

LEZIONE 08-10-26

Svolgimento esercizi:

1) Permutazioni $A = \{R, O, M, A\} \rightarrow P_4 = 4! = 24$
ROMA, ROAM, RMOA, RMAO, RAMO, RAOM,
ARMO, AROM, AMOR, AMRO, AORM, AOMR,
MARO, MAOR, MOAR, MORA, MROA, MRAO,
OMAR, OMRA, ORAM, ORMA, OAMR, OARM.

2) Tutti i codoni PIRINA - PIRIMIDINA - PIRINA:
 $D_{2,1}^{\text{ripetiz}} \cdot D_{2,1}^{\text{ripetiz}} \cdot D_{2,1}^{\text{ripetiz}} = 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 2^3 = 8$

ATA, ACA, ATG, ACG,
GTA, GCA, GTG, GCT.

3) Motivazione della formula per $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Se scrivessi abc oppure acb oppure bca...

... le terme differiscono solo per l'ordine. Quindi le varie disposizioni che "finiscono" nella stessa combinazione altro non sono che tutte le permutazioni dei loro (k) elementi. In questo esempio,

$$A = \{\text{alfabetto italiano}\} = \{a, b, c, d, \dots\}$$

$$\#(A) = 21$$

le terme che posso comporre sono $D_{21,3} = \frac{21!}{(21-3)!}$.

In conclusione, $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} =$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

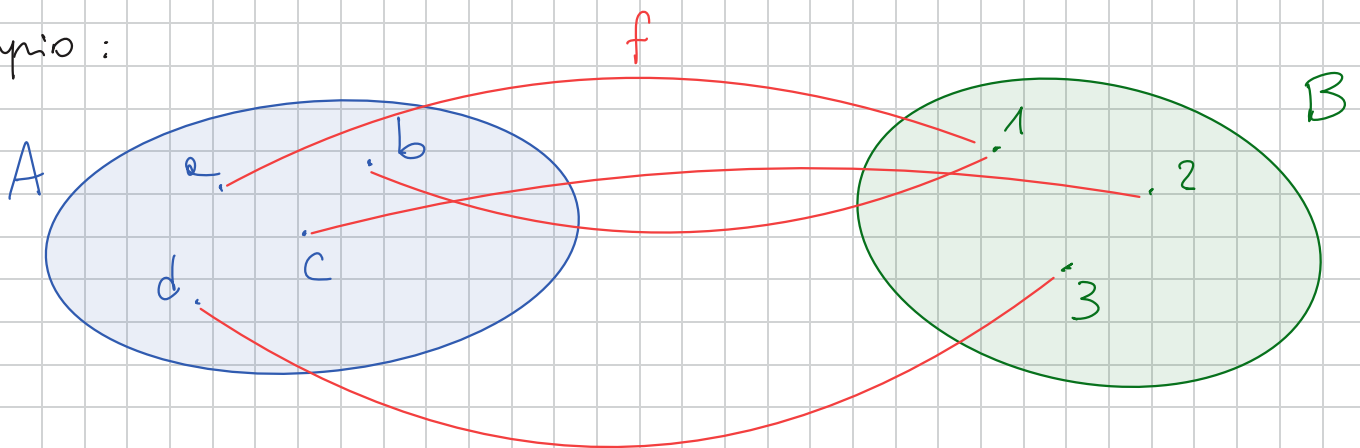
Equazioni e disequazioni fondamentali.

Funzioni: una funzione è, a livello intuitivo, come un apparecchio INPUT-OUTPUT: prende un elemento in ingresso e gli associa un elemento in uscita.

Esempio: la relazione che associa ad ogni individuo la sua età è una funzione. Un altro esempio è la relazione che associa ad un orario del giorno la temperatura rilevata.

h 12 $\mapsto$ 17° C
 h 13 $\mapsto$ 21° C
 h 14 $\mapsto$ 22° C
 h 15 $\mapsto$ 22° C
 ⋮

Esempio:



Se chiamiamo "f" questa funzione, scriveremo

$$f: A \rightarrow B, \quad f(a)=1, f(b)=1, f(c)=2, f(d)=3$$

"f da A a B"

"f di «a» uguale «1»"

DEF: Dati due insiemi A, B , una FUNZIONE tra essi è una legge $f: A \rightarrow B$ che associa ad ogni elemento di A un unico elemento di B .

