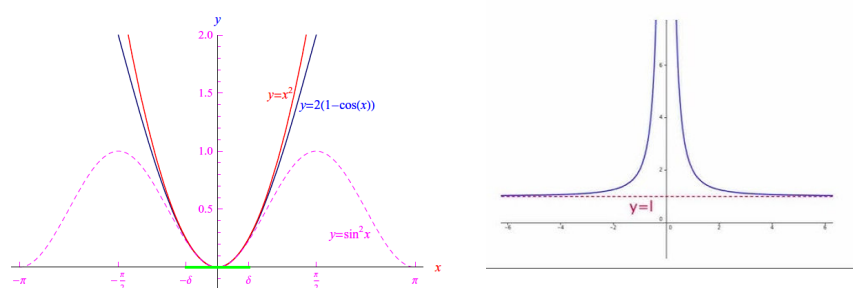


Infinitesimi e Infiniti



1

1

Infinitesimi

Definizione – Funzione Infinitesima

Una funzione $f(x)$ si dice infinitesima per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \left(\text{oppure } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right)$$

2



Infinitesimi

Esempi.

$y=e^x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow -\infty$

$y=\ln x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$

$y=\sin x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$
(ma anche per $x \rightarrow \pi, 2\pi$ etc.)

$y=\ln(1+x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$

3



Infinitesimi

Definizione – Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \quad \left(\text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \right)$$

Allora, si dice che per $x \rightarrow x_0$, (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

4



Infinitesimi

Esempi.
 $y = \sin(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di ordine 1
rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1 \quad \text{solo se } \alpha = 1$$

$y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x ,
per $x \rightarrow 0$

$y = 1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto
ad x , per $x \rightarrow 0$

5



Infinitesimi

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \ell \neq 0 & \text{ord}(f) = \text{ord}(g) \\ \pm \infty & \text{ord}(f) < \text{ord}(g) \\ 0 & \text{ord}(f) > \text{ord}(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabili} & \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \rightarrow \infty$

6



Infinitesimi

Calcolo dei limiti mediante il confronto tra infinitesimi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$$

dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$,
 si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore
 (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \rightarrow \infty$)

Es.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 + 2\operatorname{tg} x}{(e^x - 1)^2 + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

7



Infinitesimi

Definizione – Funzioni asintotiche

Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \rightarrow x_0$
 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$

Es.

$\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$

$\ln(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$

8


Infiniti

Algebra delle funzioni infinitesime

Siano $f(x)=o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x)=o(x^\beta)$ due funzioni **infinitesime** rispettivamente di ordine α e β per $x \rightarrow 0$

Allora si ha

$cf(x)=o(x^\alpha), \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$x^\lambda f(x)=o(x^{\lambda+\alpha}) \quad f(x)g(x)=o(x^{\alpha+\beta})$

$f(x)+g(x)=o(x^\gamma), \quad \gamma = \min(\alpha, \beta)$

9


Infiniti

Definizione – Funzione infinita

Una funzione $f(x)$ si dice **infinita** per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), dove x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \left(\text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \right)$$

10



Infiniti

Esempi

$y=e^x$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$

$y=\ln x$ è un infinito per $x \rightarrow 0^+$

$y=x^2 + x$ è un infinito $x \rightarrow \infty$

11



Infiniti

Definizione – Ordine di infinito

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g(x) \neq 0$

Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \quad \left(o \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \right)$$

Allora, si dice che per $x \rightarrow x_0$, (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito campione $g(x)$.

12


Infiniti

Esempi

$ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \rightarrow +\infty$

$ord\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 1$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$

$ord\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = 1$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$

13


Infiniti

Confronto tra infiniti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \ell \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm \infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabili} & \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \rightarrow \infty$

14



Infiniti

Utilizzo del confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti

Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo di limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$$

dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$, si possono **trascurare gli infiniti di ordine minore**.
(Analogo discorso vale per funzioni infinite per $x \rightarrow \infty$)

15



Infiniti

Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo di limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2},$$

dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$, si possono **trascurare gli infiniti di ordine minore**
(analogo discorso per funzioni infinite $x \rightarrow \infty$)

16



Infiniti

Esercizio

Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^3 + 3\sqrt{x}}{x^2(2x-1) + \sqrt{3}x}$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^3 + 3\sqrt{x}}{x^2(2x-1) + \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

17



Infiniti

Gerarchia degli infiniti

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$(\log_a x)^\alpha \ll x^\beta \ll b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0, a, b > 1$$

Es.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \forall \alpha > 0, a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha, \beta > 0, a > 1$$

18



Infiniti

Algebra delle funzioni infinite

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni **infinite** di ordine rispettivamente α e β .

Allora si ha:

Somma: $\text{ord}(f(x) + g(x)) = \max(\alpha, \beta)$

Prodotto: $\text{ord}(f(x) \cdot g(x)) = \alpha + \beta$

Potenza: $\text{ord}\left((f(x))^\gamma\right) = \alpha\gamma$