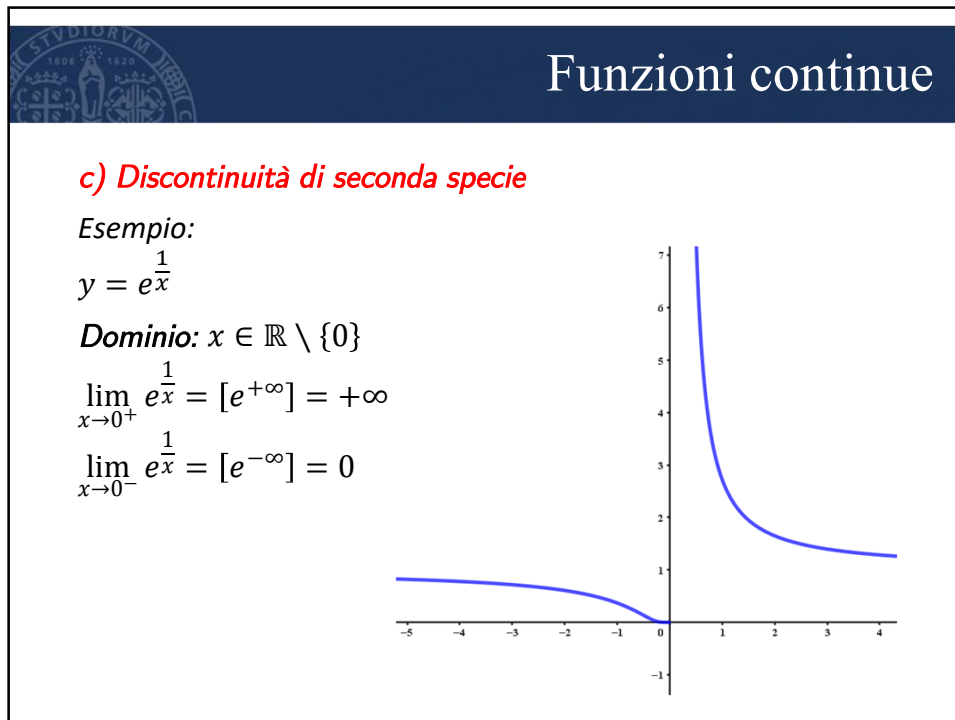
In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale



8



9

Funzioni continue

Esercizio
 Dire se è continua in $x = 0$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{2x \ln|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

10



Funzioni continue

Esercizio
Dire per quali valori di k è continua la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x > 0 \\ x + 2k & x \leq 0 \end{cases}$$

11



Funzioni continue

Esercizio
Dire per quali valori di k la funzione $f(x)$ è continua in $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

12



Funzioni continue

Continuità della funzione composta

Siano:

- g definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0 ;
- f definita almeno in un intorno di $y_0 = g(x_0)$ e continua in y_0 .

Allora la funzione $f(g(x))$ è definita almeno in un intorno di x_0 ed è continua in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

13



Funzioni continue

Proprietà generali delle funzioni continue

- Le funzioni elementari sono continue nel loro campo di definizione,
- **Somma, prodotto, quoziente** (con denominatore diverso da zero) di funzioni continue danno funzioni continue,
- La composizione di funzioni continue è una funzione continua

Il limite si calcola sostituendo x_0 nell'espressione analitica della funzione.

14



Funzioni continue

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 + 3x - 4}$

15



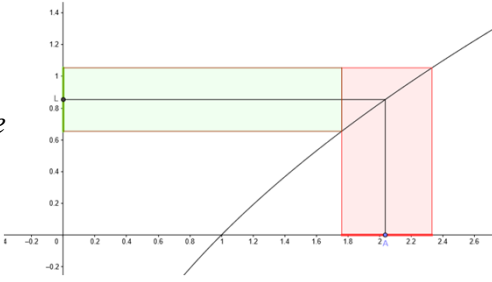
Funzioni continue

Teorema della permanenza del segno

Sia $f(x)$ definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0 .

Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

NOTA:
Il teorema vale anche per funzioni che non sono continue in x_0 , in questo caso anziché $f(x_0)$ si considera ℓ .