Esempi:

1) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto 2n$

← "in maniera intensiva"

questa funzione si comporta come:

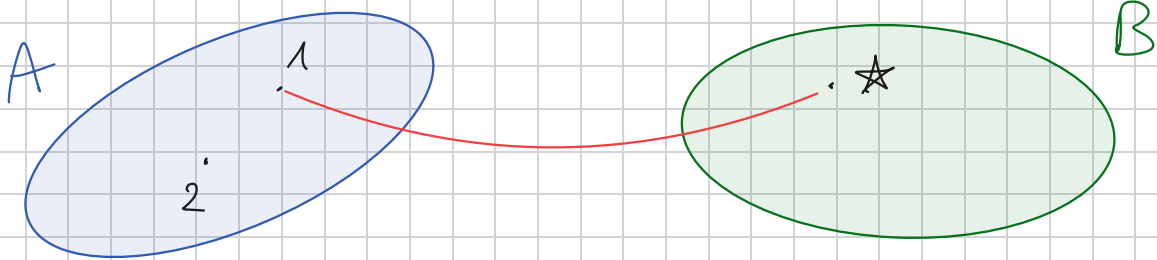
$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 2$$

$$g(2) = 4$$

⋮

2) [non - funzioni] $h: A \rightarrow B$ come



non è una funzione perché $2 \in A$ non è collegato ad alcun elemento di B .

3) $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto \frac{n}{2}$

non è una funzione perché gli elementi dispari non vanno a finire nell'insieme di arrivo $\mathbb{N}$, ad

esempio $h(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Una funzione appropriata sarebbe

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$
$$n \mapsto \frac{n}{2}$$

Recap sugli insiemi numerici:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ NUMERI NATURALI. $\nearrow$ suoi elementi sono spesso denotati con m, k .

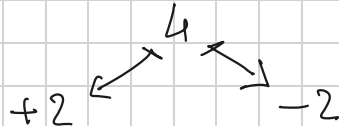
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ NUMERI INTERI. $\nearrow$ suoi elementi sono spesso denotati con m, a, b .

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ NUMERI RAZIONALI. $\nearrow$ suoi elementi sono spesso denotati con p, q, x .

$\mathbb{R}$ RETTA DEI NUMERI REALI. $\nearrow$ suoi elementi sono spesso denotati con x .

4) [non funzione] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \pm\sqrt{n}$

non è una funzione perché elementi di $\mathbb{N}$ vanno a finire in più di un elemento di $\mathbb{R}$. Ad esempio:



Esercizio: sia A un insieme ordinato, ossia $\forall x, y \in A$ posso sempre dire che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Sia $B \subset A$ (B è un sottoinsieme di A). Scrivere le definizioni di: ELEMENTO MASSIMALE, ESTREMO SUPERIORE e INFERIORE, MAGGIORANTE e MINORANTE, MAX e MIN. Di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ determinare, se esistono, massimo, minimo, estremo sup, estremo inf:

a) $\mathbb{Z}$

b) $\{n^2 - 2n : n \in \mathbb{N}\}$

$$c) [0,2] \cap (1,3)$$

$$d) [0,2] \cup (1,3)$$

$$e) \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$$

Le principali funzioni che vedremo sono ($f(x)=y$):

• POLINOMIALI : $y = 2 + x + x^3 - 10x^5 \dots$

↳ PARTICOLARI POLINOMI : CONICHE : polinomi di grado 2

$$y = x^2 + 2x, \quad y = x^2 - 1 ;$$

• ESPONENZIALI : $y = e^{x+2} - 1$, $y = 2^{3x}$,
(base > 0)

• LOGARITMICHE : $y = \log_2 x$, $y = \ln(x-3)$,
 $y = \log(3x^2 + 1)$
base e
base 10

• GONIOMETRICHE : $y = \tan x$, $y = 2 \cdot \cos(x-3)$, $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

• IRRAZIONALI : $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt[3]{2x-1}$, ...

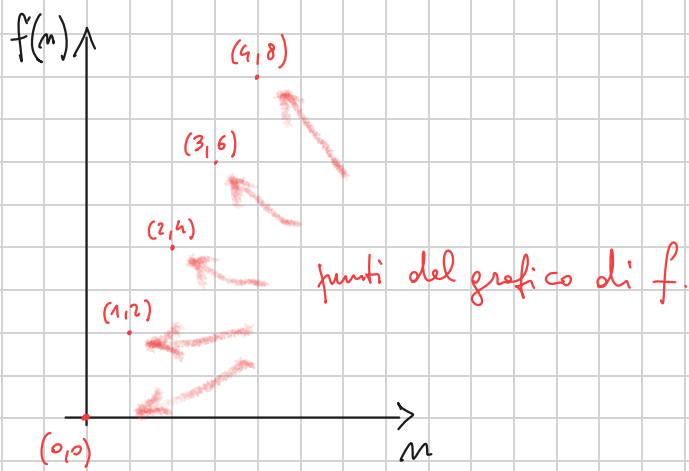
... e COMBINAZIONI tra esse!

Grafico di una funzione: data una funzione f , il suo grafico è l'insieme dei punti INPUT-OUTPUT $(x, f(x))$, oie il "disegno" di tutti i valori che assume f , punto per punto.

Esempi:

1) $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto 2n$

Al suo grafico appartengono le coppie
 $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$, ...



$$2) \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 - x$$

ma scriveremo

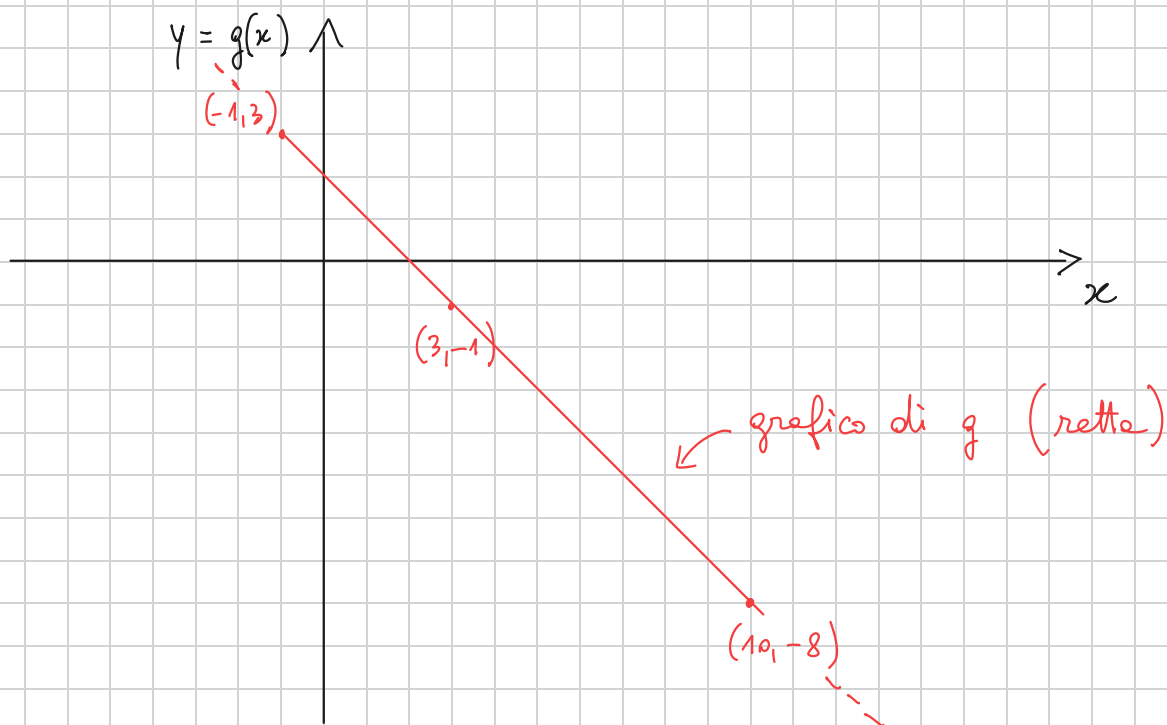
$$y = 2 - x$$

$$g(x) = 2 - x$$

$$g(10) = 2 - 10 = -8 \rightarrow (10, -8)$$

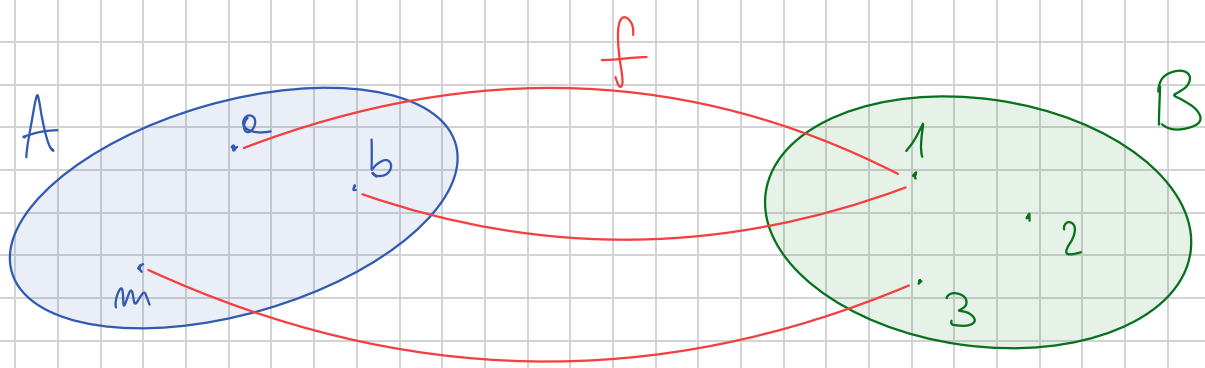