16



Funzioni continue

Teorema degli zeri

Ipotesi:

- Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
- Il prodotto dei valori assunti agli estremi dell'intervallo è negativo, ovvero $f(a) \cdot f(b) < 0$ (il che significa che la funzione assume segni opposti agli estremi).

Tesi:

- Esiste almeno un punto x_0 appartenente all'intervallo aperto (a, b) tale che $f(x_0) = 0$.

Nota sull'unicità: Se la funzione f è anche **strettamente monotona** (ovvero sempre crescente o sempre decrescente) nell'intervallo $[a, b]$, allora lo zero x_0 è **unico**.

17



Funzioni continue: Teoremi

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (conseguenza del teorema degli zeri)

Una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

18

Funzioni continue: Teoremi

Teorema di Weierstrass (sul massimo e minimo)

Ipotesi: Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.

Tesi: La funzione assume massimo e minimo assoluto in $[a, b]$, ovvero:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b]: f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b]$$

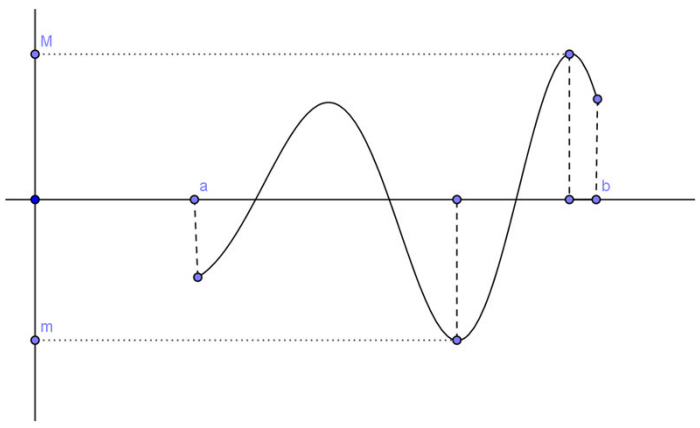
dove:

$m = f(x_1)$ è il **minimo assoluto** di $f(x)$ in $[a, b]$;

$M = f(x_2)$ è il **massimo assoluto** di $f(x)$ in $[a, b]$.