$$g(3) = 2 - 3 = -1 \rightarrow (3, -1)$$

$$g(-1) = 2 - (-1) = 3 \rightarrow (-1, 3)$$

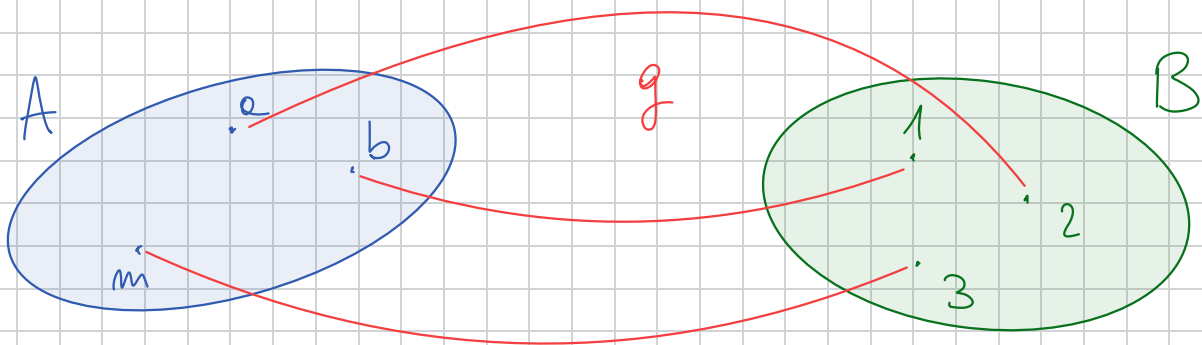


Il problema della funzione inversa.

Quando, date $f: A \rightarrow B$ possiamo "invertire f " "tornare indietro", ovvero associare agli elementi di B quegli elementi di A che li hanno avuti come INPUT?

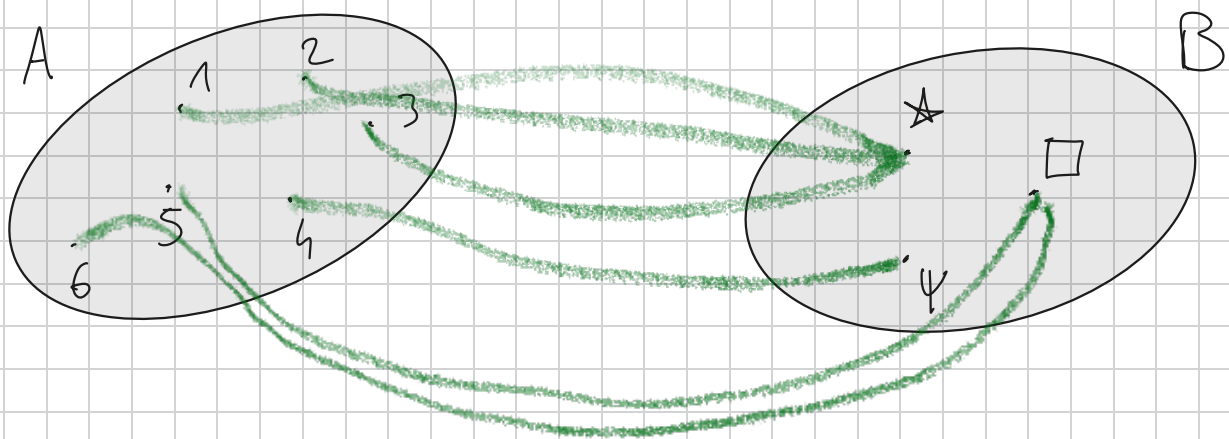


Per l'elemento "3" posso dire con certezza che tornando indietro finirei nell'elemento "m". Ma cosa posso dire per "1"? E per "2"? In questa situazione non riusciamo a invertire f .



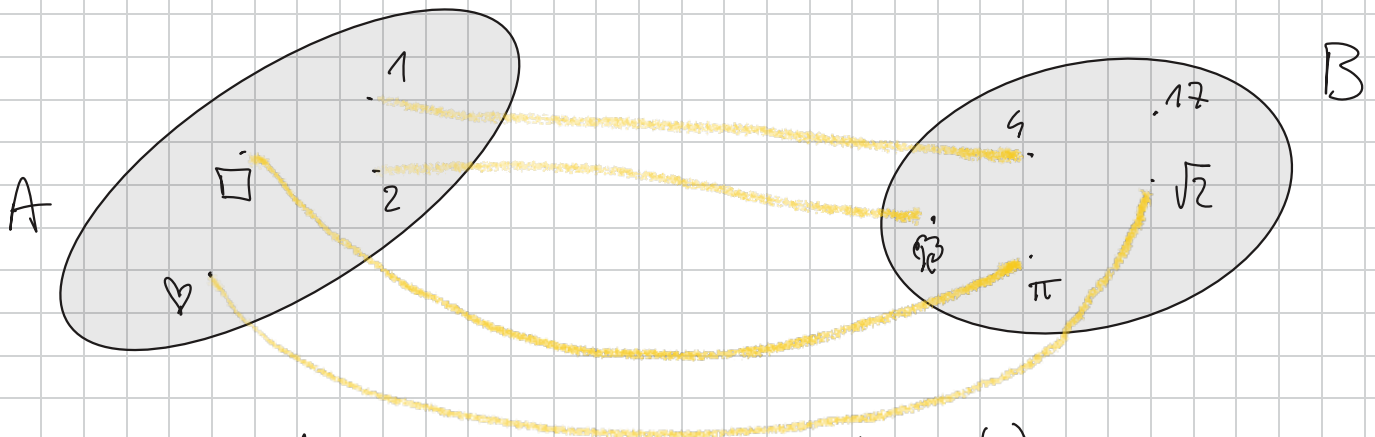
Qui la funzione g è invece invertibile.

DEF: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **SURIETTIVA** se tutti gli elementi di B vengono raggiunti da elementi di A , ossia $\forall b \in B \quad \exists a \in A$ tale che $f(a) = b$.



Note: ovviamente, se $\#(A) < \#(B)$, $f: A \rightarrow B$ non può essere suriettiva.

DEF: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice INIETTIVA se manda elementi diversi in punti diversi, ossia se $\forall x, y \in A$ con $x \neq y$ si ha $f(x) \neq f(y)$.



... è iniettiva (ma non suriettiva!)

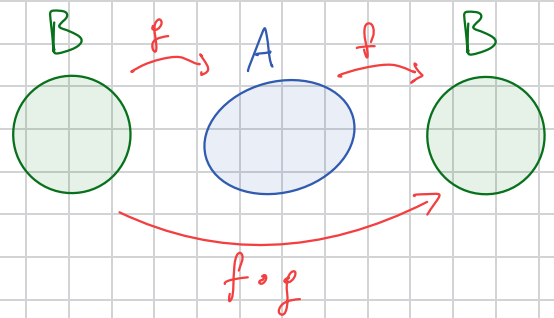
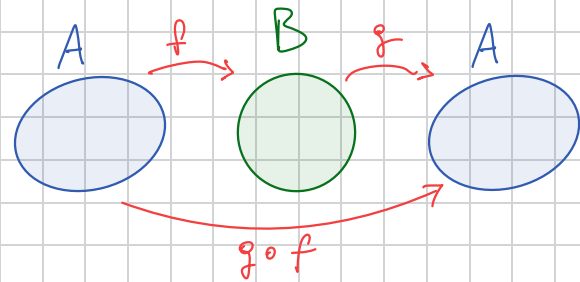
DEF: Date due funzioni $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, si definiscono le FUNZIONI COMPOSITE:

$$g \circ f: A \rightarrow A$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

$$f \circ g: B \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(g(x))$$



Esempio:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x+2$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x \mapsto 3x+2$$

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x+2 \mapsto 3(x+2)$$

osserviamo che in generale $g \circ f \neq f \circ g$.

Esercizio: Date le seguenti coppie di funzioni, calcolare le composizioni ($f \circ g$ e $g \circ f$):

a) $f(x) = e^{x+2}$, $g(x) = x^2 + 1$;

b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.