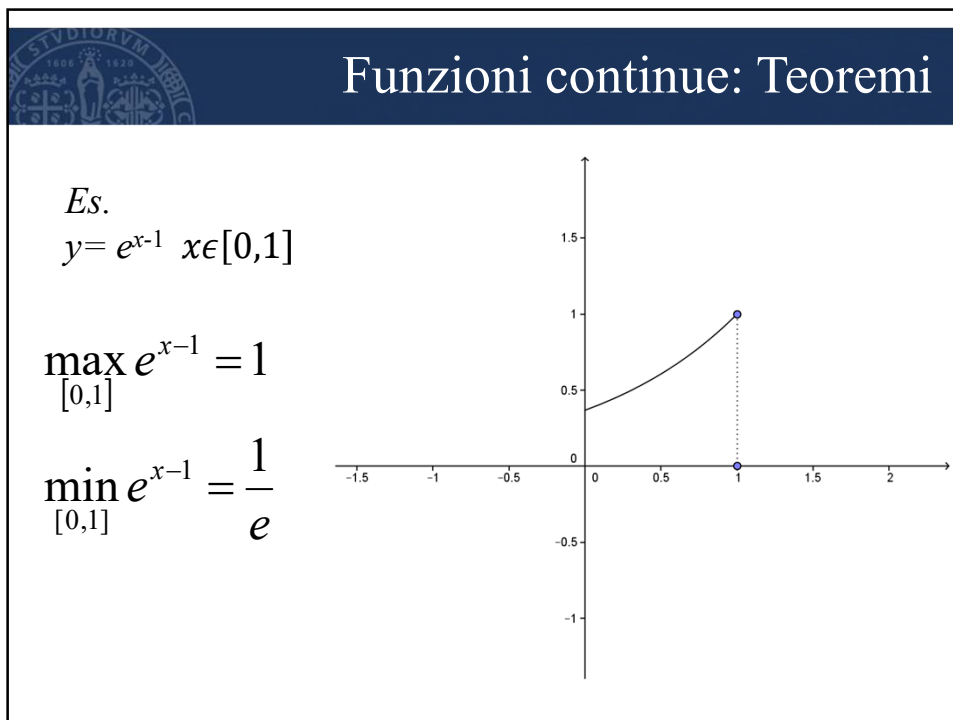
19

Funzioni continue: Teoremi

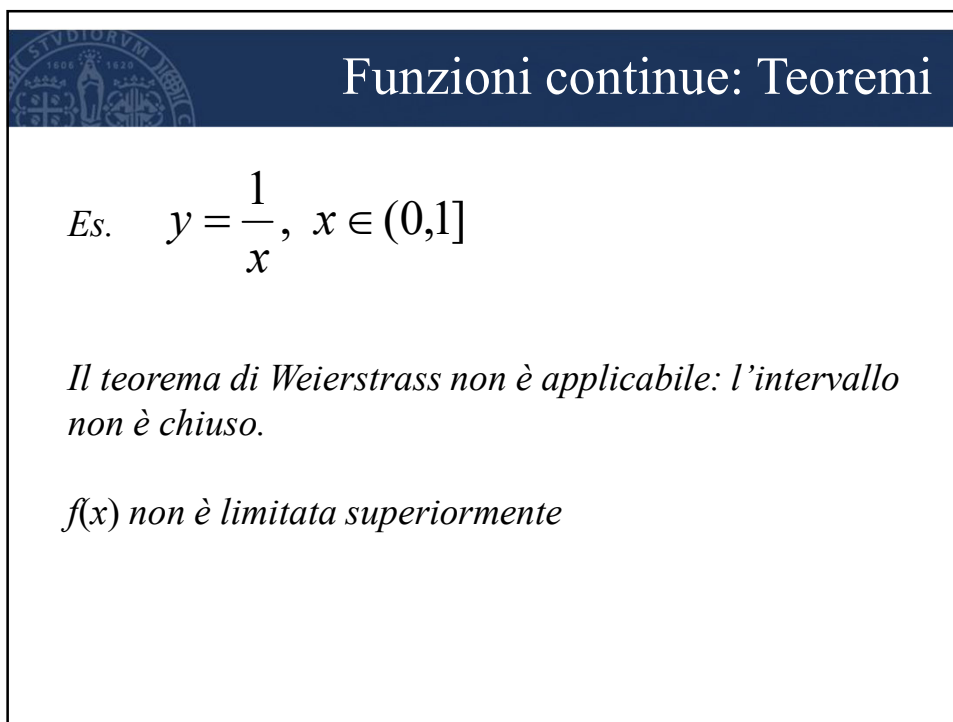


Una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo (m) e il massimo (M)

20



21



22



Funzioni continue: Teoremi

Es. $y = \frac{1}{x}, x \in [1, +\infty)$ *Il teorema di Weierstrass non è applicabile: l'intervallo non è limitato.*

$f(x)$ è limitata ma non ammette minimo, $\inf_{[1, +\infty)} \frac{1}{x} = 0$

23



Funzioni continue: Teoremi

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.

Dimostrazione:

1. Ipotesi di monotonia:

Supponiamo che $f(x)$ sia **strettamente crescente** in $[a, b]$. Essendo la funzione continua e crescente per il Teorema di Weierstrass, la funzione assume i valori minimo e massimo agli estremi dell'intervallo:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

dove $f(a) = \text{minimo}$ e $f(b) = \text{massimo}$.

24



Funzioni continue: Teoremi

Criterio di invertibilità

Dimostrazione:

2. Applicazione del Teorema dei valori intermedi:

Per il Teorema dei valori intermedi, la funzione assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo:

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists x \in [a, b]: f(x) = y$$

Questo dimostra la suriettività della funzione sul codominio $[f(a), f(b)]$.

25



Funzioni continue: Teoremi

Criterio di invertibilità

Dimostrazione:

3. Unicità della immagine (Iniettività):

Poiché la funzione è strettamente crescente, elementi distinti del dominio corrispondono a elementi distinti del codominio ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).

Di conseguenza, tale x è unico.

Quindi $f(x)$ è iniettiva e perciò invertibile.

Inoltre la funzione inversa di una funzione continua è continua

26